

ECONOMIC BREAKEVEN POINT AND INDIVIDUAL QUANTITIES OF PRODUCTS AND SERVICES

Abstract ID: XXXXXXXXX

Brunstein, L.¹, Costa, R. P.²

Production Engineering Department, Polytechnic School of the University of São Paulo,
Rua da Praça do Relógio 109, São Paulo, SP, Brazil

¹leo.brunstein@usp.br, ²rpcosta@usp.br

Abstract

A study on the relation of the economic breakeven point with its respective individual quantities of products and services is presented. The economic breakeven point in operation systems, for a given span of time, occurs at the moment its sales generate a total contribution margin equal to its fixed costs. Innumerable solutions are known to exist when these quantities are sought for "the future", as they result from a single equation with several unknown quantities. However, for past periods, the values may be identified by analyzing the sales records. The quantities of each product and service that provided the system with breakeven in the past were effectively individual breakeven quantities at that moment, denominated "breakeven dynamic quantities" herein, for depending on the temporary behavior of sales. Since there are past measurable values, future breakeven quantities can be estimated by means of statistic models. Considering some assumptions and the sales possibilities for a future period, given the forecasts and variabilities estimated for these sales per product and service, the data for analysis are reduced and the combinations for the breakeven of the system are identified. Among these combinations, the ones presenting smaller occurrence probability can be eliminated; those with greater probability can be considered for analysis and dynamically followed in the period in question, as sales occur, allowing the elimination of other combinations which will not be attained until the breakeven combination of that period is reached. The sales forecasting and projections of the variability in sales combined with the knowledge of the probable breakeven dynamic quantities favor the analyses for decision-making, such as the ones involving sales promotions and price negotiations.

Keywords:

Breakeven Analysis, Cost-Volume-Profit, Decision-Making.

1 PONTO DE EQUILÍBRIO

No contexto da microeconomia, o conceito de equilíbrio (*breakeven*) surgiu no século XIX e desde então tem sido pesquisado, aplicado em diversos negócios e para as mais diversas finalidades [w]. Na Análise Custo-Volume-Lucro (ACVL), o ponto de equilíbrio econômico ocorre quando as vendas geram uma margem de contribuição total igual ao valor dos seus custos fixos, o que equivale ao resultado operacional do sistema de operações ser nulo [a][b][r][s]. A Margem de Contribuição (MC) de produtos e serviços pelo método do Custeio Variável ou Custeio Direto [1], é a diferença entre as receitas líquidas das vendas (obtidas após a dedução das respectivas despesas de vendas) e os seus custos variáveis [f].

O cálculo das Quantidades de equilíbrio (Qe) em um SO com múltiplos produtos e serviços que apresentam vendas independentes entre si, resulta em infinitas soluções [b], pois a equação que calcula estas quantidades é única e, nestes casos, contém mais de uma incógnita; portanto, matematicamente, sempre haverá mais de uma solução para o problema. Neste contexto, modelos estatísticos tem sido aplicados para o cálculo das Qe individuais [r][s]. A proposta deste trabalho é contribuir na pesquisa por valores acurados para as quantidades de equilíbrio de produtos e serviços em sistemas de operações para períodos futuros, apresentando um estudo sobre a relação do Ponto de Equilíbrio (PE) econômico e as quantidades de equilíbrio relativas ao momento em que ocorrem.

A Seção 2 trata das questões relativas ao comportamento temporal das vendas e sua relação com o equilíbrio econômico do SO; a Seção 3 trata das possibilidades de

equilíbrio diante das combinações de vendas consideradas, da definição do "momento de equilíbrio" e de critérios que podem descartar um número significativo de combinações reduzindo o número das que serão analisadas; a Seção 4 trata da metodologia proposta para análise e identificação das Qe individuais de produtos e serviços de qualquer SO para períodos futuros; e a Seção 5 discute os resultados.

2 VENDAS NO PERÍODO

2.1 Comportamento temporal das vendas

Um sistema de operações pode vender somente produtos, serviços ou ambos, por exemplo, uma manufatura de calçados (produtos), uma agência de recrutamento de mão de obra (serviços) e uma empresa de segurança que faz monitoramento, mas também vende e instala os aparelhos para este fim (produtos e serviços). O estudo aplica-se a todos os casos, porém, adotou-se o termo "produto" para qualquer item de venda (incluindo serviços), a fim de facilitar o entendimento do que é apresentado.

Para um determinado período de análise, as vendas dos produtos em um sistema de operações podem apresentar características distintas e complexas. Ao se analisar o comportamento temporal das vendas dos produtos em um período, pode-se verificar quão caóticas ou regulares são as vendas de cada um; por exemplo, a Figura 1 apresenta casos fictícios das vendas de quatro produtos em um mesmo período, onde os dois primeiros apresentam sazonalidades distintas, o terceiro vendas pontuais ou eventuais e o quarto vendas crescentes.

