

Exercício 1. (Magalhães e Lima 1 p. 227) Uma variável de Bernoulli com probabilidade de sucesso p é amostrada, de forma independente, duas vezes. Apresente a função de probabilidade da média amostral.

Exercício 2. (Magalhães e Lima 2 p. 228) O número de divórcios, por indivíduo adulto casado, em certa comunidade foi modelado pela variável aleatória D , cuja função de probabilidade é apresentada a seguir. Uma amostra, representada por

D	0	1	2	3
p_i	0,5	0,4	0,05	0,05

(D_1, D_2) , foi sorteada com dois desses indivíduos e os seguintes estimadores, para a média de divórcios, foram considerados: $\hat{\mu}_1 = \sqrt{D_1 D_2}$ e $\hat{\mu}_2 = \text{máximo} - \text{mínimo}$. Para cada estimador, obtenha sua distribuição de probabilidade e verifique se é viciado.

Exercício 3. (Magalhães e Lima 4 p. 228) Coleta-se uma amostra de 10 observações independentes de uma $N(2, 2)$. Determine a probabilidade de a média amostral

- (a) ser inferior a 1.
- (b) Ser superior a 2,5.
- (c) Estar entre 0 e 2.

Exercício 4. (Magalhães e Lima 5 p. 228) Supõe-se que o consumo mensal de água por residência em um certo bairro paulistano tem distribuição Normal com média 10 e desvio padrão 2 (em m^3). Para uma amostra de 25 dessas residências, qual é a probabilidade de a média amostral não se afastar da verdadeira média por mais de 1 m^3 ?

Exercício 5. (Magalhães e Lima 6 p. 228) Um fabricante afirma que sua vacina contra a gripe imuniza em 80% dos casos. Uma amostra de 25 indivíduos que tomaram a vacina foi sorteada e testes foram feitos para verificar a imunização ou não desses indivíduos. Se o fabricante estiver correto, qual é a probabilidade da proporção de imunizados na amostra ser inferior a 0,75? E superior a 0,85?

Exercício 6. (Bussab e Morettin 8 p. 281) Uma máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10 g.

- (a) Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?
- (b) Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhido ao acaso seja inferior a 2kg?

Exercício 7. (Bussab e Morettin 10 p. 281) A capacidade máxima de um elevador é de 500 kg. Se a distribuição X dos pesos dos usuários for suposta $N(70, 100)$:

- (a) Qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassem esse limite?
- (b) E seis passageiros?

Exercício 8. (Bussab e Morettin 11 p. 283) Sabe-se que 20% das peças de um lote são defeituosas. Sorteiam-se oito peças, com reposição, e calcula-se a proporção $\hat{p}$ de peças defeituosas na amostra.

- (a) Construa a distribuição exata de $\hat{p}$ (use a tabela da distribuição binomial).
- (b) Construa a aproximação normal à binomial.
- (c) Segundo sua opinião, a segunda distribuição é uma boa aproximação da primeira?
- (d) Já sabemos que, para dado p fixo, a aproximação melhora à medida que n aumenta. Agora, se n for fixo, qual valor de p a aproximação é melhor?

Exercício 9. (Bussab e Morettin 12 p. 283) Um procedimento de controle de qualidade foi planejado para garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada 6 horas sorteia-se uma amostra de 20 peças e, havendo mais de 15% de defeituosos, encerra-se a produção para verificação do processo. Qual a probabilidade de uma parada desnecessária?

Exercício 10. (Bussab e Morettin 32 p. 292) Consideramos duas populações X com parâmetros μ_1 e σ_1^2 e Y com parâmetros μ_2 e σ_2^2 . Sorteiam-se duas amostras independentes: a da primeira população de tamanho n e a da segunda de tamanho m . Calculam-se as médias amostrais $\bar{X}$ e $\bar{Y}$.

- (a) Qual a distribuição de $\bar{X}$? E de $\bar{Y}$?
- (b) Defina $D = \bar{X} - \bar{Y}$. O que você entende por distribuição amostral de D ?
- (c) Calcule $E(D)$ e $\text{Var}(D)$.
- (d) Como supõe que é a distribuição de D ? Por quê?

Exercício 11. (Bussab e Morettin 33 p. 292) A distribuição dos salários (em salários mínimos) de operários do sexo masculino de uma grande fábrica é $N(5, 4; 1, 69)$, e a de operários do sexo feminino é $N(5, 4; 2, 25)$. Sorteiam-se duas amostras, uma com 16 homens e outra com 16 mulheres. Se D for a diferença entre o salário médio dos homens e das mulheres:

- (a) Calcule $P(|D| > 0, 5)$.
- (b) Qual o valor de d tal que $P(|D| > d) = 0, 05$
- (c) Que tamanho comum deveriam ter ambas as amostras para que $P(|D| > 0, 4) = 0, 05$?

Exercício 12. (Bussab e Morettin 3 e 4 p. 303) Suponha um experimento consistindo de n provas de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p . Seja X o número de sucessos, e considere os estimadores

$$\hat{p}_1 = X/n \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = \begin{cases} 1, & \text{se a primeira prova resultar sucesso} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a esperança e a variância de cada estimador. Por que $\hat{p}_2$ não é um “bom” estimador? São estimadores consistentes?

Exercício 13. (Walpole et al. 9.2 e 9.3 p. 180) Se X é uma variável aleatória binomial, mostre que

- (a) $\hat{p}_1 = X/n$ é um estimador não viciado de p .
- (b) $\hat{p}_2 = \frac{X + \sqrt{n}/2}{n + \sqrt{n}}$ é um estimador viciado de p .
- (c) Mostre que o estimador $\hat{p}_2$ se torna não viciado quando $n \rightarrow \infty$.

Exercício 14. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma a.a.s. de uma população com distribuição Poisson(θ). Verifique se o estimador $\bar{X}$ do parâmetro θ é não viciado.

Exercício 15. (Bussab e Morettin 44 p. 329) Para estimar a média μ desconhecida de uma população, foram propostos dois estimadores não viesados e independentes $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$, de tal forma que $\text{Var}(\hat{\mu}_1) = \text{Var}(\hat{\mu}_2)/3$. Considere os seguintes estimadores ponderados de μ :

- (a) $\hat{\mu}_3 = (\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/2$.
- (b) $\hat{\mu}_4 = (4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/5$.
- (c) $\hat{\mu}_5 = \hat{\mu}_1$.
- (i) Quais dos estimadores $\hat{\mu}_3$, $\hat{\mu}_4$ e $\hat{\mu}_5$ são não viesados?
- (ii) Disponha esses estimadores em ordem crescente de eficiência.

Exercício 16. (Casella e Berger 7.11 p.317) Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma a.a.s. de uma população com função densidade de probabilidade

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \theta < \infty.$$

Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ .