

# Engenharia de Controle: Fundamentos e Aulas de Laboratório

## Listas de Exercícios

Profs. Vilma A. Oliveira e Manoel L. Aguiar

### Exercícios Capítulos 2 e 3

1. Desenhar o diagrama de blocos do sistema de suspensão magnética abaixo identificando a saída, entrada e as variáveis de atuação.

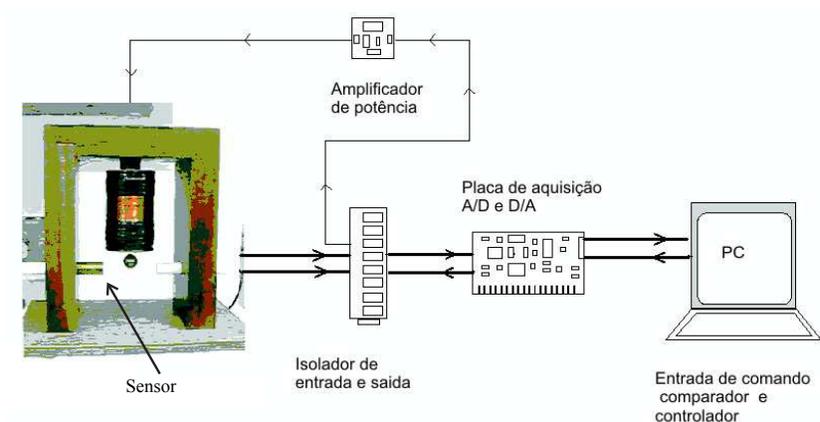


Figura 1: Diagrama esquemático do sistema de suspensão magnética com realimentação da posição.

2. Escrever a representação em espaço de estados do circuito da Figura 2 para entrada  $u$  e saída  $v_3$ .

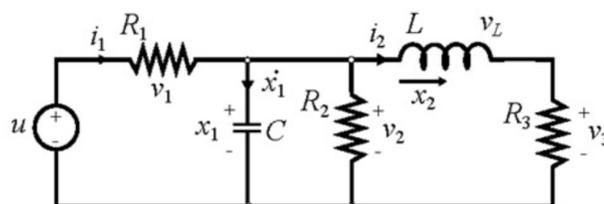


Figura 2: Circuito RLC.

3. Equações diferenciais e funções de transferência do motor CC.

- (a) Considere o motor de corrente contínua (CC) descrito pelo diagrama eletromecânico equivalente mostrado na Figura 3 com parâmetros definidos na Tabela 1. Obter as equações de movimento do rotor, do circuito elétrico da armadura e a equação diferencial do motor CC para a velocidade e tensão aplicada na armadura. Utilizando a lei de Newton para sistemas rotacionais obtém-se o torque que faz o eixo girar:

$$T_e(t) = K_t i_a(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) + B \omega(t) + F.$$

Por sua vez, utilizando a lei de tensão de Kirchhoff obtém-se:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + K_e \omega(t).$$

Usando o operador  $p = \frac{d}{dt}$  pede-se verificar que a equação diferencial de ordem 2, que relaciona a velocidade  $\omega$  e a tensão  $v_a$  aplicada na armadura para  $F = 0$ , é a seguinte:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

com  $a_2 = L_a J$ ,  $a_1 = (R_a J + L_a B)$ ,  $a_0 = (R_a B + K_t K_e)$ ,  $u(t) = K_t v_a(t)$  e  $y(t) = \omega(t)$ . Sugestão: Obter  $i_a(t)$  da equação de torque e substituir na equação da tensão.

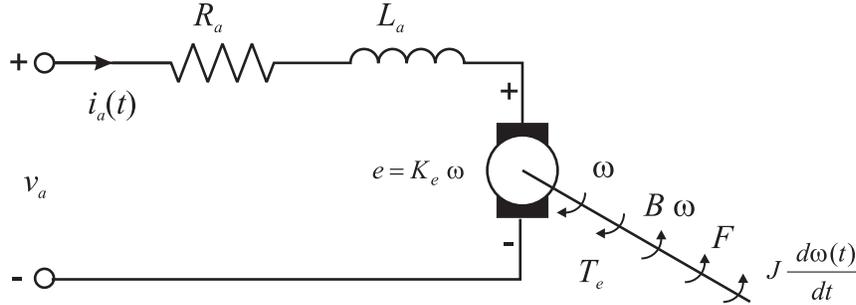


Figura 3: Diagrama eletromecânico do motor CC.

Tabela 1: Parâmetros do motor.

Parâmetros Elétricos	Parâmetros Mecânicos
$R_a$ resistência armadura [ $\Omega$ ]	$J$ momento inércia [ $\text{N.m.s}^2/\text{rad}$ ]
$L_a$ indutância armadura [ $H$ ]	$B$ coeficiente atrito viscoso [ $\text{N.m.s}/\text{rad}$ ]
$K_e$ constante f.c.e.m [ $\text{V.s}/\text{rad}$ ]	$K_t$ constante torque [ $\text{N.m}/\text{A}$ ]

- (b) A partir da equação de torque e de tensão com  $F = 0$  do Item 3a determinar as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{\omega(s)}{v_a(s)} \quad G_2(s) = \frac{\theta(s)}{v_a(s)} \quad G_3(s) = \frac{i_a(s)}{v_a(s)} \quad G_4(s) = \frac{T_e(s)}{v_a(s)}$$

$$G_5(s) = \frac{\omega(s)}{i_a(s)} \quad G_6(s) = \frac{\theta(s)}{i_a(s)} \quad G_7(s) = \frac{T_e(s)}{i_a(s)}.$$

- (c) Obter o diagrama de blocos do motor para entrada  $v_a(s)$  e saída  $\theta(s)$ .
- (d) Incluir um torque de perturbação na equação de torque e refazer o diagrama de blocos do Item 3c também para  $F = 0$ .
4. A Figura 4 representa um sistema de suspensão magnética. A modelagem do sistema de suspensão eletromagnética é baseada em suas equações dinâmicas: eletromecânica, mecânica e elétrica dadas no Capítulo 2, repetidas aqui para fácil referência:

$$f(h, i) = \frac{-L_0}{2a} \frac{i^2}{(1 + h/a)^2}$$

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = mg + f(h, i)$$

$$k_a v = Ri + L \frac{d(i)}{dt}$$

em que  $f(h, i)$  é a força eletromagnética,  $i$  é a corrente da bobina e  $k_a v$  é a tensão aplicada na bobina com  $k_a$  o ganho do amplificador de potência;  $L$  e  $R$  são a indutância e a resistência da bobina, respectivamente,  $a$  e  $L_0$  constantes.

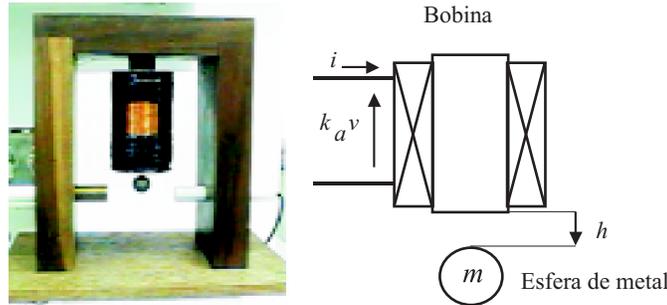


Figura 4: Esquemático do Exercício 4.

- (a) Para  $x_1 = h$ ,  $x_2 = \dot{h}$ ,  $x_3 = i$  e  $y = c_1 h$  com  $c_1$  uma constante, a saída do sensor de posição verificar que o modelo espaço de estado do sistema é dado por:

$$\dot{x} = F(x) + Bv, \quad y = Cx,$$

em que

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \left( \frac{L_0}{2am} \right) \left( \frac{x_3}{1 + (x_1)/a} \right)^2 \\ \frac{R}{L} x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_a/L \end{bmatrix}, \quad C = [ c_1 \quad 0 \quad 0 ].$$

- (b) Obter os pontos de equilíbrio.

- (c) Linearizar as equações do sistema de suspensão a partir da expansão de primeira ordem de Taylor em torno de  $(h_e, i_e)$  para  $\zeta = [h - h_e \quad \dot{h} \quad i - i_e]^T$  e  $u = v - \frac{Ri_e}{k_a}$ .

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_2/m & 0 & k_1/m \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_a/L \end{bmatrix}$$

em que

$$k_1 := \left. \frac{\partial f}{\partial x_3} \right|_{(x_{1e}, x_{3e})} = \frac{L_0 x_{3e}}{[a(1 + x_{1e}/a)^2]},$$

$$k_2 := \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{1e}, x_{3e})} = -\frac{L_0 x_{3e}^2}{[a^2(1 + x_{1e}/a)^3]}.$$

*Observação:* No ponto de equilíbrio  $(h_e, i_e)$ , tem-se  $mg = -f(h_e, i_e)$ .

- (d) Verificar se o modelo linearizado representa o sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio.
- (e) Sejam  $L = 5,2 \times 10^{-1}$  H,  $R = 2,1 \times 10^1 \Omega$ ,  $k_a = 2,1$  V/V,  $c_1 = -1,7361 \times 10^3$  V/m,  $L_0 = 2,49 \times 10^{-2}$  H,  $a = 6,72 \times 10^{-3}$  m e  $m = 2,26 \times 10^{-2}$  kg. Pede-se
- Verificar que  $h_e = 4,5 \times 10^{-3}$  m,  $i_e = 5,773 \times 10^{-1}$  A é um ponto de equilíbrio do sistema;
  - Obter a função de transferência.

## Exercícios Capítulo 4

5. Funções de transferência e forma espaço de estado.
- Considere o diagrama de blocos mostrado na Figura 5. Observe que  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $b_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  são constantes. Esta estrutura especial é chamada forma canônica controlável. Pede-se:
    - Obter a função de transferência entre  $u$  e  $y$ ;
    - Substituir valores da sua escolha para  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e para  $b_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  e obter os polos do sistema.
  - Obter as funções de transferência dos diagramas de blocos mostrados na Figura 6.
  - Obter uma realização espaço de estado para o diagrama da Figura 6b escolhendo as variáveis de estado como as saídas dos integradores.
6. Considere o circuito RLC mostrado na Figura 7.
- Obter a equação diferencial relacionando  $i(t)$  e  $u(t)$ .
  - Obter a equação diferencial relacionando  $i(t)$  e  $y(t)$ .

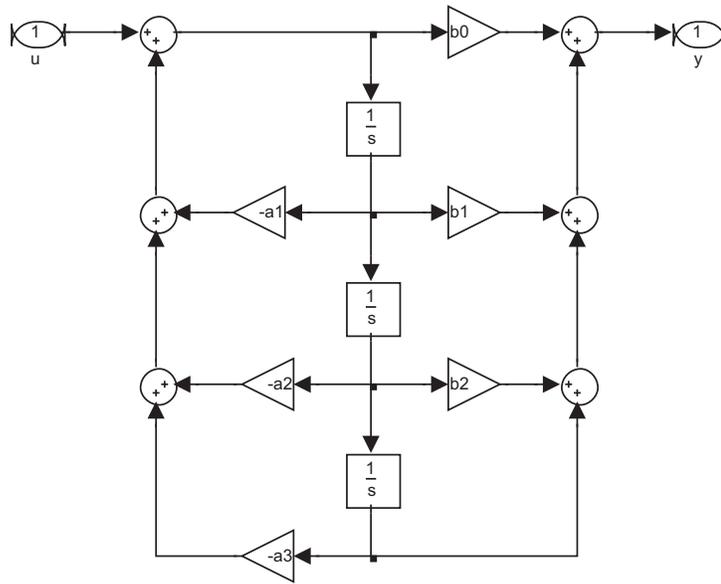
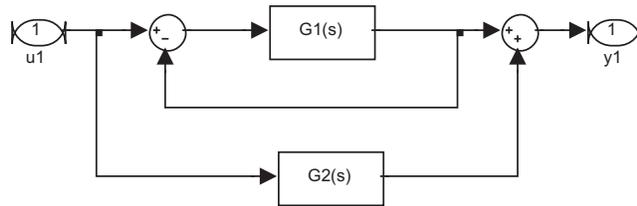
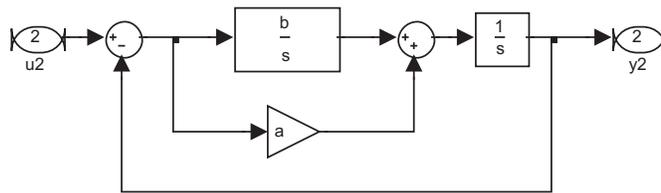


Figura 5: Diagrama de blocos do Item 5a.



(a)



(b)

Figura 6: Diagramas de blocos dos Itens 5b e 5c.

(c) Mostrar que admitindo todas as condições iniciais nulas seu modelo é representado por:

$$y(s)/u(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

em que  $\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$  e  $\zeta = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$ .

- (d) Obter os valores de  $R$  que produz  $y(t)$  com um sobressinal menor que 25% para  $u(t)$  uma entrada degrau unitário,  $L = 10mH$  e  $C = 4\mu F$ .

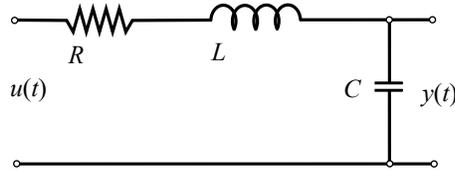


Figura 7: Diagrama de blocos do Exercício 6.

7. Considere o pêndulo simples, mostrado na Figura 8, cuja dinâmica é dada pela seguinte equação não-linear:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\text{sen}(\theta) = u$$

em que  $u$  é o torque externo aplicado,  $\ell$  é o comprimento do pêndulo,  $b$  o coeficiente de atrito viscoso no apoio,  $m$  a massa e  $g$  a aceleração da gravidade. Para  $m=0,2$  kg,  $\ell=0,3$  m,  $g=9,8$  m/s<sup>2</sup>,  $b=0,006$  N.m.s pede-se:

- Obter o modelo espaço de estado do pêndulo na forma vetorial  $\dot{x} = F(x, u)$  com  $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ .
- Verificar que os pontos equilíbrio  $x_e$  com  $u_e = 0$  são dados por  $(n\pi, 0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .
- Obter o modelo linearizado do pêndulo para a posição de equilíbrio dada por  $x_e = [\pi \ 0]^T$  e  $u_e = 0$ .
- Investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio do pêndulo  $x_e = [\pi \ 0]^T$  e  $u_e = 0$  via 1º método de Lyapunov.

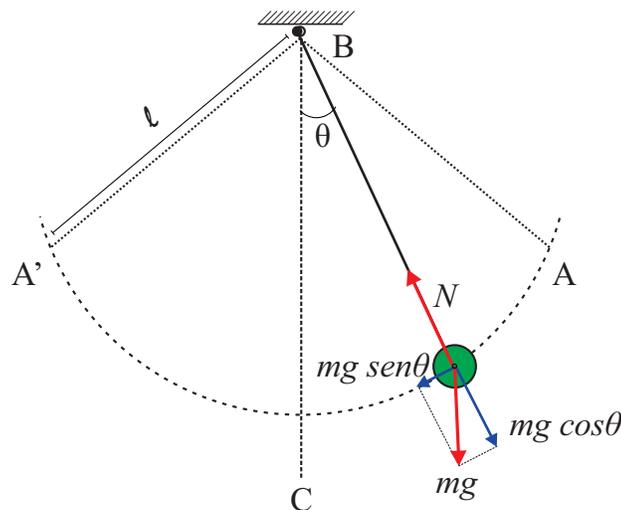


Figura 8: Sistema do Exercício 7.

8. Considere as equações de um pêndulo linearizadas em torno do ponto de equilíbrio estável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{\ell} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

em que  $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$  e  $u$  uma força denotada  $F$  aplicada pelo vento.

- (a) Definindo  $y = x_1$ , obter a função de transferência  $G(s)$  entre  $u$  e  $x_1$ .
9. Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos da Figura 9.
- (a) Usando as variáveis indicadas no diagrama, escreva a representação espaço de estado. É um sistema realimentado?
- (b) Obter a função de transferência entre  $y$  e  $u$  a partir de manipulação do diagrama de blocos.
- (c) Verificar se o sistema é estável.

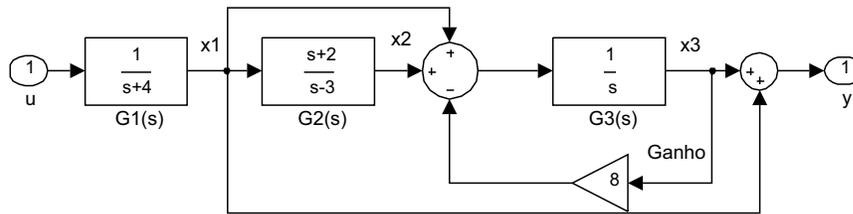


Figura 9: Diagrama de blocos do Exercício 9.

10. Um autopiloto de um navio é utilizado para manter o seu curso. Um modelo linearizado do navio é dado pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} M \ddot{\theta}(t) &= -d\dot{\theta}(t) - c\alpha(t) + w(t) \\ \dot{\alpha}(t) &= -0,1\alpha(t) + 0,1u(t) \end{aligned}$$

em que  $\theta(t)$  é o erro de rumo,  $\alpha(t)$  é o ângulo do leme,  $w(t)$  é um torque de perturbação e  $u$  é o ângulo de comando do leme. Um diagrama esquemático do navio é mostrado na Figura 10. Os parâmetros do navio seguem:  $M = 10^7 kg.m^2$  é o momento de inércia do navio em torno do eixo vertical relativo ao centro de gravidade,  $d = 10^6 N.m.s/rad$  é o coeficiente de arrasto associado à rotação e  $c = 5000 N.m/rad$  é um coeficiente relacionando o ângulo do leme ao torque aplicado. O ângulo  $\theta$  é medido por uma bússola. O autopiloto precisa fazer a medição deste ângulo e gerar um ângulo de comando para o leme.