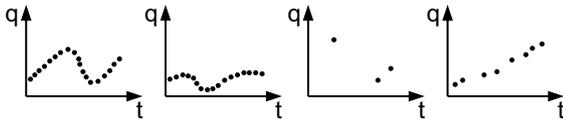


Figura 1: Vendas de quatro produtos num mesmo período

Por meio de bancos de dados informatizados existentes nos negócios atuais, é razoável que se possa obter as vendas diárias produto a produto em um período, permitindo a análise detalhada do comportamento temporal das vendas.

2.2 Ponto de equilíbrio e quantidade de equilíbrio

Para as análises serão admitidos os pressupostos comumente aplicados na análise Custo-Volume-Lucro [1][2][3], que incluem a não variação de preços e custos para o período de análise. O ponto de equilíbrio de um sistema de operações ocorre quando seus ganhos são iguais a seus custos, economicamente, quando a Margem de Contribuição Total (MCT) é igual ao total dos Custos Fixos (CF) em um período. A quantidade de equilíbrio de um ou mais produtos, equivale às quantidades que multiplicadas pelas respectivas Margens de Contribuição unitárias (MCu), geram o total de margem equivalente ao total dos custos fixos [1]. Analogamente, no ponto de equilíbrio do SO as quantidades que o promovem são exatamente as quantidades de equilíbrio de cada produto para aquele momento do período.

$$\sum_{i=1}^n Qe_i \times MCu_i = CF \quad (1)$$

Por meio da Análise Custo-Volume-Lucro [1], a Equação 1 mostra o cálculo do momento que o PE é gerado, quando a margem de contribuição total do SO é igual aos custos fixos (CF); neste caso, as quantidades serão as próprias quantidades de equilíbrio (Qe), com: i sendo o índice de cada produto, n o número de produtos do sistema de operações e MCu a margem de contribuição unitária de cada um; observa-se que, se n for maior do que um (dois produtos ou mais), serão n variáveis para uma única equação, o que leva a infinitas soluções.

2.3 Quantidades dinâmicas de equilíbrio

Como se sabe, são infinitas as combinações de vendas que podem levar um SO multiprodutor ao PE em um período; no entanto, analisando períodos passados e o comportamento temporal de suas vendas, pode-se mensurar em que momento o SO atingiu o PE verificando quais foram as quantidades de cada produto que o promoveram. Esta é uma das infinitas soluções de equilíbrio, mas ocorreu na prática e de forma mensurável, sendo única e determinada pelo comportamento temporal das vendas, portanto, sendo definidas dinamicamente durante o período em questão. Estas quantidades são denominadas neste trabalho por “Quantidades Dinâmicas de equilíbrio” (QDe).

$$Qe = \frac{CF}{MCu} \quad (2)$$

Devido ao cálculo da Qe para um SO de um único produto (Equação 2) sempre resultar em um valor constante, pois os valores dos CF e da MCu para o cálculo conforme os pressupostos também são constantes, tem-se a impressão que esta quantidade seja estática em qualquer caso, ou seja, para qualquer volume de vendas ela sempre será a mesma e, assim, em sistemas multiprodutores o mesmo deveria ocorrer. De fato, ao se considerar um único produto, isto ocorre, não por ser a quantidade de equilíbrio estática, mas por se realizar um cálculo para uma variável

com base em outras duas que são constantes e que não apresentam qualquer relação com as quantidades vendidas. Porém, quando se analisa um SO com mais de um produto as Qe do período são dinâmicas, pois não existirão somente variáveis constantes (CF e MCu), mas também as variáveis das Qe que apresentam as infinitas soluções nestes casos, por se tratar de equação única com mais de uma incógnita (Equação 1).

Sempre que existir o PE ou se prever que ele ocorrerá em determinado momento das vendas em um período, este “momento” é mensurável dentro do período de análise, ainda que de forma aproximada em alguns casos quando o RO do sistema não atinge exatamente o valor zero, superando-o. Assim, as quantidades das vendas que no momento observado promoveram ou promoverão o PE do SO, são exatamente as Quantidades Dinâmicas de equilíbrio (QDe) individuais de cada produto; elas são dinâmicas por dependerem do comportamento temporal das vendas no período.

No passado, com base em históricos de vendas ou com o auxílio de bancos de dados, por exemplo, ao se acompanhar as vendas diárias de todos os produtos em um mês, é possível calcular diariamente quando o sistema atingiu ou superou o PE, ou seja, em qual dia o seu RO igualou-se a zero ou o ultrapassou (gerou lucro). No presente, o PE pode ter ocorrido ou ainda poderá ocorrer, caso o mês vigente ainda não tenha encerrado. Finalmente, para o futuro, se estão previstas vendas que se igualem aos CF ou o superem, o SO também apresentará o PE. Nas três condições, seja no passado, presente ou futuro, existindo o PE (RO nulo) do SO em um período, basta analisar dia após dia em qual deles ocorreu ou ocorrerá para obter as QDe, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1: Possibilidades de mensuração das QDe

RO	Passado (histórico)	Presente (momento atual)	Futuro (previsão)
≥ 0	mensuráveis	mensuráveis	mensuráveis
< 0	PE não existiu	PE poderá existir	PE inexistente

Assim, outro pressuposto adotado é que os SO tenham ou possam ter o PE atingido ou superado em algum momento do período, ou seja, que existam RO maiores ou iguais a zero no período de análise; isto permitirá a aplicação da metodologia proposta.

3 QUANTIDADES DE EQUILÍBRIO

Uma vez que existem infinitas soluções para as quantidades de equilíbrio em sistemas de operações multiprodutores, é necessário encontrar formas de selecionar um número finito e suficiente de soluções que viabilizem, na prática, a análise das quantidades de equilíbrio para a tomada de decisões.

3.1 Possibilidades de equilíbrio

Para identificar o PE de um SO em um período, o RO deve ser nulo, mas se for positivo (lucro), o PE existe, porém foi superado. A Equação 3 mostra o cálculo do RO de um SO em um período com base na ACVL, que é a soma das MC (vendas pelas MCu) de cada item de venda menos os Custos Fixos (CF); o PE ocorre se o RO for igual a zero.

$$RO = \sum_{i=1}^n Q_i \times MCu_i - CF \quad (3)$$

Em SO que apresentem somente variáveis discretas nas unidades de venda, como nas indústrias de brinquedos, distribuidoras de peças automotivas ou livrarias, é possível simular todas as possibilidades das vendas de um período

e se apurar as combinações que geram ou gerariam o PE (existindo recursos computacionais suficientes para tanto). Por exemplo, um produto P_1 tem MCu_1 de \$1,00/u e P_2 tem MCu_2 de \$2,00/u; se o CF do SO é de \$6,00 então são quatro as soluções de equilíbrio (Tabela 2), em quatro sequências (S) de combinações das quantidades de venda (Q_1 e Q_2 , que são as QDe por gerarem o PE do SO no período) onde as MC_1 e MC_2 somadas dão a MC total (MCT), que subtraindo os CF geram os RO nulos (PE).

Tabela 2: Combinações de vendas que geram o PE do SO

S	Q_1 (u)	MCu_1 (\$)	MC_1 (\$)	Q_2 (u)	MCu_2 (\$)	MC_2 (\$)	MCT (\$)	CF (\$)	RO (\$)
1.	6	1,00	6,00	0	2,00	0,00	6,00	-6,00	0,00
2.	4	1,00	4,00	1	2,00	2,00	6,00	-6,00	0,00
3.	2	1,00	2,00	2	2,00	4,00	6,00	-6,00	0,00
4.	0	1,00	0,00	3	2,00	6,00	6,00	-6,00	0,00

Na Tabela 2, das quatro combinações algumas poderiam ser descartadas; por exemplo, se historicamente sempre ocorrem vendas para os dois produtos, as sequências 1 e 4 tem grande probabilidade de não ocorrerem na prática (haverá vendas para ambos); restariam as sequências 2 e 3, que analisando as previsões de vendas, pode-se calcular a probabilidade de ocorrência de cada uma delas, possibilitando a escolha daquela que apresentar maior probabilidade; assim, caso seja a da sequência 2, as quantidades de equilíbrio para este SO seriam 4 unidades de P_1 e 1 unidade de P_2 . Neste exemplo em particular, as combinações de equilíbrio foram fáceis de obter, em muitos casos o problema é complexo e tratar as combinações desta forma pode ser inviável.

3.2 Momento de equilíbrio

Se fossem combinadas todas as quantidades de vendas que um SO possa gerar com seus produtos durante um período, ao se apurar os RO de cada combinação, o PE poderia ser encontrado naquelas que este valor se igualasse a zero. Em SO de produtos que apresentam somente unidades discretas para as vendas, esta seria uma possibilidade viável, pois seriam geradas finitas combinações, desde que consideradas as capacidades máximas de produção e vendas. No entanto, haverá casos onde existirão unidades de vendas a valores contínuos, como horas, quilos, litros e metros que poderiam inviabilizar a geração de todos os cálculos possíveis, pois seriam infinitos. Uma solução que não abrange todas estas possibilidades é dar tratamento de variáveis discretas às variáveis contínuas, uma vez que isto geraria sempre finitas combinações de vendas. Por exemplo, para a venda de um produto em litros, seriam consideradas as vendas de 1 litro, 2 litros e 3 litros, e desconsideradas as vendas fracionadas como 1/2 litro, por exemplo. Supondo que a diferença entre duas unidades inteiras seja pouco significativa, como vender 1/2 litro a mais de combustível em um posto de combustíveis, este tratamento passa a viabilizar a geração de finitas combinações de venda para qualquer SO, desde que consideradas as capacidades máximas de produção e vendas no período.

