

PSI-3263 – PRÁTICAS DE ELETRICIDADE E ELETRÔNICA I***Experiência 3 – Medidas Elétricas Básicas e Lei de Ohm***

VHN/02

JK /08

JK/11

Objetivos:

- Familiarizar-se com um multímetro digital e seu emprego em medidas simples de tensão, corrente, e resistência.
- Tomar ciência das condições a serem respeitadas na execução das medidas de modo a evitar danos aos equipamentos e obter medições corretas
- Compreender a influência do multímetro no circuito sob teste.
- Aprender a calcular os erros de medidas quando se emprega multímetros digitais.
- Entender a Lei de Ohm e suas limitações.
- Empregar o método dos mínimos quadrados para estimação de parâmetros de modelos.

1. Medição de Tensões e de Correntes Contínuas com o Multímetro Digital

Multímetros, como o nome indica, são aparelhos construídos de modo a proporcionar a medição de diversas grandezas elétricas, com um só instrumento. Usualmente, as grandezas medidas são tensão, corrente e resistência. Aparelhos mais modernos são capazes também de medir capacitâncias e até temperatura. Nesta experiência vamos nos ater a medidas de tensão e corrente contínuas e de resistências. Na Experiência 5 consideraremos as tensões e correntes alternadas, ocasião em que apresentaremos também um outro instrumento de medida, o osciloscópio.

Os multímetros são classificados em dois tipos de acordo com o método de apresentação da leitura:

- multímetros **analógicos** - aparelhos cuja leitura é indicada pela posição de um ponteiro sobre uma escala,
- multímetros **digitais** - aparelhos que apresentam os resultados na forma de números exibido em um visor.

As medições de tensão e corrente contínua (abreviado por DC – de *direct current*) que realizaremos nesta experiência são as funções mais básicas de um multímetro, sobre as quais estão baseadas as medidas em AC (correntes e tensões alternadas), de resistências e de capacitâncias. Devido a esse fato, as escalas DC costumam apresentar precisão mais elevada. O uso do multímetro digital será apresentado praticando-se as medições em um circuito amplificador a transistor, mostrado na Figura 1.

APRESENTAÇÃO DO CIRCUITO DO AMPLIFICADOR

O transistor do tipo usado na fig.1 é essencialmente um amplificador de corrente: se o transistor estiver operando em sua região linear, a corrente de coletor i_c resultará proporcional à corrente de base i_b . Nesse circuito são usados apenas os componentes necessários para *polarizar* o transistor, isto é, para colocá-lo num ponto de operação adequado (presentemente, na região linear, de modo a termos a proporcionalidade entre as correntes de coletor e base, anteriormente mencionada). Na Figura 1 não foram indicadas a entrada e a saída do amplificador.

O circuito da figura 1 encontra-se em um ponto de operação tal que, uma pequena *variação* da corrente de base i_b provocará uma *variação* proporcional (e maior) na corrente de coletor i_c . Conseqüentemente esta, por sua vez, provocará uma *variação* grande na tensão V_c , resultando daí o efeito amplificador do circuito.

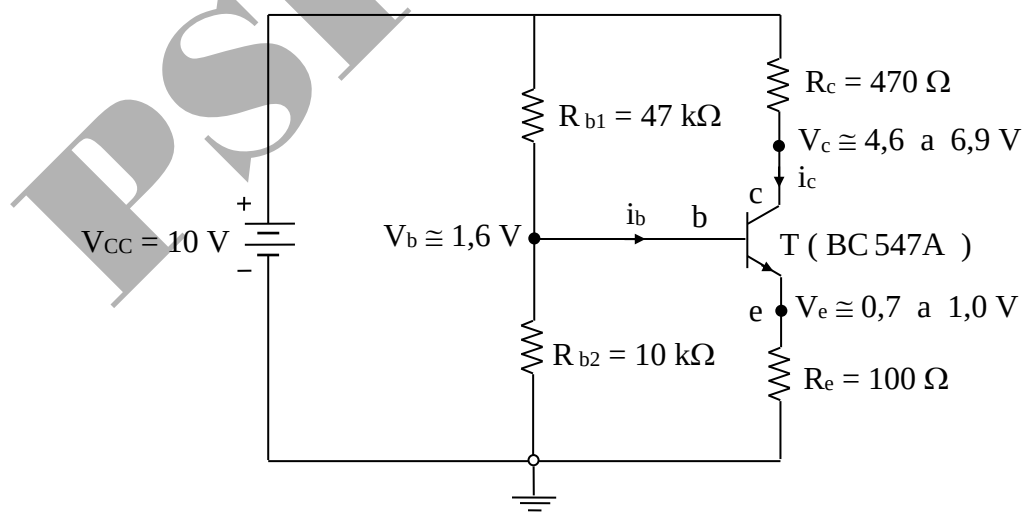


Figura 1 – Amplificador Transistorizado

1.1 – Medidas de Tensão DC

Acompanhando as instruções do professor, monte o circuito da Figura 1 na placa didática, usando os componentes disponíveis na bancada. Se você não se lembra do código de cores dos resistores, consulte o Anexo I desta apostila. Usaremos o transistor BC547A, cuja pinagem indicativa dos terminais de base, coletor e emissor é mostrada na Figura 2.

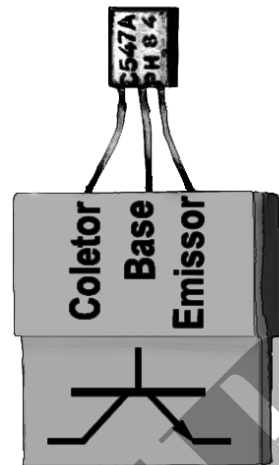


Figura 2 – Pinagem do Transistor BC547A

Uma vez feita a montagem do circuito da fig.1 na placa didática, passemos à verificação se ela está certa, através da medição de algumas tensões. Você deve conectar as pontas de prova ao multímetro, ligá-lo e selecionar a medição de tensões DC. Fazemos isso:

- Selecione a função de voltímetro DC no multímetro, girando a chave de seleção deste para a indicação “V” (horizontal à esquerda). Para fazer a medida, conecte a ponta de prova preta ao terminal “COM” e a vermelha ao terminal “V”, não os orifícios encontrados na parte inferior direita do aparelho. O terminal “V” corresponderá ao “positivo” e o terminal “COM”, ao “negativo” do medidor. Isto significa apenas que a medida resultará positiva (negativa), caso a tensão no terminal “V” (vermelho) seja maior (respectivamente, menor) que a tensão no terminal “COM” (preto).

OBS - Os conceitos de positivo e negativo são apenas convenções, e estabelecem o referencial de medida.

Para verificar se a montagem do circuito está correta, meça as tensões nos terminais do transistor (com relação ao terra – isto é, conecte o terminal COM do multímetro no nó terra do circuito) e compare com os valores indicados na Figura 1. Caso os valores estejam muito diferentes, procure um possível erro de ligação, medindo também as tensões nos resistores. É o que faremos a seguir:

Cuidado!

Antes de conectar as pontas de prova ao circuito para fazer as medidas, certifique-se que o botão seletor de funções está realmente em “V”. Conectar o multímetro ajustado para escala de correntes, resistências ou capacitâncias num ponto incorreto de um circuito pode danificar o aparelho!

- Ligue o multímetro. Use a posição de maior precisão do multímetro. Para tanto, ao ligar o aparelho, mantenha pressionado o botão azul à esquerda do multímetro. A indicação **HirES** aparecerá no visor. Caso isso não tenha acontecido, desligue o aparelho, e ligue-o novamente enquanto pressiona o botão azul à esquerda..
- Meça as tensões V_e , V_c e V_b , conforme indicadas na Figura 1 (verifique se os valores correspondem aos indicados). Note que essas tensões encontram-se entre o terminal correspondente do transistor (e, b, ou c) e o terminal de referência (terra). Para tanto, mantenha a ponta de prova negativa no terra e meça as tensões tocando a ponta positiva nos terminais e, b ou c, respectivamente. Essas tensões são chamadas de *tensões nodais*.
- Meça também as tensões sobre os resistores. Para tanto, toque os terminais dos resistores para executar a medição. Essas tensões são denominadas *tensões de ramo*.
- Anote todas as tensões obtidas na folha de resultados que acompanha esta experiência.

Atenção: Anote os valores medidos no “Roteiro de Relatório” com capricho, pois o roteiro deverá ser completado após o término da experiência, destacado e entregue ao professor na próxima aula.

Na próxima etapa, vamos avaliar a possível influência do multímetro sobre medidas de tensão, Para tanto, usaremos um outro circuito. Mas não desmonte o circuito do amplificador.

1.2 – Erros em Medidas de Tensão DC e Influência do Multímetro na Medida

1.2.1. Influência do multímetro na medida de tensão

Um medidor de tensão ideal deve fornecer o valor *exato* da tensão contínua num ramo qualquer de um circuito. Isso acontece se o aparelho não influenciar o circuito. Note que, ao tocarmos o circuito com as pontas de prova, estamos conectando um elemento novo no circuito, ou seja, instrumento de medida. Um instrumento ideal é tal que sua entrada no circuito não altera o circuito, como se os componentes internos do aparelho não produzissem nenhum efeito sobre o circuito. Entretanto isso é uma situação idealizada. Os medidores reais, no entanto apresentam dois problemas, como veremos a seguir.

- Sem desmontar o amplificador já montado, monte em alguma outra parte livre da placa didática, o circuito da figura 3. Use $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ (os dois resistores devem ter o mesmo valor). Calcule o valor teórico de V_A , e em seguida meça esta tensão. Anote o valor obtido e o valor teórico.

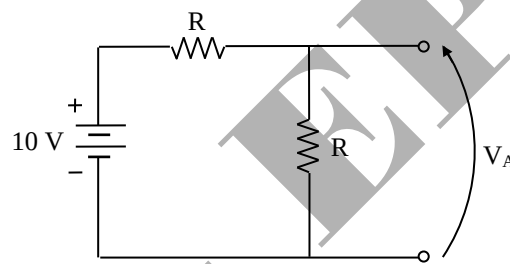


Figura 3 – Circuito para Verificação da Influência do Multímetro no Circuito sob Teste

- Agora, substitua os resistores de $4,7 \text{ k}\Omega$ por resistores de $10 \text{ M}\Omega$. Calcule o novo valor teórico e meça o novo valor de V_A . Os valores teóricos são iguais para os dois valores de resistências? E os valores medidos?
- Refaça a medida encostando os dedos nos terminais do multímetro. O que acontece?

Se fosse usado um voltímetro ideal, os dois primeiros valores medidos deveriam ser iguais, pois o voltímetro não deveria modificar o funcionamento do circuito. Entretanto, uma pequena corrente i_{volt} passa pelas pontas de prova do medidor real. Essa corrente altera o ponto de funcionamento do circuito sob teste (veja Figura 4), alterando o valor que se deseja medir. A qualidade de um voltímetro face a este problema é medida através da *resistência*

interna (R_{in} na figura) do aparelho: quanto maior a resistência interna, menor tende a ser a influência do aparelho na medida. É importante notar que a influência da resistência interna do voltímetro depende do circuito sob teste. Assim, quando escolhemos $R = 4,7 \text{ k}\Omega$, a influência da corrente que passa pelas pontas de prova foi desprezível face aos valores de tensão e de corrente passando pelo circuito. Por outro lado, quando $R = 10 \text{ M}\Omega$, a corrente nas pontas de prova alterou bastante o funcionamento do circuito.

