# Combinação linear, Independência linear e Gerador de um espaço vetorial

**ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"**


## Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

**Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP**


**16 de abril de 2020**

# Conceitos em espaços vetoriais

Premissa:

Seja $E$ um espaço vetorial. $(E, \oplus, \otimes)$

Seja $S$ um subconjunto de $E$. $(S \subset E)$

# Conceitos em espaços vetoriais

Premissa:

Seja $E$ um espaço vetorial. $(E, \oplus, \otimes)$

Seja $S$ um subconjunto de $E$. $(S \subset E)$

Objetivo: Entender os conceitos relacionados a um conjunto de vetores ($S$), enumerados a seguir:

1. Combinação linear de vetores
2. Gerador de um espaço vetorial.
3. Conjunto de vetores linearmente independentes(LI).
4. **Base** de um espaço vetorial.
5. **Dimensão** de um espaço vetorial.

# 1. Combinação Linear (CL)

Seja $E$ um espaço vetorial e $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset E$ um subconjunto de vetores.

Definição: Um vetor $v \in E$ é **combinação linear de $\boldsymbol{S}$** se existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ talque

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

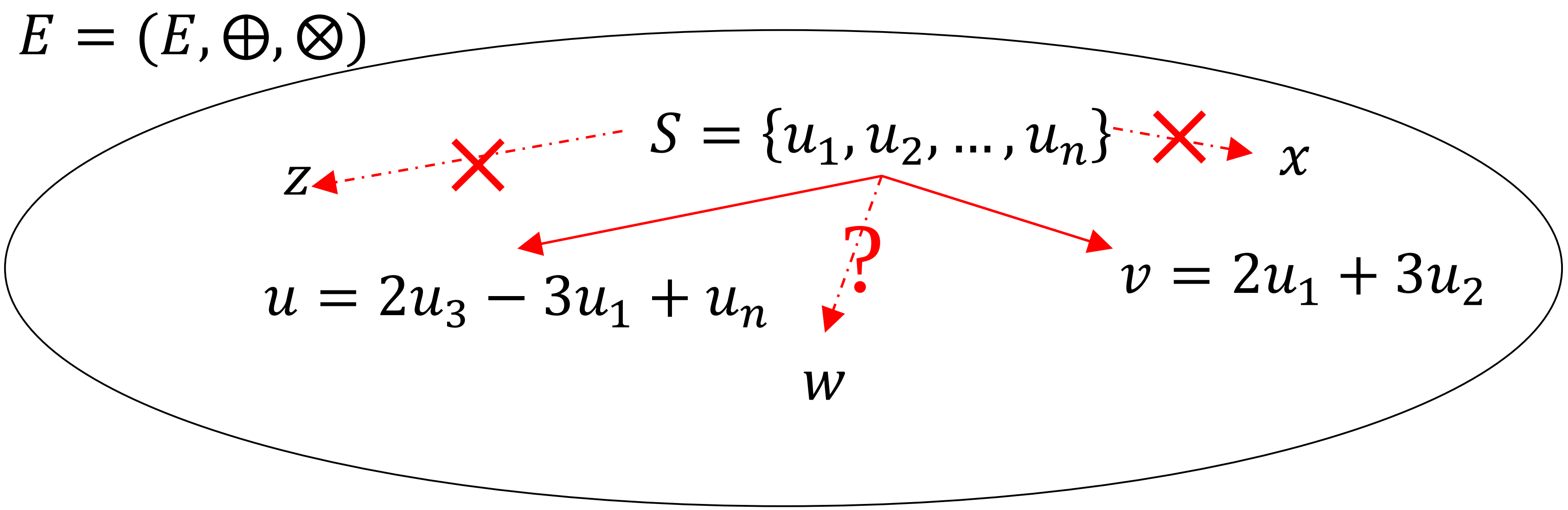
Isto é, $v$ é soma de múltiplos dos elementos de $S$.

# 1. Combinação Linear (CL)

Seja $E$ um espaço vetorial e $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ um subconjunto de vetores.