Na análise dos RO das possibilidades de equilíbrio e somente de unidades discretas para as vendas, a situação de RO nulo (atingir exatamente o PE) pode não ocorrer diante dos valores das quantidades de vendas consideradas, ou pode ocorrer sem contemplar a melhor solução ou ainda gerar soluções inviáveis na prática. Deste modo, pode-se admitir RO próximos ao equilíbrio como “geradores do equilíbrio econômico do sistema”, ou seja, incluir também as combinações de vendas com RO diferentes de zero (positivos ou negativos e positivos) até

certo valor; assim, podendo obter combinações acuradas e viáveis que seriam desconsideradas inicialmente.

Portanto, é necessário definir em quais RO indicarão as combinações “geradoras do equilíbrio econômico do sistema”, combinações estas que não necessariamente levam o SO ao PE (RO nulo). Por exemplo, ao se considerar alguns valores esperados para as quantidades vendidas de dois produtos (análise menos ampla) para um período futuro, pode-se tabelar as possibilidades de vendas pelas combinações destes valores sem repetição, e calcular para cada uma o resultado operacional observando a ocorrência do PE (RO igual a zero) ou também valores próximos a ele. A Tabela 3 apresenta um exemplo de um SO que gera quatro sequências (S) de combinações das vendas dos produtos (P_1 e P_2) que tem suas vendas esperadas da seguinte forma: 2 ou 6 unidades (Q_1) para P_1 com MCu_1 de \$0,70/u, e 3 ou 4 unidades (Q_2) para P_2 com MCu_2 de \$1,20/u; ao se calcular MC_1 e MC_2 , somá-las para obter a MC total (MCT) e descontar os CF do período, apura-se os RO.

Tabela 3: Resultado operacional das quatro combinações

S	Q_1 (u)	MCu_1 (\$)	MC_1 (\$)	Q_2 (u)	MCu_2 (\$)	MC_2 (\$)	MCT (\$)	CF (\$)	RO (\$)
1.	2	0,70	1,40	3	1,20	3,60	5,00	-6,70	-1,70
2.	6	0,70	4,20	3	1,20	3,60	7,80	-6,70	1,10
3.	2	0,70	1,40	4	1,20	4,80	6,20	-6,70	-0,50
4.	6	0,70	4,20	4	1,20	4,80	9,00	-6,70	2,30

Observa-se na Tabela 3 que nenhuma combinação gerou RO nulo, as sequências 1 e 3 geraram RO negativos (prejuízo) e as sequências 2 e 4 RO positivos (lucro), sendo a sequência 2 a que apresenta RO positivo mais próximo de zero; por este critério ela é considerada a melhor combinação entre todas, determinando as quantidades de equilíbrio: 6 unidades de P_1 e 3 unidades de P_2 . No entanto, a sequência 3 tem a combinação de vendas que mais se aproxima do PE (RO nulo) em valor absoluto entre todas, \$0,50; assim, se este for o critério de escolha, as quantidades de equilíbrio dos produtos, são: 2 unidades de P_1 e 4 unidades de P_2 . De outro modo, se a diferença de até \$2,00 do RO em valores absolutos fosse tomada como parâmetro para selecionar as combinações de equilíbrio, a sequência 4 seria descartada (RO maior do que \$2,00) e as sequências 1, 2 e 3 poderiam ter as vendas analisadas probabilisticamente para decidir com qual delas trabalhar; mas, supondo que devido a características de mercado o produto P_1 venda mais do que P_2 , as sequências 1 e 3 poderiam ser descartadas, restando somente a 2 determinando, então, as Qe: 6 unidades de P_1 e 3 unidades de P_2 . Suposições como estas devem ser feitas uma vez que se está trabalhando com “possibilidades de equilíbrio” que podem não refletir corretamente certas características do SO analisado; porém, com recursos computacionais adequados e a definição de critérios de descarte, as combinações viáveis podem ser identificadas com certa facilidade.

Então, para a metodologia proposta, uma primeira definição deve ser feita para a seleção das combinações de vendas consideradas como “geradoras do equilíbrio econômico do sistema”, a definição do que denominou-se por “momento de equilíbrio” (v), por depender do RO (φ) que, por sua vez, depende do comportamento temporal das vendas; são três as opções sugeridas:

1. RO nulo (PE): $\varphi = 0$, $v = \varphi$, com $\varphi, v \in \mathbf{R}$.
2. RO positivo: $0 \leq v \leq \varphi$, com $v \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{R}^+$.
3. RO absoluto: $0 \leq v \leq |\varphi|$, com $\varphi, v \in \mathbf{R}$.

Definido o “momento de equilíbrio”, o número de combinações a serem analisadas poderá reduzir significativamente, e outras combinações também, ao se aplicar critérios para o descarte das combinações que não reflitam certas características do SO; como, por exemplo, proporcionalidades médias observadas entre o volume de venda de alguns produtos, históricos de venda que indiquem quais produtos vendam mais do que outros, quantidades mínimas e máximas médias observadas de alguns produtos e *mix* de produção viáveis.

