

**ZAB0161 - Álgebra Linear com
Aplicações em Geometria Analítica**

**Espaço vetorial
Vetores**

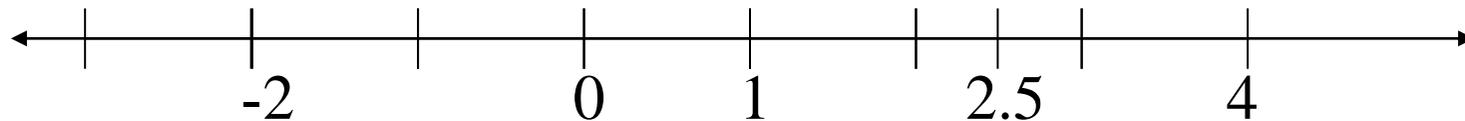
Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Lembrando um conjunto com estrutura

O conjunto dos números reais \mathbb{R} , possui dois elementos diferenciados, a origem e a unidade.

Determinando esses elementos, o conjunto pode ser representado geometricamente:



O conjunto \mathbb{R} , não é apenas um conjunto, ele tem uma estrutura, munido por exemplo de uma relação de ordem “menor que”.

Operações no conjunto \mathbb{R}

Nos reais podemos operar seus elementos:

Adição (+), que satisfaz as propriedades de clausura, comutatividade, associatividade, existência de um elemento neutro e existência de elementos inversos aditivos.

Multiplicação (\cdot), que satisfaz as propriedades de clausura, comutatividade, associatividade, existência de um elemento neutro e existência de elementos inversos para os elementos não nulos.

Propriedades de distributividade valem quando temos adição e multiplicação juntos.

Estrutura algébrica

Juntando o conjunto dos reais e suas operações

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

criamos uma estrutura algébrica, e nela muitas propriedades são satisfeitas.

Essa estrutura algébrica é chamada de “corpo”.

Não desenvolveremos a ideia de “corpo”, pois estamos interessados em uma estrutura algébrica menos restritiva que vale para os conjuntos que já utilizamos (como os conjuntos de matrizes) e outros que estudaremos posteriormente.

Conjuntos de matrizes e operações

Lembremos do conjunto de matrizes de ordem 2×2

$$M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

$M_{2 \times 2}$

$$\begin{bmatrix} 2\pi & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi & 1 \\ 4 & -1.2 \end{bmatrix}$$