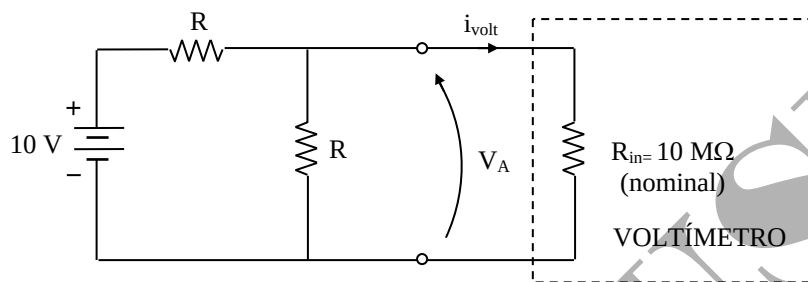


Figura 4 – Resistência Interna do Voltímetro

1.2.2. Erros de medida do instrumento

Quando um equipamento ou instrumento é fabricado em série, não é possível obter dois aparelhos perfeitamente idênticos, devido às limitações impostas pelos processos de fabricação. A engenharia de produto estabelece tolerâncias para a aceitação de diferenças entre dois exemplares de um produto obtidos de um mesmo processo. Se essas forem menores que a tolerância, os exemplares são aceitos. Já discutimos isso ao apresentarmos o código de cores dos resistores. Entretanto, quando o produto considerado for um instrumento de medida, essas tolerâncias acumuladas nos diversos componentes que compõem o aparelho produzirão como efeito total uma influência sobre a capacidade de medição. Isso significa uma mesma grandeza medida pode apresentar leituras diferentes em aparelhos distintos. Essa diferença é aceitável se encontrar-se dentro da faixa de erro admitida pelo instrumento. Além disso, um mesmo instrumento poderá apresentar leituras diferentes da mesma grandeza ao ser afetado pela variação de temperatura devido ao seu próprio aquecimento. Esses erros são intrínsecos ao instrumento. Veja o apêndice 1 para maiores esclarecimento.

O erro do voltímetro é descrito definindo-se uma faixa em torno do valor medido, dentro da qual deve estar o valor “exato” da grandeza sendo medida (ver Figura 5). Vamos ver agora como calcular essa faixa de erro.

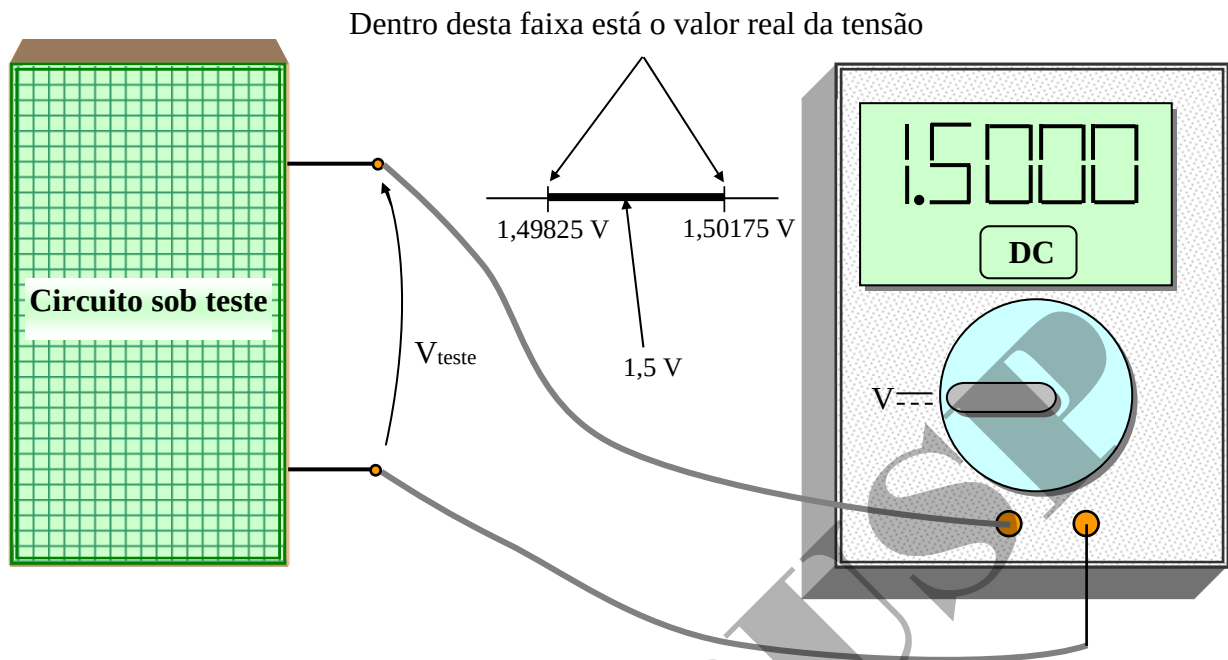


Figura 5 – Faixa de Precisão de Leitura

A precisão (e o erro ou incerteza) de uma medida feita com um multímetro digital varia de acordo com o tipo de medida que está sendo feita e com a escala utilizada (tensão DC ou AC, corrente DC ou AC, resistência, etc). Em todas as escalas de tensão DC, as medidas do multímetro TX3, usado neste experimento, têm uma exatidão de $\pm (0,05 \% \text{ do valor medido } + 10 \text{ unidades })$.



Figura 6 – Display do Tek TX3

O display do TX3 (ver Fig. 6) fornece, no modo de maior precisão, leituras entre -49999 e 49999 (diz-se que este é um display de “4 4/5 dígitos”, pois o algarismo mais significativo pode variar apenas entre 0 – na verdade, apagado – e 4). A posição do ponto decimal depende da escala utilizada: na escala de 500 mV, as leituras estarão entre -499.99 mV e 499.99 mV , enquanto que na escala de 5 V, as leituras ficam entre -4.9999 V e 4.9999 V .

As “10 unidades” da exatidão referem-se aos algarismos menos significativos do display. Desta forma, as “10 unidades” significam uma variação de 00010 para mais ou para menos. Isto quer dizer que uma leitura de 1,5000 V tem uma faixa de erro de $\pm (0,0005 \cdot 1,5 + 0,0010) = \pm 1,75 \text{ mV}$. Assim, uma leitura de 1,5000 V corresponde a uma tensão real no intervalo $[1,5 - 0,00175; 1,5 + 0,00175] = [1,49825; 1,50175]$. Note que as “10 unidades” mencionadas acima correspondem a uma variação dos últimos algarismos significativos na escala utilizada. Assim, se o aparelho indica 1,5000 V, “10 unidades” correspondem a 0,0010 V; enquanto que para uma leitura de 154,90 mV, “10 unidades” correspondem a 0,0010 mV.