Quanto às combinações de vendas restantes, analisando probabilisticamente as chances de ocorrência, outras poderão ser descartadas, possibilitando a seleção de uma combinação entre as remanescentes que determine as quantidades de equilíbrio do SO, permitindo enfim, as análises para a tomada de decisões.

3.3 Seleção de combinações de vendas para análise

Os recursos computacionais disponíveis atualmente apresentam alta capacidade de processamento e armazenamento de dados que permitem a aplicação da metodologia para todas as combinações de vendas de qualquer SO (considerando quantidades discretas), porém análises de menor amplitude podem ser feitas quando forem adequadas ou havendo limitações de recursos.

Seq.	Vendas	Combinações	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
1			1	1	1	1	1
2	1 produto	2 ¹ = 2	2	1	1	1	1
3			1	2	1	1	1
4	2 produtos	2 ² = 4	2	2	1	1	1
5			1	1	2	1	1
6			2	1	2	1	1
7			1	2	2	1	1
8	3 produtos	2 ³ = 8	2	2	2	1	1
9			1	1	1	2	1
10			2	1	1	2	1
11			1	2	1	2	1
12			2	2	1	2	1
13			1	1	2	2	1
14			2	1	2	2	1
15			1	2	2	2	1
16	4 produtos	2 ⁴ = 16	2	2	2	2	1
17			1	1	1	1	2
18			2	1	1	1	2
19			1	2	1	1	2
20			2	2	1	1	2
21			1	1	2	1	2
22			2	1	2	1	2
23			1	2	2	1	2
24			2	2	2	1	2
25			1	1	1	2	2
26			2	1	1	2	2
27			1	2	1	2	2
28			2	2	1	2	2
29			1	1	2	2	2
30			2	1	2	2	2
31			1	2	2	2	2
32	5 produtos	2 ⁵ = 32	2	2	2	2	2

Figura 3: Combinações das vendas de cinco produtos

A priori, não há a necessidade de se procurar as Q_e para todas as possibilidades de vendas, uma vez que os produtos normalmente comercializados costumam apresentar quantidades médias mínimas e médias máximas de venda; ou seja, não é típico que vendam volumes abaixo da média mínima e nem acima da média máxima. Desta forma, mesmo para uma análise completa das QDe, elas devem refletir o que é possível de se verificar na prática, o que reduz ainda mais as combinações a serem geradas e analisadas.

A Figura 3 apresenta um quadro com o exemplo de uma análise menos ampla das combinações possíveis, sem repetição, de grupos de quantidades discretas de vendas para até cinco produtos (P₁ a P₅, com as quantidades vendidas nas colunas Q₁ a Q₅) com variação de duas unidades inteiras cada. Porém a metodologia proposta pode ser aplicada para qualquer amplitude que se possa viabilizar, assim, a estrutura da Figura 3 pode ser usada também para outros valores com outras variações e para distintas variações. Por exemplo, se P₁ tivesse duas quantidades de vendas consideradas, 100 e 250 unidades, os valores 1 e 2 deveriam ser substituídos por 100 e 250, respectivamente; e se P₂ tem três valores esperados, seriam combinações de venda 1, 2 e 3, que deveriam ser substituídas, por exemplo, por valores que poderiam inclusive serem contínuos, como 5,3 Kg, 7,36 Kg e 9,8 Kg, respectivamente. Quadros similares podem ser gerados para mais variações e diferentes variações por produto, usando seus valores esperados.

Observa-se cinco grupos na Figura 3 na coluna *Vendas*, determinados pelo número de linhas geradas pela quantidade de produtos considerados para uma variação de duas unidades inteiras cada, sendo 1 ou 2 unidades de P₁ na coluna Q₁ gerando as sequências de vendas (S) 1 e 2 com Q₁=1 e Q₁=2, respectivamente; e 1 ou 2 unidades de P₁ e P₂ combinadas sem repetição (respectivamente nas colunas Q₁ e Q₂) gerando as sequências de vendas 1, 2, 3 e 4 com Q₁=1 e Q₂=1, Q₁=2 e Q₂=1, Q₁=1 e Q₂=2, e Q₁=2 e Q₂=2, respectivamente; e assim sucessivamente. Os retângulos compreendem estas combinações por grupo, por exemplo, para três produtos deve-se analisar as combinações contidas no retângulo formado pelas colunas Q₁ à Q₃ e as linhas das sequências 1 a 8. A coluna *combinações* mostra a quantidade de combinações conforme a variação em unidades e a quantidade de produtos considerados (Equação 4). O cálculo do número de combinações apresentado na Figura 3 é dado pela Equação 4, onde α é o número de combinações de vendas resultante, v o número de variações distintas existentes ou consideradas para o SO, ρ a quantidade de itens de venda (produtos e serviços) de uma mesma variação (em número de unidades), j o índice para cada variação distinta e para os itens de venda de uma mesma variação e k a quantidade destas variações.

