ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Espaço vetorial
Sub-espaço vetorial

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Subespaço vetorial

- Muitas vezes queremos trabalhar com um conjunto "pequeno", mas sem perder as propriedades de um espaço vetorial.
- Então, perguntamos, dado um espaço vetorial $(E,\oplus,\otimes)$, é possível que exista um subconjunto próprio "menor", $S \subset E$, que também seja espaço vetorial?

Para poder falar de espaço vetorial o conjunto S deve ser munido das operações de adição e multiplicação vezes escalar que já estão definidas $(S,\oplus,\otimes)$.

Exemplo

Sabemos que o conjunto das matrizes $M_{3\times 1}$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

Por outro lado, ao resolver a equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenho **infinitas soluções**.

O conjunto solução (de todas as soluções) é:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo

Lembrando como resolver a equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Construindo a matriz estendida e aplicando Gauss dá

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma linha é zerada, então temos infinitas soluções:

$$x - 5z = 0 \rightarrow x = 5z$$
$$y - 6z = 0 \rightarrow y = 6z$$
$$0 = 0 \rightarrow z \in \mathbb{R}$$

Exemplo

Construindo a matriz solução com z como variável livre temos

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$.

Portanto, agrupando todas as soluções em um conjunto solu

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo

Sabemos que o conjunto das matrizes $M_{3\times 1}$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

Por outro lado, ao resolver a equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenho infinitas soluções.

O conjunto solução toma a forma:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$ é um espaço vetorial?

Exemplo

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$(M_{3\times 1}, \oplus, \odot)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(S, \oplus, \odot)$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$(M_{3\times 1}, \oplus, \odot)$

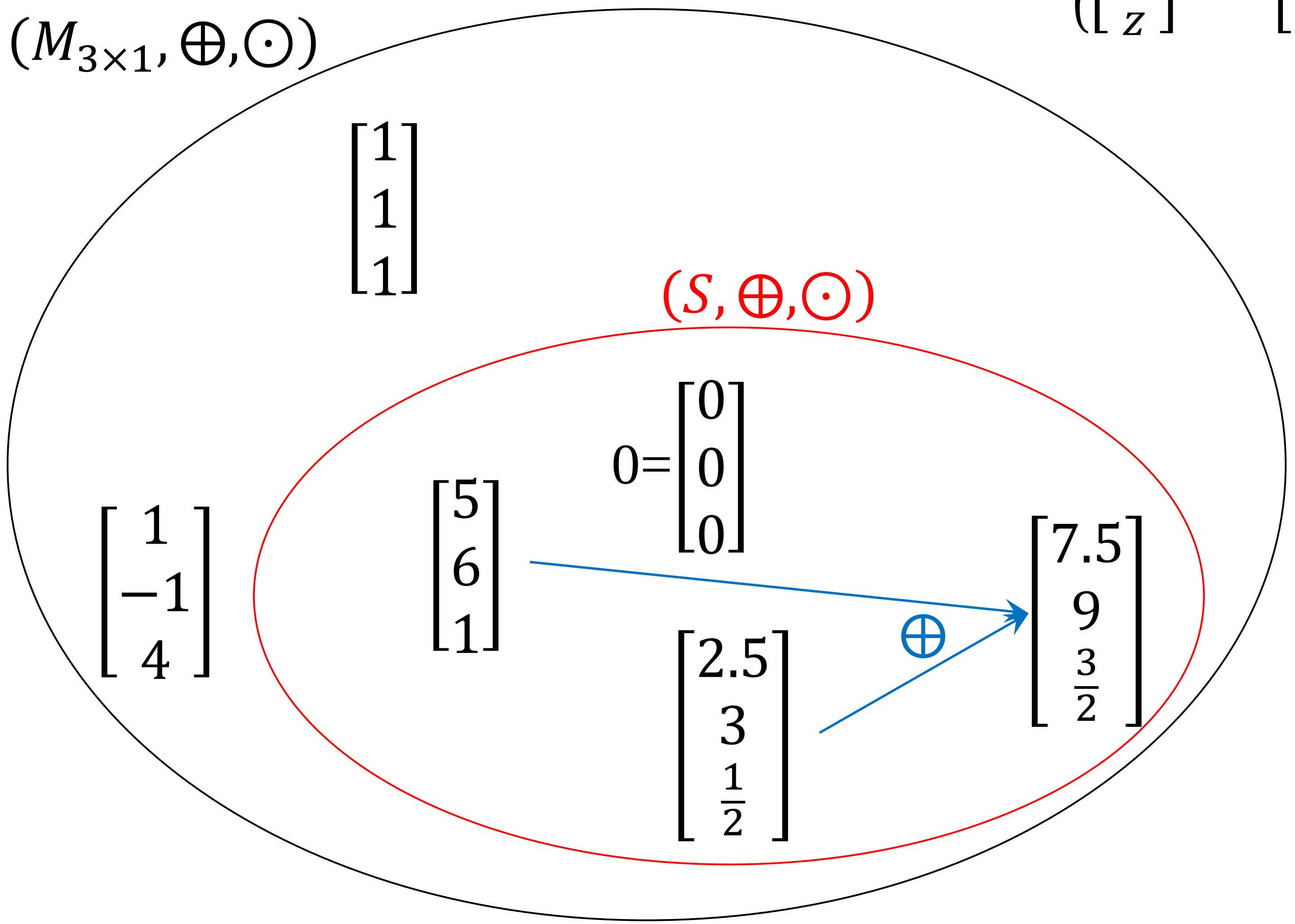
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(S, \oplus, \odot)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$