Tarefa para casa:

Voltando ao amplificador da Figura 1, usando as medidas das tensões feitas sobre todos os resistores, calcule a faixa de erro para cada valor medido.

Anote os resultados no roteiro de relatório..

1.3 – Medida de Corrente DC

A medida de corrente com multímetro exige alguns cuidados adicionais em relação à medida de tensão, pois é necessário colocar o multímetro em série com o fio por onde passa a corrente de interesse (veja Fig. 7), de forma que a corrente i que passa pelo circuito passe também através do multímetro.

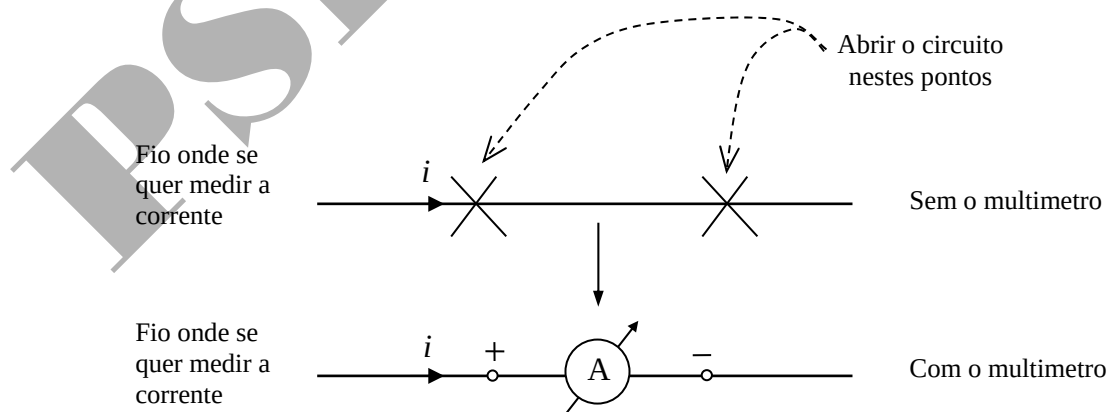


Figura 7 – Ligação de Amperímetro

De um modo geral, a medida de corrente também é mais delicada: é mais fácil danificar o multímetro quando no modo de medir corrente do que no modo de medir tensão. Isto ocorre porque, no modo amperímetro, o multímetro deve apresentar uma resistência interna baixa ao circuito sob teste, de modo que a corrente a ser medida (i na figura) não se altere com a inserção do amperímetro. Se a corrente i for demasiadamente grande, o multímetro pode ser danificado.

Atenção: Antes de fazer qualquer medida de corrente, deve-se verificar se a ordem de grandeza da corrente que se quer medir é compatível com o aparelho utilizado para a medida (e com a escala escolhida, se esta escolha não for automática).

Atenção: Não se esqueça de desligar a fonte de tensão antes de inserir o multímetro no circuito para fazer cada medida de corrente – normalmente não é boa prática fazer modificações em um circuito energizado.

- Medição das correntes no circuito – faremos as mesmas medidas em 3 situações diferentes no circuito, trocando-se um dos resistores em cada caso a seguir:

Caso 1 – Para verificar o efeito amplificador de corrente do transistor, meça a tensão V_{c1} no coletor do transistor, e as correntes na base i_{b1} e no coletor i_{c1} de T. Para medir a corrente no coletor, por exemplo, uma maneira de efetuar as ligações está indicada na Figura 8. Ou pode seguir alguma outra sugestão oferecida pelo professor.

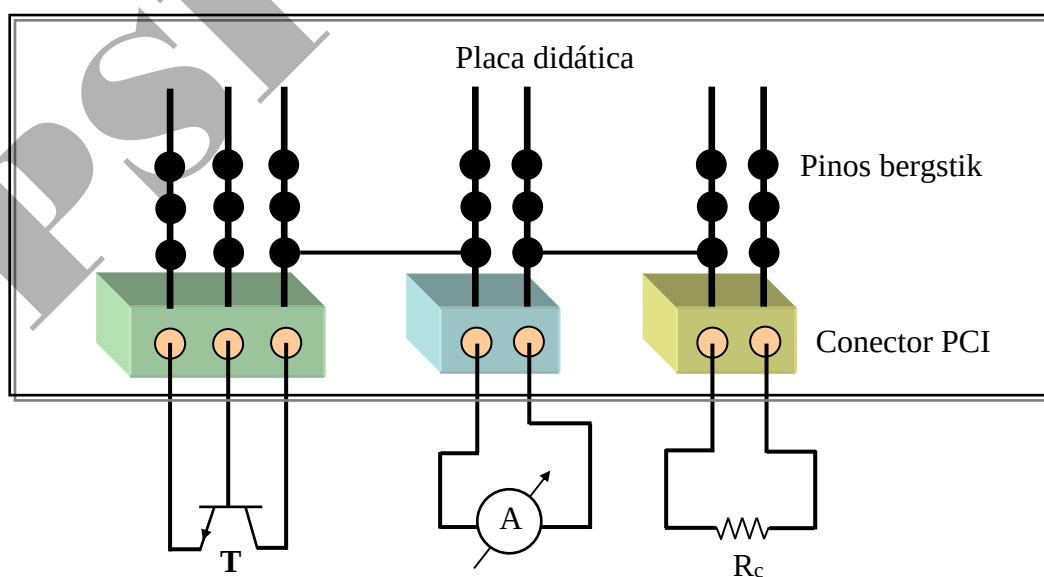


Figura 8 – Sugestão para Ligação do Multímetro (ex: medida da corrente no coletor)

Caso 2 – Agora, coloque em série com o resistor R_{b1} um resistor de $33\text{ k}\Omega$ (de modo que o novo R_{b1} valha $80\text{ k}\Omega$ resultante da associação série de $47\text{ k}\Omega$ com $33\text{ k}\Omega$), e meça as novas correntes de base i_{b2} e de coletor i_{c2} . Meça também a nova tensão de coletor, V_{c2} , e calcule as razões :

$$G_{i2} = \frac{i_{c2} - i_{c1}}{i_{b2} - i_{b1}} \quad \text{e} \quad G_{v2} = \frac{V_{c2} - V_{c1}}{i_{b2} - i_{b1}}$$

Caso 3 – Em seguida, troque as ligações de forma que $R_{b1} = 33\text{ k}\Omega$, e repita as medidas acima, obtendo i_{b3} , i_{c3} e V_{c3} . Calcule as novas razões G_{i3} e G_{v3} , comparando com os resultados anteriores.

$$G_{i3} = \frac{i_{c3} - i_{c1}}{i_{b3} - i_{b1}} \quad \text{e} \quad G_{v3} = \frac{V_{c3} - V_{c1}}{i_{b3} - i_{b1}}$$

Os erros nas medidas de corrente e tensão vão afetar os valores de G_{i2} , G_{i3} , G_{v2} e G_{v3} .