$$\alpha = \prod_{j=1}^k v_j^{\rho_j} \quad (4)$$

Por exemplo, 5 produtos de um SO não terão variação nas vendas, deve-se desconsiderá-los do cálculo ou considerar a variação de 1 unidade (aplicada neste exemplo), 3 produtos terão variações nas vendas de 4 unidades cada, 4 produtos terão variações de 2 unidades cada e 1 produto terá variação de 5 unidades; portanto, k é igual a 4, pois são quatro valores distintos de variações (1, 4, 2 e 5, respectivamente); aplicando estes valores na Equação 4, chega-se a 5.120 combinações de vendas:

$$\alpha = \prod_{j=1}^4 v_j^{\rho_j} = 1^5 \times 4^3 \times 2^4 \times 5^1 = 5.120$$

Ainda neste exemplo, se estes valores não representam todas as combinações de vendas possíveis deste SO, esta análise é de menor amplitude; supondo que cada grupo tenha as variações iguais à sua capacidade máxima de produção mais um (iniciando do zero, “sem vendas”), respectivamente 1.010 unidades, 859 unidades, 975 unidades e 500 unidades, a análise completa terá mais de um quatrilhão de combinações de venda:

$$\alpha = \prod_{j=1}^4 v_j^{p_j} = 1.010^5 \times 859^3 \times 975^4 \times 500^1 = 1,05 E + 15$$

A metodologia proposta tem como base as possíveis quantidades de venda de todos os produtos sempre em unidades discretas e considerando as capacidades máximas de produção e vendas de cada um. Por exemplo, para uma aplicação completa em um SO de dois produtos onde o primeiro produza e venda no máximo 80 unidades e o segundo 50, o primeiro iniciaria do valor zero (mínimo) e a variação seria de 81 unidades vendidas (de 0 a 80) o que resultaria no máximo em 80 unidades vendidas, enquanto o segundo também partiria de zero, teria variação de 51 unidades finalizando em 50 unidades vendidas, sendo que estes valores finais são exatamente suas respectivas capacidades de produção e venda. Ainda neste exemplo, se o primeiro produto tem uma venda média mínima de 40 unidades e venda média máxima de 65 unidades, o número de combinações para análise reduziria se fosse considerada a variação de 26 unidades (de 40 a 65 unidades) e não as 81 iniciais.

4 METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO DAS Qe

A metodologia para se analisar e identificar as Qe individuais de um SO em um período, tem 9 etapas, conforme é apresentado no diagrama da Figura 4.

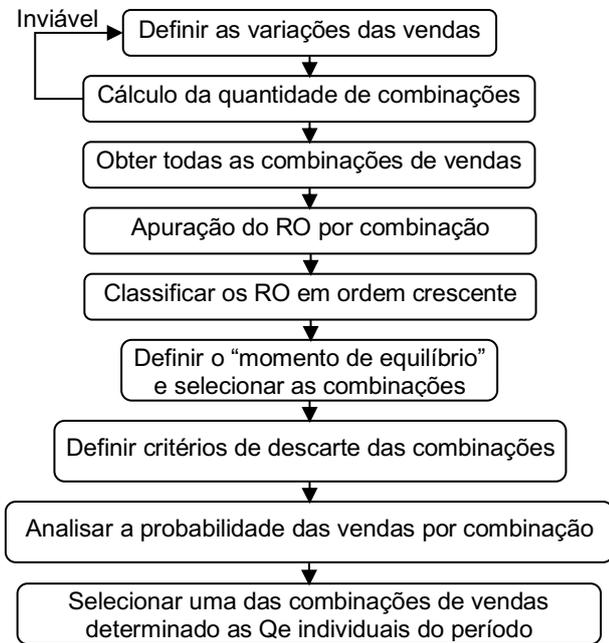


Figura 4: Diagrama das etapas da metodologia proposta

Por exemplo, em um SO com CF de \$54 no período e oito produtos (P₁ a P₈), com variações de duas unidades por produto, serão 256 combinações de vendas (2⁸) – não apresentadas neste trabalho, mas obtidas exatamente como as combinações de duas variações por produto da Figura 3 (mesmo quadro, mas para 8 produtos e 256 linhas) –, se respectivamente a MC_u dos produtos são de \$1/u, \$2/u, \$3/u, \$4/u, \$5/u, \$6/u, \$7/u e \$8/u, e se foi definido que o “momento de equilíbrio” é o “RO nulo”,

então, das 256 combinações de vendas obtêm-se catorze combinações de RO iguais a zero. A Tabela 4 mostra as catorze seqüências (S) destas combinações que geraram exatamente o PE, pois as correspondentes MC resultantes de cada combinação (Q_i pelas MC_{u*i*}), somadas, resultaram em uma MC total de \$54,00 que se iguala ao valor dos CF do período, portanto, gerando RO nulo (PE).