Subespaço vetorial

- Dado um espaço vetorial $(E, \oplus, \otimes)$, com adição e multiplicação veces escalar definidas, então um subconjunto $S \subset E$, com a adição e multiplicação veces escalar de E restringindo para S, $(S, \oplus, \otimes)$,

  é chamado de **subespaço vetorial** se ele é

  - fechado para a adição restringida (A1) e é

  - fechado para a multiplicação por escalar restringida (M1).

Exemplo: Retas e Planos passando pela origem.

Mais exemplos

1. O conjunto solução da equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais?

O conjunto solução toma a forma:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{3\times 1}$$

Assim $(S, \oplus, \otimes)$ é um espaço vetorial.

(Verifique como subespaço vetorial, considerando $S \subset M_{3\times 1}$).

Mais exemplos (cont)

2. O conjunto solução do sistema $AX = F$ é um espaço vetorial com as operações usuais?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução toma a forma

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2-r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{4\times 1}$$

O conjunto solução $(S, \oplus, \otimes)$ **não é espaço vetorial**!

Propriedade A1

A propriedade A1:

$$\text{Se } u, v \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 2-r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \oplus v \in S$$

Isto é:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade A1

A propriedade A1:

$$\text{Se } u, v \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 2-r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \oplus v \in S$$

Isto é:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ daqui } u \oplus v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S$$

Propriedade A1

A propriedade A1:

$$\text{Se } u, v \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 2-r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \oplus v \in S$$

Isto é:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ daqui } u \oplus v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S$$

Portanto, S não é espaço vetorial. (Também falha M1)

Espaços vetoriais similares

Observar que é possível expressar de forma similar, todo elemento dos espaços:

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow x \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow x = (x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

$M_{2\times 1} \longrightarrow x \in M_{2\times 1}$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = x_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{21}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M_{1\times 2} \longrightarrow x \in M_{1\times 2}$

$$\Rightarrow x = [x_{11} \quad x_{12}] = x_{11}[1 \quad 0] + x_{12}[0 \quad 1]$$

$P_1 \longrightarrow x \in P_1$

$$\Rightarrow x = x_1 t + x_0 = x_1(t) + x_0(1)$$

Espaços vetoriais similares

Vejamos um exemplo:

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = (a, b)$ mas

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) =$$
$$= a(1,0) + b(0,1)$$

$M_{2\times 1} \longrightarrow x \in M_{2\times 1}$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M_{1\times 2} \longrightarrow x \in M_{1\times 2}$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_1 \longrightarrow x \in P_1$

$$\Rightarrow x = at + b = a(t) + b(1)$$

Outros espaços vetoriais

Relacionar triplas ordenadas $\mathbb{R}^3$, matrices $M_{3\times1}$, matrizes $M_{1\times3}$, e polinômios de ordem 2 (P_2).

Relacionar as n-uplas (énuplas) $\mathbb{R}^n$, com matrices $M_{n\times1}$, matrizes $M_{1\times n}$, e polinômios de ordem (n-1) P_{n-1}.