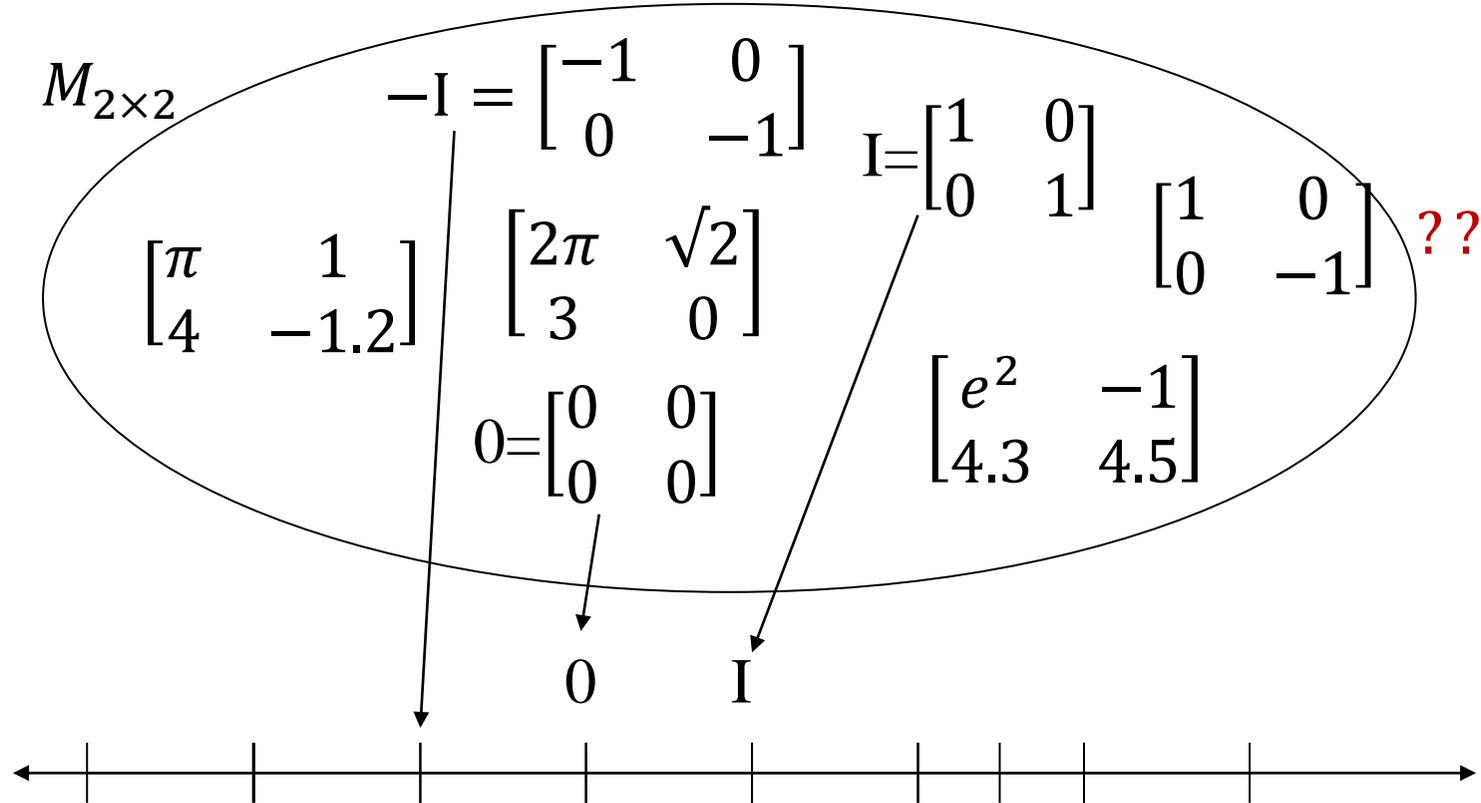
$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^2 & -1 \\ 4.3 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Conjuntos de matrizes e operações

Lembremos do conjunto de matrizes de ordem 2×2

$$M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$



Conjuntos de matrizes e operações

Adição:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Multiplicação vezes escalar: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Estrutura algébrica

Observamos que temos três operações com os elementos das matrizes de $M_{2 \times 2}$.

Vamos juntar o conjunto de matrizes com as duas primeiras operações mencionadas (“adição” e “multiplicação vezes escalar”) para formar uma estrutura

$$(M_{2 \times 2}, \oplus, \otimes)$$

Observar: Temos formado uma tripla com um conjunto não vazio, uma operação “adição” e uma outra operação “multiplicação vezes escalar”.

Espaço vetorial - Definição

Um conjunto não vazio E , no qual estão definidas duas operações \oplus e \otimes , **é um espaço vetorial** se as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$A1: \text{ Se } u \in E, v \in E \Rightarrow u \oplus v \in E$$

$$A2: \forall u, v \in E \Rightarrow u \oplus v = v \oplus u$$

$$A3: \forall u, v, w \in E \Rightarrow u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$$

$$A4: \text{ Existe } 0 \in E \text{ tal que } v \oplus 0 = v, \forall v \in E$$

$$A5: \text{ A cada } v \in E, \text{ existe } (-v) \in E \text{ tal que}$$
$$v \oplus (-v) = 0$$

e

Espaço vetorial – Definição (cont)

M1: Dado um $\alpha \in K$, e dado $x \in E$ então $\alpha \otimes x \in E$

M2: $(\alpha\beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$; $\forall \alpha, \beta \in K$; $\forall x \in E$

M3: $1 \otimes x = x$; $\forall x \in E$

M4:

$$\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y); \forall \alpha \in K; \forall x, y \in E$$

M5:

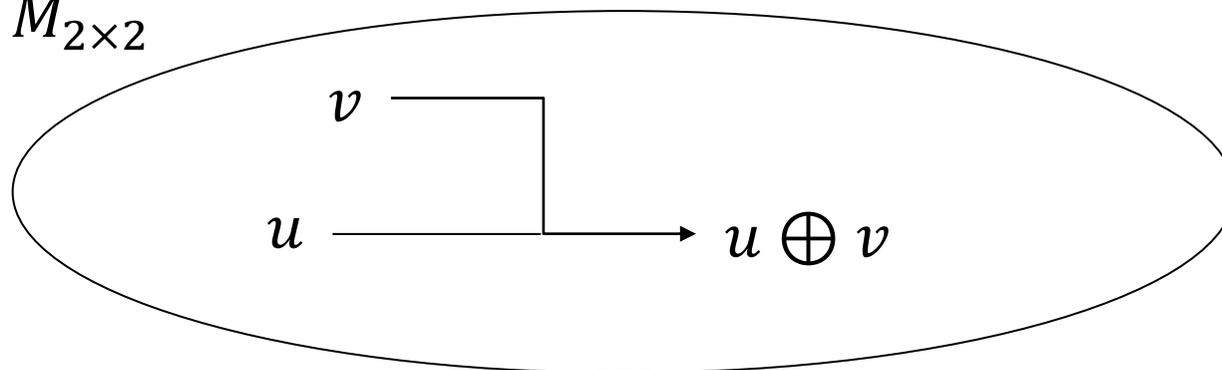
$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

A tripla (E, \oplus, \otimes) é um espaço vetorial se são satisfeitas as propriedades de A1 até A5 e M1 até M5.

Observações sobre as operações

Adição:

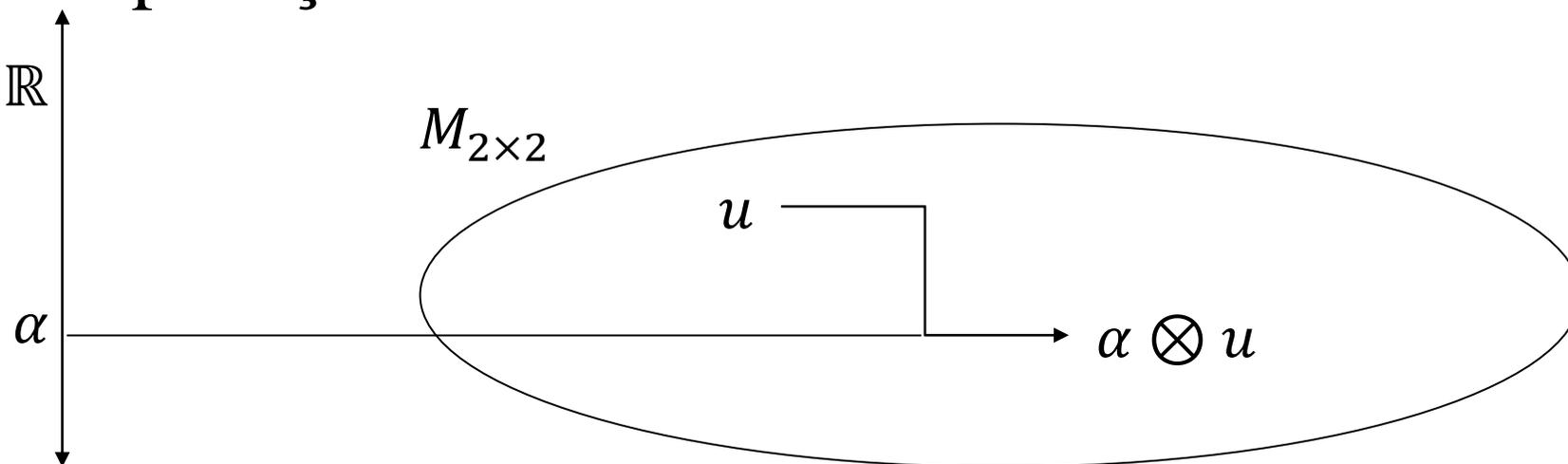
$M_{2 \times 2}$



Multiplicação vezes escalar:

\mathbb{R}

$M_{2 \times 2}$



Vetores

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de **vetores**.

Isto é, são elementos (não necessariamente números) que podem ser adicionados e multiplicados vezes escalares e satisfazem as propriedades enumeradas

Observar: As operações de adição e multiplicação vezes escalar não são únicas, podem ser definidas pelo usuário (segundo as suas necessidades).