Tabela 4: Quantidades e margens que geraram o PE

S	Q ₁	MC ₁	Q ₂	MC ₂	Q ₃	MC ₃	Q ₄	MC ₄	Q ₅	MC ₅	Q ₆	MC ₆	Q ₇	MC ₇	Q ₈	MC ₈
(u)	(\$)	(u)	(\$)	(u)	(\$)	(u)	(\$)	(u)	(\$)	(u)	(\$)	(u)	(\$)	(u)	(\$)	
60.	2	2	2	4	1	3	2	8	2	10	2	12	1	7	1	8
61.	1	1	1	2	2	6	2	8	2	10	2	12	1	7	1	8
88.	2	2	2	4	2	6	1	4	2	10	1	6	2	14	1	8
91.	1	1	2	4	1	3	2	8	2	10	1	6	2	14	1	8
103.	1	1	2	4	2	6	1	4	1	5	2	12	2	14	1	8
106.	2	2	1	2	1	3	2	8	1	5	2	12	2	14	1	8
113.	1	1	1	2	1	3	1	4	2	10	2	12	2	14	1	8
144.	2	2	2	4	2	6	2	8	1	5	1	6	1	7	2	16
151.	1	1	2	4	2	6	1	4	2	10	1	6	1	7	2	16
154.	2	2	1	2	1	3	2	8	2	10	1	6	1	7	2	16
166.	2	2	1	2	2	6	1	4	1	5	2	12	1	7	2	16
169.	1	1	1	2	1	3	2	8	1	5	2	12	1	7	2	16
196.	2	2	2	4	1	3	1	4	1	5	1	6	2	14	2	16
197.	1	1	1	2	2	6	1	4	1	5	1	6	2	14	2	16

A Figura 5 mostra o gráfico dos RO ordenados a valores crescentes das 256 combinações de vendas (ordenada C) do exemplo que resultam em degraus dispostos de forma similar a uma curva de 3º grau, a referência de RO nulo (RO=0) e as faixas de exemplos de três opções de “momento de equilíbrio”: “PE”, “RO+” e “|RO|”. Os RO interceptam RO=0 na faixa “PE” de RO iguais a \$0 (RO nulo) e esta faixa é composta exatamente pelas 14 combinações da Tabela 4; a faixa de RO positivo “RO+” para os RO de \$0 até \$2 e uma faixa para RO absoluto “|RO|” para os RO de -\$2 até \$2.

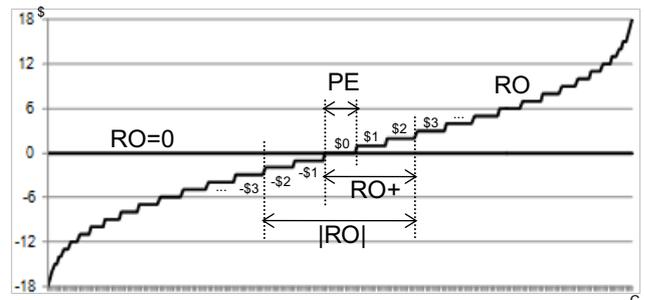


Figura 5: Ordem crescente dos RO das 256 combinações. Em todo SO, ao se classificar em ordem crescente de valor os RO obtidos por todas as combinações de vendas, um gráfico como o da Figura 5 será obtido.

Uma vez com as catorze combinações de vendas selecionadas do exemplo, definidos os critérios que identifiquem ocorrências improváveis ou inviáveis para o SO (ver tópicos 3.1 e 3.2) como, por exemplo, os produtos P₁, P₂ e P₃ são complementares e normalmente vendidos conjuntamente, então somente as combinações 88, 113, 144 e 169 apresentam vendas iguais entre os três e as demais combinações são descartadas; se P₅ normalmente vende mais do que P₄, ficam restando somente as combinações 88 e 113, e se a combinação 88 tem 45% de chance de ocorrer e a 113 18%, a combinação 88 é selecionada para determinar as Qe individuais de cada produto (quantidades da seqüência 88 da Tabela 4).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram apresentados os estudos sobre o ponto de equilíbrio econômico de sistemas de operações e sua relação com as quantidades individuais de vendas de produtos e serviços em determinado período de tempo.

Denominou-se “quantidades dinâmicas de equilíbrio” as quantidades de vendas que, quando acompanhadas venda após venda dentro de um período, geram o ponto de equilíbrio do sistema de operações em determinado momento; sendo dinâmicas por dependerem do comportamento temporal das vendas.

Foram apresentadas as possibilidades de equilíbrio em sistemas de operações multiprodutores diante das combinações de vendas de seus produtos e serviços, e considerando todas as variáveis de vendas em unidades discretas; o que viabiliza o estudo por sempre gerar finitas combinações, desde que consideradas as capacidades máximas de produção e vendas.