Definição: Um vetor $v \in E$ é **combinação linear de $\boldsymbol{S}$** se existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ talque

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$$



# 1. Combinação linear: Exemplo 1

Sejam $E = M_{1\times 3}$ e

$$S = \{[1 \quad 1 \quad -2], [1 \quad 0 \quad 4]\}$$

Será que $v = [5 \quad 2 \quad 8]$ é combinação linear de $S$?

Observar que $v = [5 \quad 2 \quad 8] \in M_{1\times 3}$.

# 1. Combinação linear: Exemplo 1

Sejam $E = M_{1\times 3}$ e $S = \{[1 \quad 1 \quad -2], [1 \quad 0 \quad 4]\}$

Será que $v = [5 \quad 2 \quad 8]$ é combinação linear de $S$?

**Respondendo:** Se for, devem existir escalares $c_1\ e\ c_2$ talque

$$[5 \quad 2 \quad 8] = c_1[1 \quad 1 \quad -2] + c_2[1 \quad 0 \quad 4]$$

# 1. Combinação linear: Exemplo 1

Sejam $E = M_{1\times 3}$ e $S = \{[1 \quad 1 \quad -2], [1 \quad 0 \quad 4]\}$

Será que $v = [5 \quad 2 \quad 8]$ é combinação linear de $S$?

**Respondendo:** Se for, devem existir $c_1$ $e$ $c_2$ talque

$[5 \quad 2 \quad 8] = c_1[1 \quad 1 \quad -2]+c_2[1 \quad 0 \quad 4]$

Temos um sistema de 3 equações com 2 incógnitas

$$\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 \\ 8 = -2c_1 + 4c_2 \end{cases}$$

A solução é evidente, mas vamos lembrar Gauss-Jordan, para destacar uma correta interpretação.

# 1. Combinação linear: Exemplo 1

Trabalhando a matriz estendida do sistema dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 1. Combinação linear: Exemplo 1

Trabalhando a matriz estendida do sistema dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim a solução é

$c_1 = 2$ e $c_2 = 3$ e $0 = 0$(válido)

# 1. Combinação linear: Exemplo 1

Trabalhando a matriz estendida do sistema dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim a solução é

$c_1 = 2$ e $c_2 = 3$ e $0 = 0$(válido)

Logo, a existem os escalares, e

$v = [5 \quad 2 \quad 8] = 2[1 \quad 1 \quad -2]+3[1 \quad 0 \quad 4]$

Portanto, $v$ **é combinação linear** de $S$.

Expressão simples: $v$ é CL de $S$.

# 1. Combinação linear: Exemplo 2

Sejam $E = M_{1\times 3}$ e $S = \{[1 \quad 1 \quad -2], [1 \quad 0 \quad 4]\}$

Será que $w = [5 \quad 5 \quad 5]$ é combinação linear de $S$ ?

Se for, devem existir $c_1$ $e$ $c_2$ talque

$$w = [5 \quad 5 \quad 5] = c_1[1 \quad 1 \quad -2] + c_2[1 \quad 0 \quad 4]$$

# 1. Combinação linear: Exemplo 2

Sejam $E = M_{1\times 3}$ e $S = \{[1 \quad 1 \quad -2], [1 \quad 0 \quad 4]\}$

Será que $w = [5 \quad 5 \quad 5]$ é combinação linear de $S$?

Se for, devem existir $c_1\ e\ c_2$ talque

$[5 \quad 5 \quad 5] = c_1[1 \quad 1 \quad -2]$+$c_2[1 \quad 0 \quad 4]$

Temos um sistema de 3 equações com 2 incógnitas

$$\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 5 = c_1 \\ 5 = -2c_1 + 4c_2 \end{cases}$$

Também resolveremos por Gauss-Jordan.

# 1. Combinação linear: Exemplo 2

A matriz estendida é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Assim o sistema dá

$c_1 = 5$ e $c_2 = 0$ e $0 = 15$(falso)

Observar: A igualdade falsa faz que os valores dos escalares não sejam válidos.

# 1. Combinação linear: Exemplo 2

A matriz estendida é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Assim o sistema dá

$c_1 = 5$ e $c_2 = 0$ e $0 = 15$(falso)

**Não existe solução**.

Se utilizarmos $c_1 = 5$ e $c_2 = 0$ temos:

$[5 \quad 5 \quad -10] = 5[1 \quad 1 \quad -2]+0[1 \quad 0 \quad 4] \neq w$

Portanto, $w$ **não é combinação linear** de $S$.

# 1. Combinação linear: Exemplo 3

Sejam $E = P_2$ e $S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$

Será $p(t) = 4t^2 + 7 - 5t$, combinação linear de $S$?

# 1. Combinação linear: Exemplo 3

Sejam $E = P_2$ e $S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$

Será $p(t) = 4t^2 + 7 - 5t$, combinação linear de $S$?

**Resposta:** Se for, devem existir $c_1, c_2$ e $c_3$ talque

$$4t^2 + 7 - 5t = c_1(t + 2) + c_2(t^2 - 9) + c_3(2t - 4 + 3t^2)$$

Isto é

$$4t^2 + 7 - 5t =$$
$$= (c_2 + 3c_3)t^2 + (c_1 + 2c_3)t + (2c_1 - 9c_2 - 4c_3)$$

Temos um sistema de 3 equações com 3 incógnitas

$$\begin{cases} 4 = c_2 + 3c_3 \\ -5 = c_1 + 2c_3 \\ 7 = 2c_1 - 9c_2 - 4c_3 \end{cases}$$

# 1. Combinação linear: Exemplo 3

Existe a solução única

$$c_1 = \frac{-201}{19} \quad c_2 = \frac{-83}{19} \quad c_3 = \frac{53}{19}$$

Portanto, $p(t)$ é combinação linear de $S$.

# 1. Combinação linear: Exemplo 3

Existe a solução única

$$c_1 = \frac{-201}{19} \quad c_2 = \frac{-83}{19} \quad c_3 = \frac{53}{19}$$

Portanto, $p(t)$ é combinação linear de $S$.

**Observar:**

Se tomamos um polinômio qualquer de $P_2$:

$$q(t) = q_2 t^2 + q_1 t + q_0$$

ele também é combinação linear de $S$.

Nota: Os valores $q_2$, $q_1$ e $q_0$ são os coeficientes do polinômio $q(t)$ e não são incógnitas.

# 1. Combinação linear: Exemplo 3

Para verificar que é combinação linear de $S$, devemos encontrar $c_1, c_2$ e $c_3$ talque

$$q_2 t^2 + q_1 t + q_0 = c_1(t+2) + c_2(t^2 - 9) + c_3(2t - 4 + 3t^2)$$

Juntando as potências de $t$, temos

$$q_2 t^2 + q_1 t + q_0 = (c_2 + 3c_3)t^2 + (c_1 + 2c_3)t + (2c_1 - 9c_2 - 4c_3)$$

# 1. Combinação linear: Exemplo 3

Resolvendo para esse polinômio qualquer

$$\begin{cases} q_2 = c_2 + 3c_3 \\ q_1 = c_1 + 2c_3 \\ q_0 = 2c_1 - 9c_2 - 4c_3 \end{cases}$$

Existe solução única

$$c_1 = \frac{1}{19}(-18q_2 + 23q_1 - 2q_0)$$
$$c_2 = \frac{1}{19}(-8q_2 + 6q_1 - 3q_0)$$
$$c_3 = \frac{1}{19}(9q_2 - 2q_1 + q_0)$$