Exemplo de espaço vetorial

Conhecemos o conjunto $M_{2 \times 1}$ com as operações:

O conjunto de matrizes coluna, com duas linhas,

$$M_{2 \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a adição (soma usual)

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$$

e com a multiplicação vezes escalar (usual)

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

A tripla $(M_{2 \times 1}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial.

Importante

Podem ser definidas
outras operações

Um exemplo, é um **espaço vetorial**?

Vou definir **outra operação** no conjunto $M_{2 \times 1}$:

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2 \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma usual

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$$

e com a multiplicação vezes escalar como

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

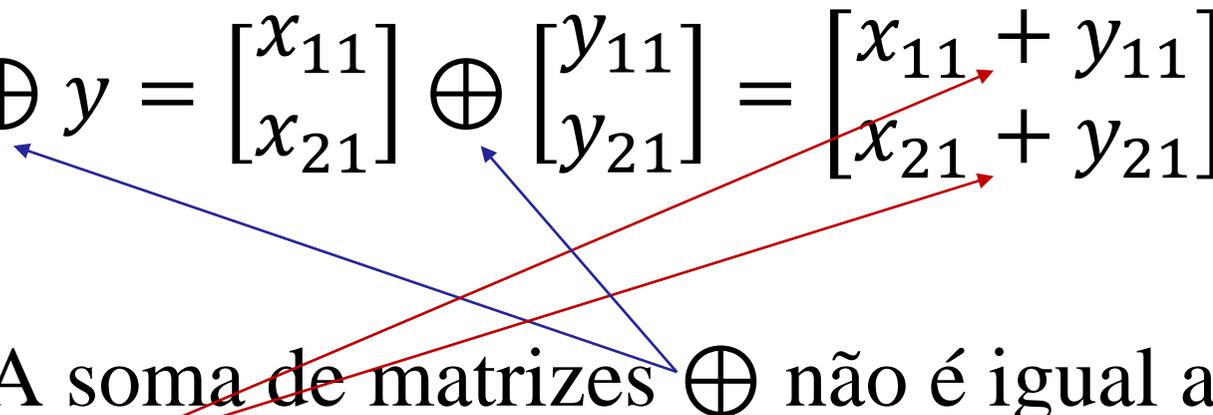
Entende as operações?

Um exemplo: é um **espaço vetorial**?

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2 \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

adição: $x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$



Observar: A soma de matrizes \oplus não é igual a soma de reais $+$.

Um exemplo: é um **espaço vetorial**?

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2 \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma $x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$

e com a multiplicação vezes escalar como:

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

Observar: A multiplicação de um escalar com uma matriz \odot não é igual a multiplicação de reais.

Observar: Que a primeira linha não é multiplicada.

Um exemplo: é um **espaço vetorial**?

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2 \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \end{bmatrix} / r_{11}, r_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma usual

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$$

e com a multiplicação vezes escalar como

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

Pergunta:

A tripla $(M_{2 \times 1}, \oplus, \odot)$ é um **espaço vetorial**?

Um exemplo, é um **espaço vetorial**?

O aluno pode verificar que realmente satisfaz as propriedades:

A1, A2, A3, A4, A5, M1, M2 e M3.

Para apresentar como deve ser realizado o processo de verificação das propriedades:

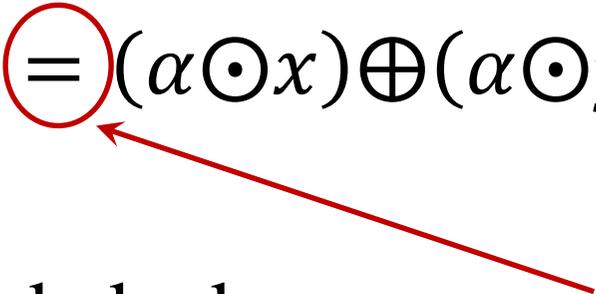
Vamos desenvolver a verificação para a:

propriedade M4, e

propriedade M5.

Verificando distributividade \rightarrow M4

M4:

$$\alpha \odot (x \oplus y) \stackrel{=}{=} (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y); \quad \forall \alpha \in K; \forall x, y \in E$$


Nota: a igualdade deve ser **comprovada**, não é **dada**.