Estime os erros nos valores calculados de G_{i2} e G_{i3} , considerando os erros nas medidas das correntes. A exatidão do TX3 nas escalas de corrente é de $\pm (0,2\% + 40 \text{ unidades})$, para a escala de $500\text{ }\mu\text{A}$, e de $\pm (0,2\% + 20 \text{ unidades})$, nas escalas de 5 mA a 500 mA . Levando em conta estes erros, você pode dizer que G_{i2} e G_{i3} são diferentes ? O que você conclui sobre o uso do transistor como amplificador de corrente ?

2. Medida de Resistências

Para medir uma resistência, o multímetro aplica uma tensão conhecida no dispositivo sob teste, e mede a corrente resultante.

Por isso, quando o multímetro estiver no modo ohmímetro, é importante tomar cuidado para não ligar suas pontas de prova em um circuito energizado, pois pode-se danificar o aparelho ou o circuito ao qual o aparelho é conectado.

Desconecte a fonte de alimentação do amplificador, e meça as resistências utilizadas na montagem do amplificador (sem desmontar o circuito), anotando os resultados. Inverta a posição das pontas de prova para cada medida. Os valores mudaram? Meça também as resistências das junções B-E e B-C do transistor, também com as duas posições das pontas de prova.

Agora desfaça todas as ligações do amplificador e meça novamente as resistências das junções B-E e B-C, sempre invertendo as posições das pontas de prova. Faça o mesmo com os resistores, e compare os resultados obtidos com o amplificador montado e com o amplificador desmontado. Você vai notar que alguns resultados foram iguais, e outros foram diferentes. Procure explicar por quê.

Anote os valores obtidos, e calcule a faixa de erro das medidas, sabendo que a exatidão do multímetro TX3 para a medida de resistências é de $\pm (0,1 \% \text{ da medida} + 20 \text{ unidades})$ nas escalas até 500 k Ω .

3. Lei de Ohm

Neste curso já usamos algumas vezes o fato de que a tensão sobre um resistor é proporcional à corrente atravessando o mesmo. Vamos verificar agora se isto é mesmo verdade.

A lei de Ohm estabelece que, mantida-se a temperatura constante, a resistência de um bipolo não varia com a tensão ou com a corrente. Isso não é válido para qualquer bipolo. Os bipolos para os quais a lei de Ohm se verifica são denominados *ôhmicos* ou *resistores lineares*.

Vamos agora verificar a validade dos resultados acima medindo a curva $I \times V$ (corrente x tensão) de um resistor comercial.

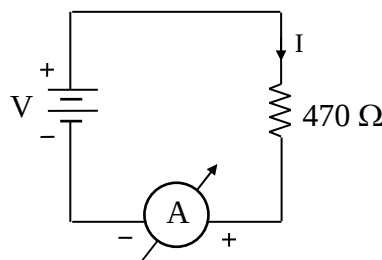


Figura 10 – Circuito para Verificação da Lei de Ohm

Para isto, monte o circuito da Fig. 10 acima utilizando o resistor de 470 Ω , e monte uma tabela listando os valores de corrente no resistor para tensões variando de 0 a 10 V, com passos de 1 V. Desenhe um gráfico com os valores medidos na folha de papel milimetrado, e

ajuste uma reta média para os pontos obtidos. Qual é a inclinação da reta? Compare o inverso da inclinação da reta com o valor do resistor, medido pelo multímetro no item 2.

Uma forma muito usada (e mais precisa) de se determinar a inclinação da reta é o *método dos mínimos quadrados*. No nosso caso, queremos encontrar uma relação

$$v_n = R \cdot i_n \quad \text{para } 0 \leq n \leq 10$$

onde v_n e i_n são as medidas de tensão e corrente obtidas. Como nossas medidas são imprecisas, não haverá um único valor de R que satisfaça a relação acima, *exatamente*, para todos os valores de n . Como escolher R , então ? O matemático Karl F. Gauss propôs o método dos mínimos quadrados para resolver problemas deste tipo, já no fim do século XVIII. No nosso caso, isto quer dizer escolher para R o valor que minimize a seguinte função de erro :

$$C(R) = \sum_{n=0}^{10} (v_n - i_n \cdot R)^2, \quad R_{ot} = \arg \min_R C(R)$$

O símbolo $\arg \min_R C(R)$ indica que R_{ot} é o valor de resistência para o qual o erro $C(R)$ é mínimo: $C(R_{ot}) \leq C(R)$ para todo R .

A solução R_{ot} acima é um compromisso. A reta $v = R_{ot} \cdot i$ pode até não passar por nenhum ponto (i_n, v_n) , mas representa uma escolha tal que **todos** os pontos (i_n, v_n) estejam o mais perto possível da reta (segundo o critério da função de erro acima).

A solução deste problema de minimização não é difícil: fazendo a derivada da função de erro com relação a R igual a zero, obtemos :

$$\frac{dC(R)}{dR} = -2 \sum_{n=0}^{10} i_n (v_n - R \cdot i_n) = 0,$$

e portanto,

$$R_{ot} = \frac{\sum_{n=0}^{10} v_n \cdot i_n}{\sum_{n=0}^{10} i_n^2}$$

Calcule R_{ot} pela expressão acima, e compare com a inclinação da reta que você traçou à mão, e com o valor lido pelo multímetro.