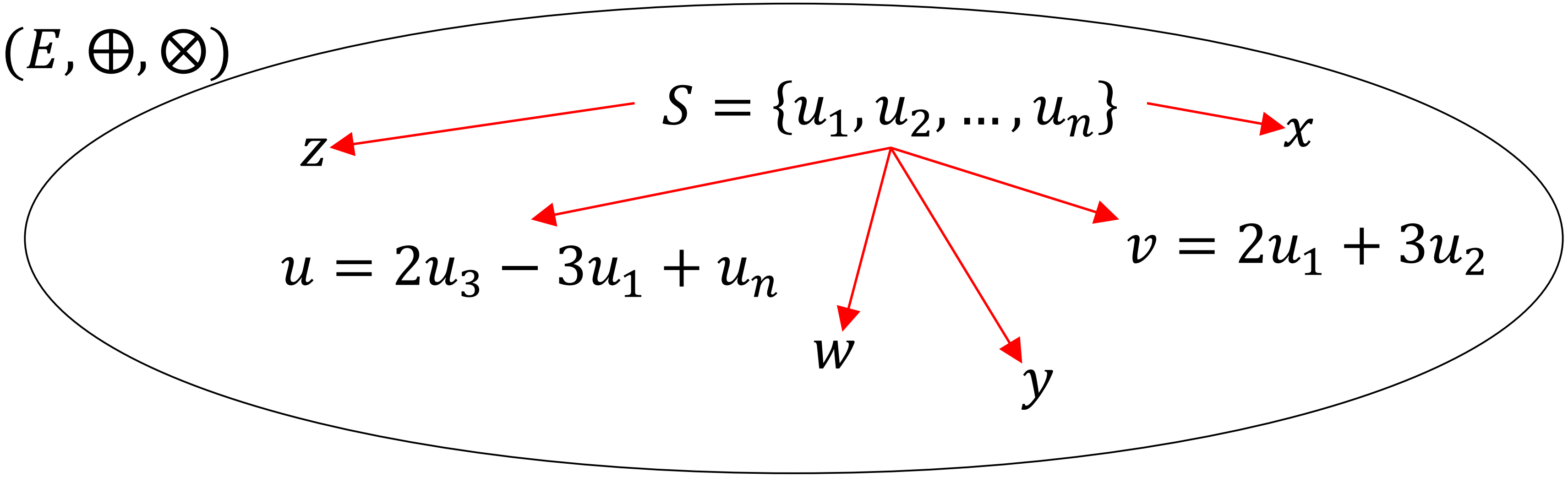
Nota: Todos os polinômios de $P_2$ são combinação linear de $S$.

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Definiçaõ: Seja $E$ um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset E$ é um **gerador do espaço vetorial** $E$ se:

**todo vetor** $v \in E$ é combinação linear de $S$.



# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 1: (exemplo 3, do tópico “combinação linear”)

Todos os polinômios do espaço $P_2$ são combinação linear de

$$S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$$

Portanto, $S$ **é gerador** de $P_2$.

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 1: (exemplo 3, do tópico “combinação linear”)

Todos os polinômios do espaço $P_2$ são combinação linear de

$$S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$$

Portanto, $S$ **é gerador** de $P_2$.

Exemplo 2: (exemplo 2, do tópico “combinação linear”)

Para o espaço $M_{1\times 3}$ vimos que a matriz $w = [5 \quad 5 \quad 5]$ não é combinação linear de

$$S = \{[1 \quad 1 \quad -2], [1 \quad 0 \quad 4]\}$$

Portanto, $S$ **não é gerador** de $M_{1\times 3}$.

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 3: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $S = \{(-2,0,-6), (1,-2,1), (1,0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^3$ ?

**Resolução**

Como toda terna deve ser CL de $S$, consideremos uma terna arbitrária $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e ela deve ser CL de $S$.

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 3: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $S = \{(-2,0,-6),(1,-2,1),(1,0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^3$ ?

**Resolução**

Como toda terna deve ser CL de $S$, consideremos uma terna arbitrária $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e ela deve ser CL de $S$.

Isto é, devem existir $c_1$, $c_2$ e $c_3$ talque

$$(v_1, v_2, v_3) = c_1(-2,0,-6) + c_2(1,-2,1) + c_3(1,0,3)$$
$$(v_1, v_2, v_3) = (-2c_1 + c_2 + c_3, -2c_2, -6c_1 + c_2 + 3c_3)$$

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}v_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3v_1 - v_2 + v_3 \end{bmatrix}$$

O que significa que só terá solução para

$$0 = -3v_1 - v_2 + v_3$$

e para os vetores $v$ que não satisfazem essa condição não existe solução.