Assim, devemos calcular cada lado por separado e ver se é possível chegar na mesma expressão:

1. $\alpha \odot (x \oplus y) = ?$
2. $(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) = ?$

Verificando distributividade \rightarrow M4

M4:

$$\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y); \quad \forall \alpha \in K; \forall x, y \in E$$

1. Trabalhando no lado esquerdo

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ pois } x, y \in E$$

$$= \alpha \odot \left(\begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ usando a adi\u00e7\u00e3o definida}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha(x_{21} + y_{21}) \end{bmatrix} \right) \text{ usando a multiplica\u00e7\u00e3o}$$

vezes escalar definida.

Verificando distributividade \rightarrow M4

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) =$$

$$\left(\alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\alpha \odot \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} y_{11} \\ \alpha y_{21} \end{bmatrix} \right)$$

utilizando a definição da multiplicação vezes escalar

$$= \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha x_{21} + \alpha y_{21} \end{pmatrix} \text{ usando definição da adição}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha(x_{21} + y_{21}) \end{pmatrix}$$

pela distributividade de números reais.

Verificando distributividade \rightarrow M4

Observamos que se obteve o mesmo resultado:

$$1. \alpha \odot (x \oplus y) = \dots = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha(x_{21} + y_{21}) \end{pmatrix}$$



$$2. (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) = \dots = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha(x_{21} + y_{21}) \end{pmatrix}$$

$$\text{Assim, } \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$$

para todo escalar $\alpha \in K$, e para quaisquer $x, y \in E$.

Portanto, a propriedade M4 se satisfaz.

Verificando distributividade \rightarrow M5

M5:

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

Lembro: a igualdade deve ser **verificada**, não é **dada**.

Calculemos:

1. $(\alpha + \beta) \odot x = ?$
2. $(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = ?$

Verificando distributividade \rightarrow M5

1. Trabalhando no lado esquerdo

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha + \beta) \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \text{ pois } x \in E$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} \\ (\alpha + \beta)x_{21} \end{bmatrix} \text{ usando a multiplicação vezes$$

escalar definida

$$= \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix} \text{ usando a distributividade da}$$

soma e multiplicação entre números reais.

Verificando distributividade \rightarrow M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = \left(\alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\beta \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \beta x_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ usando a definição da}$$

multiplicação vezes escalar em ambos somandos

$$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} + x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ usando definição da adição}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ adição de números reais.}$$

Verificando distributividade \rightarrow M5

Trabalhando no lado esquerdo

$$(\alpha + \beta) \odot x = \dots = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix}$$

Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = \dots = \begin{bmatrix} 2x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix}$$

Se $x_{11} = 0$, a igualdade é satisfeita, mas
se $x_{11} \neq 0$, a igualdade é falsa.

Verificando distributividade \rightarrow M5

Observamos que se obteve diferentes resultados para cada um dos lados. Assim

$$(\alpha + \beta) \odot x \neq (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

para todo escalar $\alpha, \beta \in K$,

e para qualquer elemento $x \in E$.

Portanto, a propriedade M5 não se satisfaz.

Basta uma propriedade não ser válida,

então a tripla $(M_{2 \times 1}, \oplus, \odot)$ **não é espaço vetorial.**

Principais Exemplos

1. O conjunto de polinômios de grau n

$$P_n = \{ p(t) = p_n t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \dots + p_1 t + p_0 \mid p_i \in R \}$$

Adição: Sejam $p, q \in P_n$

$$\Rightarrow p \oplus q = (p_n + q_n)t^n + \dots + (p_1 + q_1)t + (p_0 + q_0)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in R, p \in P_n$

$$\Rightarrow \alpha \otimes p = (\alpha p_n)t^n + \dots + (\alpha p_1)t + (\alpha p_0)$$

Se a tripla (P_n, \oplus, \otimes) é um espaço vetorial então os polinômios são **vetores**.

Os polinômios são vetores

Apenas verificamos a propriedade M5.

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

Lembro: a igualdade deve ser **verificada!!!**

1. $(\alpha + \beta) \otimes x = ?$

2. $(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) = ?$

Os polinômios são vetores

Apenas verificamos a propriedade M5.