De modo geral, o valor da resistência de um dispositivo qualquer varia com a temperatura do material. Em algumas aplicações, isto é indesejável (como ao se usar resistores de precisão para construir diferentes escalas de voltímetros ou amperímetros), enquanto que em outras situações é desejável que a variação seja acentuada (para se usar o resistor como sensor de temperatura, por exemplo). O resistor de $470\ \Omega$ usado acima é um dispositivo em que a variação de resistência é relativamente pequena com a temperatura; para medir esta variação seriam necessários instrumentos precisos.

Para verificar a influência da temperatura na resistência de um dispositivo, vamos levantar a curva $I \times V$ de uma lâmpada de automóvel ($12\ V$). Substitua o resistor de $470\ \Omega$ pela lâmpada, e monte uma nova tabela listando os valores de corrente na lâmpada para tensões variando de 0 a $12\ V$, com passos agora de $0,5\ V$. O que acontece com a temperatura da lâmpada quando aumenta a tensão de alimentação ? Monte um novo gráfico de corrente $\times$ tensão. Como parece a curva agora ? Você acha que a resistência da lâmpada está aumentando ou diminuindo com o aumento de tensão ? Explique suas conclusões.

Além dos materiais ôhmicos, cuja resistência varia com a temperatura, ainda há materiais cuja resistência varia com a umidade, com a pressão (materiais *piezoresistivos*), com a deformação (*extensômetros*) e muitos outros, que podem ser usados como sensores para equipamentos de medidas de grandezas não elétricas.

Lista de Materiais

1. Placa didática (1)
2. Multímetro digital Tek TX3 (1)
3. Fonte de tensão (1)
4. Resistores (47 k Ω ; 10 k Ω ; 470 Ω ; 100 Ω ; 33 k Ω ; 4,7 k Ω (2); 10 M Ω (2))
5. Transistor BC547A (1)
6. Lâmpada de 12 V/5W (1)
7. Folhas de papel milimetrado (2)
8. Cabos banana /banana (2)
9. Cabo banana /bergstick (1)
10. Cabos de conexão (14)

PSI-2221 – PRÁTICAS DE ELETRICIDADE E ELETRÔNICA I

Experiência 3 – Apêndice 1 – Propagação de erros

JK/08

Objetivos: Rever conceitos e procedimentos de como realizar a propagação dos erros

A.1. Erros sistemáticos versus erros acidentais

Erros *sistemáticos* são aqueles decorrentes do método de medida empregado e da imprecisão dos instrumentos de medida. Assim são denominados por ocorrerem de maneira sistemática, em contraposição aos chamados erros *acidentais*, ou *aleatórios*. Erros sistemáticos são inerentes à maneira com que se realiza uma determinada medida, seguindo certa metodologia de medição. Também são intrínsecos aos instrumentos utilizados e não podem ser eliminados. Todavia, os erros sistemáticos podem ser estimados ou avaliados *a priori*, de modo a considerá-los na apresentação e processamento dos dados experimentais.

Os erros ditos acidentais, ou aleatórios, embora tenham essa designação, não devem ser entendidos como fenômenos que ocorreram devido a algum acidente ou falha experimental. Todavia, os eventos resultados de descuido são considerados como falhas sistemáticas e os dados que decorrem de sua ação se apresentam como anomalias (*outliers*). Em geral se destacam facilmente em meio aos dados obtidos de um experimento e são muitas vezes descartados.

Os erros aleatórios advêm da flutuação estatística dos fenômenos, da interferência de ruído (tanto o ruído externo, ambiental, quanto o ruído intrínseco ao processo), das irregularidades dos meios e materiais e de aspectos fenomenológicos que são intrinsecamente aleatórios (p.ex. devido a mecanismos quânticos em escala molecular).

É importante entender claramente essa distinção por que essas categorias de erros são tratadas de formas distintas, segundo diferentes técnicas ao se apresentar os resultados experimentais. Os erros sistemáticos são conhecidos *a priori* e devem ser considerados usando-se métodos de propagação de erros, ao passo que os erros aleatórios são desconhecidos *a priori* e devem ser estimados utilizando-se métodos estatísticos.

A.2. Apresentação dos resultados experimentais

Independentemente da natureza do erro ser de origem sistemática ou aleatória, adotam-se alguns procedimentos para apresentação de dados experimentais que, desejavelmente, devem sempre ser utilizados em qualquer tipo de documentação técnica reportando grandezas medidas, seja um relatório de um experimento, seja em uma especificação técnica.

Uma grandeza medida é inexoravelmente afetada por um erro, ou desvio de medida. Todo instrumento apresenta uma incerteza inerente e a observação de um fenômeno físico não pode ser realizada sem a intervenção de uma incerteza de medida. A incerteza resulta das limitações e das imperfeições do instrumento ou do método de medida.

A incerteza de uma medida é representada por um intervalo (simétrico ou não) em torno do valor medido com a precisão que lhe é atribuída. A precisão dos extremos desse intervalo deve ser a mesma do valor da medida. A precisão é caracterizada pelos algarismos significativos da medida.

Exemplo A-2.1: em geral a leitura em uma escala graduada é considerada afetada de uma incerteza igual à metade da menor divisão da escala. Portanto, em uma escala em que a menor graduação é de 1 mA, poder-se-ia obter uma leitura como $3,3 \text{ mA} \pm 0,5 \text{ mA}$. Não haveria sentido nenhum em admitir um valor, obtido com o mesmo instrumento, como por exemplo $3,25 \text{ mA} \pm 0,5 \text{ mA}$, visto que a precisão da incerteza é menor.

Para a apresentação gráfica dos resultados, indica-se o erro em cada ponto experimental na forma de uma barra de tamanho igual ao comprimento do intervalo de incerteza em torno do ponto representado no gráfico. Note que a incerteza poderá estar presente tanto na variável independente quanto na dependente.

Muitas vezes não se apresentam as incertezas nas variáveis independentes, porém isso não quer dizer que as incertezas sejam nulas. Em geral, esses casos correspondem a situações em que a incerteza é de mesma amplitude para todo o domínio da variável independente. Outras vezes significa que não se dispõe do valor da incerteza ou não é possível estimá-la.