Portanto $S$ não é gerador de $\mathbb{R}^3$

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 4: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $S = \{(-2,-5),(1,-2),(0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^2$ ?

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 4: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $S = \{(-2, -5), (1, -2), (0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^2$ ?

**Resolução**

Como todo par deve ser CL de $S$, consideremos um par arbitrário $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e deve ser combinação linear de $S$.

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Exemplo 4: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $S = \{(-2,-5),(1,-2),(0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^2$ ?

**Resolução**

Como todo par deve ser CL de $S$, consideremos um par arbitrário $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e deve ser combinação linear de $S$.

Isto é, devem existir $c_1$, $c_2$ e $c_3$ talque

$$(v_1, v_2) = c_1(-2,-5) + c_2(1,-2) + c_3(0,3)$$
$$(v_1, v_2) = (-2c_1 + c_2, -5c_1 - 2c_2 + 3c_3)$$

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & v_1 \\ -5 & -2 & 3 & v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & v_1 \\ -3 & 0 & 1 & \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1) \end{bmatrix}$$

$-2c_1 + c_2 = v_1$ e $-3c_1 + c_3 = \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1)$

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & v_1 \\ -5 & -2 & 3 & v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & v_1 \\ -3 & 0 & 1 & \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1) \end{bmatrix}$$

$-2c_1 + c_2 = v_1$ e $-3c_1 + c_3 = \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1)$

$c_2 = v_1 + 2c_1$ e $c_3 = \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1) + 3c_1$

# 2. Gerador de um espaço vetorial

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & v_1 \\ -5 & -2 & 3 & v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & v_1 \\ -3 & 0 & 1 & \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1) \end{bmatrix}$$

$-2c_1 + c_2 = v_1$ e $-3c_1 + c_3 = \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1)$

$c_2 = v_1 + 2c_1$ e $c_3 = \frac{1}{3}(v_2 + 2v_1) + 3c_1$

O que significa que existem infinitas soluções e $c_1$ pode assumir qualquer valor real.

Portanto $S$ é gerador de $\mathbb{R}^2$.

# 3. Conjunto linearmente independente

Definição: Seja $E$ um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é **linearmente independente (LI)** sempre que

se $0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$

então necessariamente $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$.

# 3. Conjunto linearmente independente

Definição: Seja $E$ um espaço vetorial.

Um conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é um **linearmente independente (LI)** sempre que

se $0 = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$

então necessariamente $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$.

Isto significa: A única forma de combinar o vetor 0 é com coeficientes nulos (zeros).

Se não for o caso, dizemos que $S$ é **linearmente dependente** (LD).

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 1: Vimos que o sub-conjunto

$S = \{(-2,0,-6),(1,-2,1),(1,0,3)\}$ não é gerador de $\mathbb{R}^3$, mas será que é linearmente independente?

Para provar que é linearmente independente (LI) (definição) devemos combinar o vetor 0:

$(0,0,0) = c_1(-2,0,-6) + c_2(1,-2,1) + c_3(1,0,3)$

e devemos ter a única solução $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 1: Vimos que o sub-conjunto

$S = \{(-2,0,-6), (1,-2,1), (1,0,3)\}$ não é gerador de $\mathbb{R}^3$, mas será que é linearmente independente?

Para provar que é linearmente independente (LI) (definição) devemos combinar o vetor 0:

$$(0,0,0) = c_1(-2,0,-6) + c_2(1,-2,1) + c_3(1,0,3)$$

e devemos ter a única solução $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

**Resolução:**

Combinando linearmente o vetor zero, $0 = (0,0,0)$:

$$(0,0,0) = (-2c_1 + c_2 + c_3, -2c_2, -6c_1 + c_2 + 3c_3)$$

# 3. Conjunto linearmente independente

O sistema na matriz estendida é

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução é: $-2c_1 + c_3 = 0$, $c_2 = 0$ e $0 = 0$.

