ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista de revisão - Gabarito.

1. Calcule os produtos AB e BA, sempre que possível

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

   Nota: Ao comutar as matrizes nas multiplicações obtemos resultados diferentes. Assim, a multiplicação de matrizes não é necessariamente comutativa. No exemplo $AB \neq BA$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

   Nota: Observar como um produto de duas matrizes não zero tem como produto a matriz nula. Em números reais isso não acontece.

2. Determine $AB - BA$

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB - BA = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -6 \\ 7 & 12 & 8 \\ -15 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB - BA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n. Para determinar A^n, é bom calcular pelo menos A^2, A^3 e A^4. Se for necessário, calcule outras potências.
   No exemplo: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   Como podemos confirmar a entrada superior direita é a soma das entradas da segunda coluna da potência anterior, logo

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Represente as equações em matrizes

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & |10 \\ 2 & 7 & 9 & |30 \\ 1 & 5 & \alpha & |\beta \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & |2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & |2 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 & |1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & |2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | -6\beta \\ \alpha & 3 & 2 & | \ 2\beta \\ 3 & 1 & (\alpha+1) & | \ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & |10 \\ 2 & 7 & -2 & |10 \\ 1 & 5 & \alpha & |\,\beta \end{bmatrix}$

5. Multiplicação de matrizes
   As perguntas pedem informação por sexo e consumo.
   Observar que uma matriz tem informação dos sexos e a outra do consumo. Aparentemente, precisaremos multiplicar ambas, mas vamos verificar como é o relacionamento entre essas matrizes.
   Primeiro: pode multiplicar AB, e nesse caso as colunas de A (adulto, criança) não batem com as linhas de B.
   Segundo: pode multiplicar BA, sim, pois as duas tem 2×2, mas olhando o significado das linhas de A e as colunas de B, são informações diferentes.
   Realizando o produto AB, não temos as informações solicitadas. Observar que a informação das colunas de A não é coerente com as informações das linhas de B, podemos multiplicar? Se puder, o que representa o resultado?:

$$AB = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{array}{c} homem \\ mulher \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{array}{c} proteina \\ gordura \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \end{array} = ???$$

   Realizando o produto AB^t, (agora as colunas de A e as linhas de B^t se relacionam corretamente), assim temos as informações solicitadas. Observar a multiplicação das matrizes:

$$AB^t = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{array}{c} homem \\ mulher \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} proteina & gordura \end{array} \\ \begin{array}{c} adulto \\ criança \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} proteina & gordura \end{array} \\ \begin{array}{c} homem \\ mulher \end{array} & \begin{bmatrix} 2800 & 4000 \\ 4000 & 6000 \end{bmatrix} \end{array}$$

   (a) Quantos gramas de proteína são consumidos diariamente por homens no projeto?
   $2800g$

   (b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente por mulheres no projeto?
   $6000g$

6. Observar que para obter as médias precisa-se somar as informações das duas fábricas e cada soma dividir por 2(multiplicar vezes 0.5).
   Observar:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} gor & cálc & fós \end{array} \\ \begin{array}{c} Mi \\ Alg \\ Calc \end{array} & \begin{bmatrix} 4.2 & 1.0 & 1.6 \\ 6.5 & 0.2 & 0.6 \\ 2.3 & 1.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \text{ e } B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Mi & Alg & Cal \end{array} \\ \begin{array}{c} gor \\ cálc \\ fós \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 1.2 & 1.2 \\ 4 & 0.35 & 0.2 \\ 2.7 & 0.7 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array}$$

   onde: $Mi = Milho$, $Alg = Algodão$, $Calc = Calcário$, $gor = gordura$, $cálc = cálcio$ e $fós = fósforo$.
   Mas, como as informações da fábrica B, estão trocadas em linhas e colunas quando comparadas com as informações da fábrica A, basta aplicar a transposta. Por exemplo aplicando tranposta na matriz B, ter-se-á a mesma informação da matriz A, sendo ingredientes nas linhas e nutrientes nas colunas. Agora tem sentido somar informações com o mesmo significado:

$$B^t = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} gor & cálc & fós \end{array} \\ \begin{array}{c} Mi \\ Alg \\ Calc \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & \frac{27}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{20} & \frac{7}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Matriz Médias} = \frac{1}{2}\left(A + B^t\right) = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & \frac{5}{2} & \frac{43}{20} \\ \frac{77}{20} & \frac{11}{40} & \frac{13}{20} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{10} & \frac{3}{40} \end{bmatrix}.$$