Todavia, o texto deve sempre mencionar qualquer um desses fatos em que se omite a apresentação gráfica da incerteza.

A figura A.1 apresenta um exemplo de gráfico com os valores das incertezas em ambas variáveis.

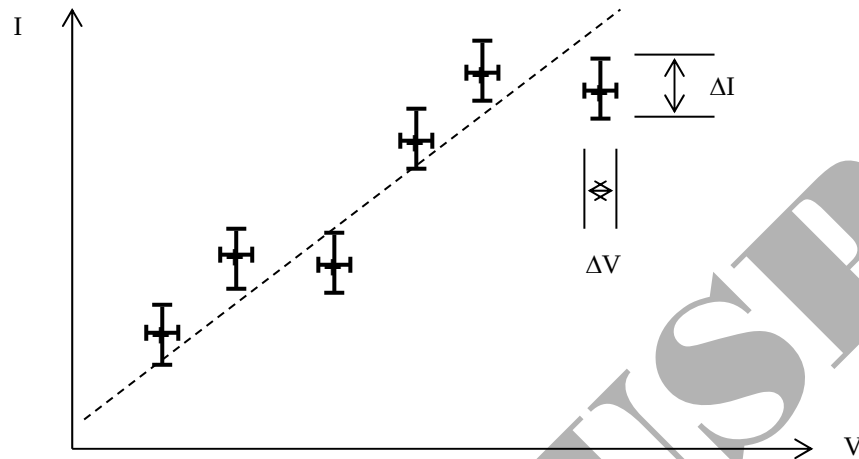


Figura A.1 – Gráfico com os valores das incertezas em ambas variáveis

As incertezas, tanto as sistemáticas quanto as aleatórias, podem ser apresentadas como valores absolutos ou relativos. No caso de valor absoluto, apresenta-se o próprio valor numérico da incerteza em sua unidade de medida. No caso de valor relativo, apresenta-se o valor resultante da divisão do valor numérico da incerteza pelo valor da medida correspondente.

Exemplo A-2.2: suponha que uma dada tensão foi medida encontrando-se o valor de 6,2 V com um instrumento que apresenta uma incerteza de 0,1 V. Então a incerteza absoluta é de 0,1 V e a incerteza relativa é de $(0,1 / 6,2) = 0,02$, ou 2%.

A.3. Propagação das incertezas

Os erros sistemáticos são devidos às incertezas inerentes aos instrumentos e aos métodos de medida. Busca-se sempre diminuir ao máximo possível a extensão desses erros:

- através da seleção de instrumentos adequados
- operando-se corretamente os instrumentos (p.ex., respeitando-se os tempos de estabilização e acomodação dos instrumentos, usando-se as escalas mais apropriadas)
- cuidando para que a montagem do experimento seja bem feita e estável

- cuidando-se das condições ambientes de operação dos instrumentos e estabilizando-se o ambiente (quanto a temperatura, umidade e todas as demais variáveis relevantes)
- observando-se as limitações dos materiais empregados

Respeitadas essas condições, os desvios obtidos em cada medida individual das variáveis envolvidas devem ser propagados seguindo-se as regras de dependência funcional entre as variáveis. Isto é, devem-se usar diferentes tipos de regras de propagação de incertezas dependendo se as variáveis se combinam por adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou alguma outra forma de dependência funcional representável analiticamente. Note que, no caso de erros sistemáticos, não há aspectos estatísticos envolvidos na propagação dos erros. Ademais, quando se faz uma análise estatística para avaliar os erros aleatórios, os erros sistemáticos aparecem como tendências visíveis nas estatísticas e podem, em geral, ser facilmente separados das flutuações características dos erros aleatórios.

Casos de Propagação de Incertezas

A.3.1. Somas de grandezas

Seus erros absolutos somam-se também. Sejam $G1 \pm \Delta G1$ e $G2 \pm \Delta G2$ essas grandezas. Então, a grandeza $G3 \pm \Delta G3$ resultante da soma de $G1$ e $G2$ será dada por:

$$\begin{aligned} G3 \pm \Delta G3 &= (G1 \pm \Delta G1) + (G2 \pm \Delta G2) = \\ &= (G1 + G2) \pm (\Delta G1 + \Delta G2) \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta G3 = \Delta G1 + \Delta G2} \end{aligned}$$

A.3.2. Diferenças de grandezas

Os erros absolutos somam-se novamente, como veremos a seguir.

Sejam $G1 \pm \Delta G1$ e $G2 \pm \Delta G2$ essas grandezas. Então, a grandeza $G3 \pm \Delta G3$ resultante da diferença de $G1$ e $G2$ será dada por:

$$\begin{aligned} G3 \pm \Delta G3 &= (G1 \pm \Delta G1) - (G2 \pm \Delta G2) = \\ &= (G1 - G2) \pm (\Delta G1 + \Delta G2) \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta G3 = \Delta G1 + \Delta G2} \end{aligned}$$

já que, no pior caso, seria ΔG_1 positivo e ΔG_2 negativo (ou vice-versa).

A.3.3. Produtos de grandezas

Neste caso os erros relativos somam-se.

Sejam $G_1 \pm \Delta G_1$ e $G_2 \pm \Delta G_2$ essas grandezas. Então, a grandeza $G_3 \pm \Delta G_3$ resultante do produto de G_1 e G_2 será dada por:

$$\begin{aligned} G_3 \pm \Delta G_3 &= (G_1 \pm \Delta G_1) \times (G_2 \pm \Delta G_2) = \\ &= G_1 \cdot G_2 \pm G_1 \cdot \Delta G_2 \pm G_2 \cdot \Delta G_1 \pm \Delta G_1 \cdot \Delta G_2 \end{aligned}$$

A parcela $\Delta G_1 \cdot \Delta G_2$ é uma variação de segunda ordem e seu valor situa-se abaixo da precisão admitida, portanto é descartada. Logo, resulta:

$$G_3 \pm \Delta G_3 = G_1 \cdot G_2 \pm (G_1 \cdot \Delta G_2 \pm G_2 \cdot \Delta G_1) \rightarrow \Delta G_3 = G_1 \cdot \Delta G_2 \pm G_2 \cdot \Delta G_1$$