# 3. Conjunto linearmente independente

O sistema na matriz estendida é

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução é: $-2c_1 + c_3 = 0$, $c_2 = 0$ e $0 = 0$.

Temos infinitas soluções: $c_3 = 2c_1$ e $c_2 = 0$

Logo, a solução não é única e não necessariamente $c_1 = 0$. Pode-se escolher $c_1 = 1$ então uma solução é $c_1 = 1$, $c_3 = 2$ e $c_2 = 0$.

Portanto, o conjunto $S$ não é LI.

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 2: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Vimos que $S = \{(-2,-5),(1,-2),(0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^2$, mas será LI ?

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 2: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Vimos que $S = \{(-2,-5),(1,-2),(0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^2$, mas será LI ?

**Resolução**

Para isto, tomamos o vetor zero, 0$=(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e

o combinamos linearmente com os elementos de $S$.

$$(0,0) = c_1(-2,-5) + c_2(1,-2) + c_3(0,3)$$

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 2: Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Vimos que $S = \{(-2,-5),(1,-2),(0,3)\}$ **é gerador** de $\mathbb{R}^2$, mas será LI ?

**Resolução**

Para isto, tomamos o vetor zero, 0$= (0,0) \in \mathbb{R}^2$ e

o combinamos linearmente com os elementos de $S$.

$$(0,0) = c_1(-2,-5) + c_2(1,-2) + c_3(0,3)$$

$$(0,0) = (-2c_1 + c_2, -5c_1 - 2c_2 + 3c_3)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

# 3. Conjunto linearmente independente

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui $-2c_1 + c_2 = 0$ e $-3c_1 + c_3 = 0$

isto é $c_2 = 2c_1$ e $c_3 = 3c_1$. Infinitas soluções.

# 3. Conjunto linearmente independente

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui $-2c_1 + c_2 = 0$ e $-3c_1 + c_3 = 0$

isto é $c_2 = 2c_1$ e $c_3 = 3c_1$. Infinitas soluções.

Lembremos que a única solução deveriam ser coeficientes zeros.

Portanto, $S$ não é LI.

Notas:

No exemplo 1, $S$ não é gerador e também não LI.

No exemplo 2, $S$ é gerador mas não é LI.

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 3: Sejam, $E = P_2$ e o conjunto de polinômios

$$S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$$

Vimos que $S$ é gerador (exemplo 1 do conceito 2), mas $S$ será LI ?

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 3: Sejam, $E = P_2$ e o conjunto de polinômios

$$S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$$

Vimos que $S$ é gerador (exemplo 1 do conceito 2), mas $S$ será LI ?

**Resposta:** Se for, devemos combinar o elemento zero (polinômio zero: $0 = 0t^2 + 0t + 0$) e a única solução devem ser coeficientes zeros.

$$0t^2 + 0t + 0 = c_1(t + 2) + c_2(t^2 - 9) + c_3(2t - 4 + 3t^2)$$

# 3. Conjunto linearmente independente

Exemplo 3: Sejam, $E = P_2$ e o conjunto de polinômios

$$S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$$

Vimos que $S$ é gerador (exemplo 1 do conceito 2), mas $S$ será LI ?

**Resposta:** Se for, devemos combinar o elemento zero (polinômio zero: $0 = 0t^2 + 0t + 0$) e a única solução devem ser coeficientes zeros.

$$0t^2 + 0t + 0 = c_1(t + 2) + c_2(t^2 - 9) + c_3(2t - 4 + 3t^2)$$

$$= (c_2 + 3c_3)t^2 + (c_1 + 2c_3)t + (2c_1 - 9c_2 - 4c_3)$$

Um sistema de 3 equações e 3 incógnitas.

# 3. Conjunto linearmente independente

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -9 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0$.

Portanto, $S$ é LI.

Nota: $S$ é gerador de $P_2$ e

$S$ é linearmente independenter (LI).

Isto leva para a próxima definição.