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

A propriedade para o conjunto de polinômios será

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in P_n$$

Mas como $x \in P_n$ então

$$x = x(t) = x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_0$$

Substituimos nos membros esquerdo e direito

1. $(\alpha + \beta) \otimes x = ?$

2. $(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) = ?$

Verificando distributividade \rightarrow M5

1. Trabalhando no lado esquerdo

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \otimes x &= (\alpha + \beta) \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_0) \\ &= (\alpha + \beta) x_n t^n + (\alpha + \beta) x_{n-1} t^{n-1} + \dots + (\alpha + \beta) x_0\end{aligned}$$

utilizando a multiplicação vezes escalar.

Observar: Na última expressão todas são operações entre números reais.

Verificando distributividade \rightarrow M5

2. Trabalhando no lado direito

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) &= \\ &= (\alpha \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_0)) \\ &\quad \oplus (\beta \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_0))\end{aligned}$$

Aqui, só temos substituído o elemento x (que é um polinômio)

$$\begin{aligned}&= (\alpha x_n t^n + \alpha x_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha x_0) \\ &\quad \oplus (\beta x_n t^n + \beta x_{n-1} t^{n-1} + \dots + \beta x_0)\end{aligned}$$

utilizando a definição da multiplicação vezes escalar em ambos somandos

Verificando distributividade \rightarrow M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) = (\alpha \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots \\ \oplus (\beta \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_0)))$$

$$= (\alpha x_n t^n + \alpha x_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha x_0) \\ \oplus (\beta x_n t^n + \beta x_{n-1} t^{n-1} + \dots + \beta x_0)$$

$$= (\alpha x_n + \beta x_n) t^n + (\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-1}) t^{n-1} + \dots + \\ (\alpha x_0 + \beta x_0)$$

utilizando a definição de adição

Verificando distributividade \rightarrow M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) = (\alpha \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots \\ \oplus (\beta \otimes (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_0)))$$

$$= (\alpha x_n t^n + \alpha x_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha x_0) \\ \oplus (\beta x_n t^n + \beta x_{n-1} t^{n-1} + \dots + \beta x_0)$$

$$= (\alpha x_n + \beta x_n) t^n + (\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-1}) t^{n-1} + \dots + \\ (\alpha x_0 + \beta x_0)$$

$$= (\alpha + \beta) x_n t^n + (\alpha + \beta) x_{n-1} t^{n-1} + \dots + (\alpha + \beta) x_0$$

propriedade de distributividade dos número reais.

Verificando distributividade \rightarrow M5

Observamos que se obteve os mesmos resultados trabalhando em cada lado. Assim

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$$

para todo escalar $\alpha, \beta \in K$,

e para qualquer elemento $x \in P_n$.

Portanto, a propriedade M5 é satisfeita.

O aluno é convidado a verificar as propriedades de A1 até A5 e de M1 até M4.

Verificará que (P_n, \oplus, \otimes) é **espaço vetorial**.

Principais Exemplos

2. O conjunto de n-uplas (n-componentes)

$$K^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) / a_i \in K\}$$

Nota: $K = \mathbb{R}$ (Reais) ou $K = \mathbb{C}$ (Complexos).

Adição: Sejam $h, k \in K^n$

$$\Rightarrow h \oplus k = (h_1 + k_1, h_2 + k_2, \dots, h_{n-1} + k_{n-1}, h_n + k_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in R, k \in K^n$

$$\Rightarrow \alpha \otimes k = (\alpha k_1, \alpha k_2, \dots, \alpha k_{n-1}, \alpha k_n)$$

Assim os n-uplas são **vetores**.

Principais exemplos

3. $M_{m \times n}$ o conjunto de matrizes de m linhas e n colunas, (ordem fixa $m \times n$) com a adição usual:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & \cdots & x_{1n} + y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} + y_{m1} & \cdots & x_{mn} + y_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Principais exemplos

e com a multiplicação vezes escalar usual:

$$\alpha \otimes x = \alpha \otimes \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \dots & \alpha x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha x_{m1} & \dots & \alpha x_{mn} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial.

Assim as matrizes de uma mesma ordem são **vetores**.