Foi denominado “momento de equilíbrio” o primeiro critério para a seleção das combinações de vendas que geram resultado operacional nulo (o ponto de equilíbrio), nulo ou positivo até um certo valor, ou ainda, negativo, nulo ou positivo até um certo valor em valor absoluto.

Foram apresentados exemplos numéricos e sugestões de critérios de descarte para as combinações de vendas selecionadas pelo “momento de equilíbrio” adotado, de forma a contemplarem certas características do sistema de operações permitindo eliminar combinações inviáveis ou improváveis de ocorrer; o que pode reduzir significativamente a quantidade restante a ser analisada.

Foi apresentada a metodologia proposta com um exemplo de aplicação em um sistema de operações fictício de oito produtos. Foi gerado um gráfico dos resultados operacionais ordenados em ordem de valores crescentes de todas as combinações de vendas do exemplo, 256 neste caso, que resultou em uma distribuição em degraus similar a uma curva de 3º grau. Um gráfico como este sempre será obtido quando todas as possibilidades de vendas em um sistema de operações forem consideradas.

Conclui-se que uma boa previsão da demanda e conhecimento das variabilidades das vendas, favorece encontrar valores acurados para as quantidades de equilíbrio, auxiliando na tomada de decisões, como as que envolvem promoções de vendas e negociações de preços.

Para a tomada de decisões táticas (curto prazo), como negociações de preços, decisões sobre vendas ou mix de produção, por exemplo, pode-se acompanhar as vendas dentro de um período em andamento e eliminar as combinações que não irão ocorrer ou que apresentarem tendências de não ocorrerem, aproximando as combinações remanescentes das quantidades dinâmicas de equilíbrio que, de fato, irão ocorrer naquele período; possibilitando maior segurança nas decisões a tomar.

Não houve a pretensão de se esgotar o assunto neste trabalho, havendo necessidade de aprofundamento na pesquisa e na realização de aplicações da metodologia proposta em casos reais. Fica esta necessidade como indicação para trabalhos futuros para a aplicação e acompanhamento em sistemas de operações reais diversificados, como em diversas indústrias e empresas de serviços, mas também em casos específicos como as indústrias que apresentam processos de produção conjunta.

6 REFERÊNCIAS

[1] CAFFERKY, M.; WENTWORTH, J. Breakeven analysis: the definitive guide to cost-volume-profit

analysis. New York: Business Expert Press, LLC, 2010.

[6] ATKINSON, Anthony; Rajid D. Banker; Robert S. Kaplan; S. Mark. **Management Accounting** –Young - Prentice Hall . 1995

[5] KOUTSOYANNIS – **Modern Microeconomics**. Prentice Hall. N.York. 2nd Ed.

[n] Chern Ching-Chin, Ao leong Ka Ieng, Wu Ling-Ling, Kung Ling-Chieh, Designing a decision-support system for new product sales forecasting, Expert Systems with Applications, Volume 37, Issue 2, March 2010, Pages 1654-1665, ISSN 0957-4174, 10.1016/j.eswa.2009.06.087.

(<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417409006034>)

1. *Definir as variações das vendas*: analisar por produto quais serão as variações em unidades discretas que cada um terá; se para o SO completo considerando de zero à capacidade máxima de produção e venda de cada um ou com variações menores contemplando alguns valores de quantidades de vendas a trabalhar.
2. *Cálculo da quantidade de combinações de vendas*: lançar na Equação 4 os dados definidos e verificar se há recursos computacionais disponíveis para processar e armazenar o número de combinações resultantes; se não houver, rever as definições.
3. *Obter todas as combinações de vendas*: promover a geração de todas as vendas possíveis dos produtos sem repetição para as variações definidas.
4. *Apuração do RO por combinação de vendas*: multiplicar a quantidade de venda de cada produto pela respectiva MCu para obter cada MC, somá-las para obter a MC total e abater os CF dela, gerando o RO de cada combinação de vendas.
5. *Classificar os RO*: classificar em ordem crescente de valor os RO de modo a visualizar se ocorreu o ponto de equilíbrio e quais são os valores próximos a ele.
6. *Definir o momento de equilíbrio*: optar por *RO nulo*, *RO positivo* ou *RO absoluto* (ver tópico 3.1) e selecionar as combinações que atendam esta opção.
7. *Definir critérios de descarte*: antecipadamente ou analisando as combinações selecionadas, definir os critérios que identifiquem ocorrências improváveis ou inviáveis para o SO (ver tópico 3.1), descartando-as.
8. *Analisar probabilisticamente as vendas resultantes*: das combinações não descartadas, usar de modelos estatísticos para verificar a probabilidade de cada uma ocorrer, descartando as menos prováveis.
9. *Determinar as quantidades de equilíbrio individuais*: restando mais de uma combinação, optar por uma delas determinando as Qe; não necessariamente a mais provável, pois outros critérios de análise do SO podem apontar para outra combinação, por exemplo, a previsão de falta de matéria prima para o período.