- (a) Obter o modelo espaço de estado com  $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \alpha]$  e  $y = \theta$ .
- (b) Usando integradores, obter o diagrama de blocos do sistema.

- (c) Obter as funções de transferência do atuador, ou seja, a função de transferência entre  $\alpha$  e  $u$ . Obter também a função de transferência entre a saída da planta e a saída do atuador, ou seja, entre  $\theta$  e  $\alpha$ .

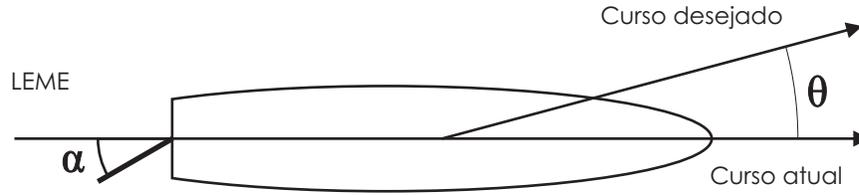


Figura 10: Sistema do Exercício 10.

11. Um sistema de controle de posição possui a seguinte função de transferência de malha fechada:

$$T(s) = \frac{0,5(s + 10)}{(s + 40)(s^2 + 1,4s + 1)}.$$

- (a) Obter o diagrama de polos e zeros do sistema e verificar a dominância dos polos complexos.  
 (b) Obter o valor aproximado do coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) e do sobressinal ( $M_p$ ) da resposta de  $T(s)$  a uma entrada degrau.

## Exercícios Capítulo 5

12. Um certo sistema de controle descrito por  $T(s) = \frac{y}{r}$  deve atender as seguintes especificações:  $t_r \leq 0,010$  s e sobressinal  $M_p \leq 16\%$ .

- (a) Esboçar a região no plano- $s$  para os polos de segunda ordem de um sistema que atendam as especificações de  $t_r$  e  $M_p$ .  
 (b) Seja:

$$\frac{y}{r} = \frac{KG}{1 + KG}$$

com  $G$  a função de transferência de malha aberta e  $K$  um ganho fixo. Verificar que para atender uma especificação de erro de regime permanente à entrada rampa unitária finita  $\frac{|e(t)|}{|r(t)|} = 0,002$  quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $G(s)$  deve possuir um integrador. Qual deve ser o valor de  $K$ ? Dica: Responder analisando

$$e = Sr$$

e o teorema do valor final.

13. Considere o sistema mostrado na Figura 11, em que:

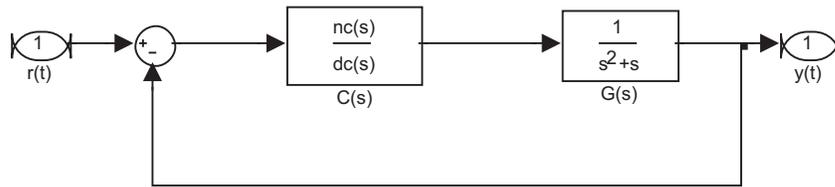


Figura 11: Sistema de controle do Exercício 13.

$$C(s) = K \frac{(s + \alpha)^2}{s^2 + \omega_0^2}.$$

- (a) Obter a função de transferência de  $r$  para o erro definido por  $e = r - y$ .
- (b) Verificar que para uma entrada senoidal  $r(t) = \sin \omega_0 t$  o erro de regime dado por  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  é igual a zero. Usar  $r(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$ .

14. Seja a resposta de um sistema sem realimentação com a perturbação na entrada da planta dada por:

$$y(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)(s + 4)} r(s) + \frac{2}{(s + 2)(s + 4)} d(s)$$

Encontre um controlador para estabilizar, seguir uma entrada degrau sem erro e rejeitar uma perturbação degrau.

Dica: O controlador deve ter um integrador e estabilizar o sistema com  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  escolhidos para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada.

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{s\beta(s)}$$

Onde  $\beta(s)$  é um polinômio de ordem 1 e  $\alpha(s)$  é um polinômio de ordem 2.

Escolher os polos da malha fechada para dominância de um par de polos complexos conjugado e obter  $\alpha$  e  $\beta$  igualando ao polinômio  $dT(s)$ :

$$d_T(s) = d_G d_C + n_G n_C$$



Figura 12: Diagrama de Blocos do Exercício X