Como a grandeza $G_3 = G_1 \cdot G_2$, então a incerteza relativa em G_3 será dada por:

$$\frac{\Delta G_3}{G_3} = \frac{G_1 \cdot \Delta G_2 \pm G_2 \cdot \Delta G_1}{G_1 \cdot G_2} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta G_3}{G_3} = \frac{\Delta G_1}{G_1} + \frac{\Delta G_2}{G_2}}$$

A.3.4. Quocientes de grandezas

Neste caso, novamente os erros relativos somam-se. Demonstre esse fato como exercício. Siga passos similares aos do caso anterior.

$$G_3 = \frac{G_1}{G_2} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta G_3}{G_3} = \frac{\Delta G_1}{G_1} + \frac{\Delta G_2}{G_2}}$$

A.3.5. Potenciação de uma grandeza

Quando uma grandeza G é elevada a uma potência de expoente k , seu erro relativo fica multiplicado por k . Isso decorre do caso mais geral, a ser visto no item A.3.6. Demonstre.

$$G_2 = (G_1)^k \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta G_2}{G_2} = k \cdot \frac{\Delta G_1}{G_1}}$$

A.3.6. Dependência funcional genérica

Quando uma grandeza G_2 depende funcionalmente de outra grandeza G_1 , através de uma regra genérica $G_2 = f(G_1)$, pode-se obter o erro relativo de G_2 através de uma expansão em série de Taylor. Para facilitar a notação, chamemos G_2 de y e G_1 de x , de modo que $y = f(x)$. Temos, então, expandindo-se $f(x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3}(x - x_0)^3 + \dots$$

Considerando-se: $x - x_0 = \Delta x$

vem, então:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} \Delta x^3 + \dots$$

Como fizemos anteriormente, vamos descartar os termos com expoente superior a 1 pois representam variações que vão além da precisão admitida. Portanto, resulta:

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + \frac{df}{dx} \Delta x$$

Lembrando que a variação em y é: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, vem:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{df}{dx} \Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta y = \frac{df}{dx} \Delta x$$

Conclui-se então que:

$$\Delta G2 = \frac{df}{dG1} \Delta G1$$

Exemplo A-3.1: seja $G2 = \log(G1)$. Então tem-se, com base no que foi visto no item A.3.6:

$$\frac{df}{dG1} = \frac{d}{dG1} \log G1 = \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{G1} \quad \rightarrow \quad \Delta G2 = \frac{1}{\ln 10} \frac{\Delta G1}{G1}$$

A.4. Tratamento estatístico dos erros

Os erros aleatórios são tratados estatisticamente. Diferentemente dos erros sistemáticos, os erros aleatórios não são conhecidos *a priori* e devem ser estimados como parte da caracterização dos resultados experimentais. Devem ser feitas diversas repetições das medidas para cada condição experimental, de modo a se obter uma estatística significativa.

Os erros sistemáticos tornam-se conhecidos após um procedimento de calibração dos instrumentos e dos processos de medição. Essa calibração é também um procedimento estatístico, porém ela é feita antes da realização do experimento, por isso se diz que os erros sistemáticos são conhecidos *a priori*. No caso dos instrumentos, os fabricantes devem fornecê-los calibrados. Entretanto, periodicamente é necessário realizar-se um processo de aferição para verificar se a calibração continua valendo ou se houve algum desvio devido ao envelhecimento dos componentes ou às condições de uso do instrumento.

Nesta experiência, consideram-se apenas os erros sistemáticos, cujos valores fornecidos pelos fabricantes são apresentados ao longo da experiência. Portanto, não empregaremos o tratamento estatístico dos dados ou resultados.

Bibliografia

[1] – Bell, D.A. – Electronic Instrumentation and Measurements, Prentice-Hall, New York, NY. EUA, 1983

[2] – Vuolo, J.H. – Fundamentos da Teoria dos Erros. Editora Edgard Blücher, Ltda, São Paulo, SP, Brasil, 1992 – 2ª edição

PSI-2221 – PRÁTICAS DE ELETRICIDADE E ELETRÔNICA I

Experiência 3 – Apêndice 2 – Lei de Ohm

VHN/02
JK/11

A lei de Ohm é tão fácil de ser enunciada e entendida, que não nos damos conta de sua importância, nem de como foi difícil descobri-la. Georg Simon Ohm foi um físico alemão que viveu entre 1789 e 1854. Na época em que Ohm escreveu seus trabalhos sobre condutores elétricos (década de 1820), um experimentador precisava criar seus próprios instrumentos para medir grandezas elétricas (mesmo porque muitas delas, como tensão por exemplo, ainda não estavam muito bem definidas). O instrumento que Ohm utilizou em seus experimentos mais importantes (ver Fig. 9) constava de um par termoeletrico (fonte de tensão), uma balança de torção com uma agulha magnética (amperímetro) e um termômetro (que fazia as vezes de voltímetro). Como resistores, foram usados fios de cobre com comprimentos de 2, 4, 6, 10, 18, 34, 66 e 130 polegadas, todos com a mesma espessura. A tensão era produzida pelo gradiente de temperatura entre as junções fria e quente do par termoeletrico. A corrente era determinada medindo-se o torque exercido na agulha magnética ao se aplicar a tensão sobre a resistência dos fios metálicos.

Depois de várias medidas (e alguns anos de trabalho), Ohm chegou à conclusão que a relação entre o comprimento l do fio de cobre (resistência) e o torque τ sobre a agulha (corrente) podia ser bem explicada pela relação

$$\tau = \frac{a}{b + l}$$

O parâmetro a dependia somente da diferença de temperatura nos terminais do par termoeletrico, enquanto que b era constante. a na verdade, era proporcional à diferença de potencial no circuito, e b era proporcional à resistência das barras de metal do par termoeletrico e dos contatos entre o par e os fios de diferentes componentes.

Estes resultados foram descritos em dois artigos publicados em 1826, e num livro publicado em 1827. No segundo desses artigos, b e l foram juntados num só termo, e Ohm chegou à forma da lei usada até hoje.

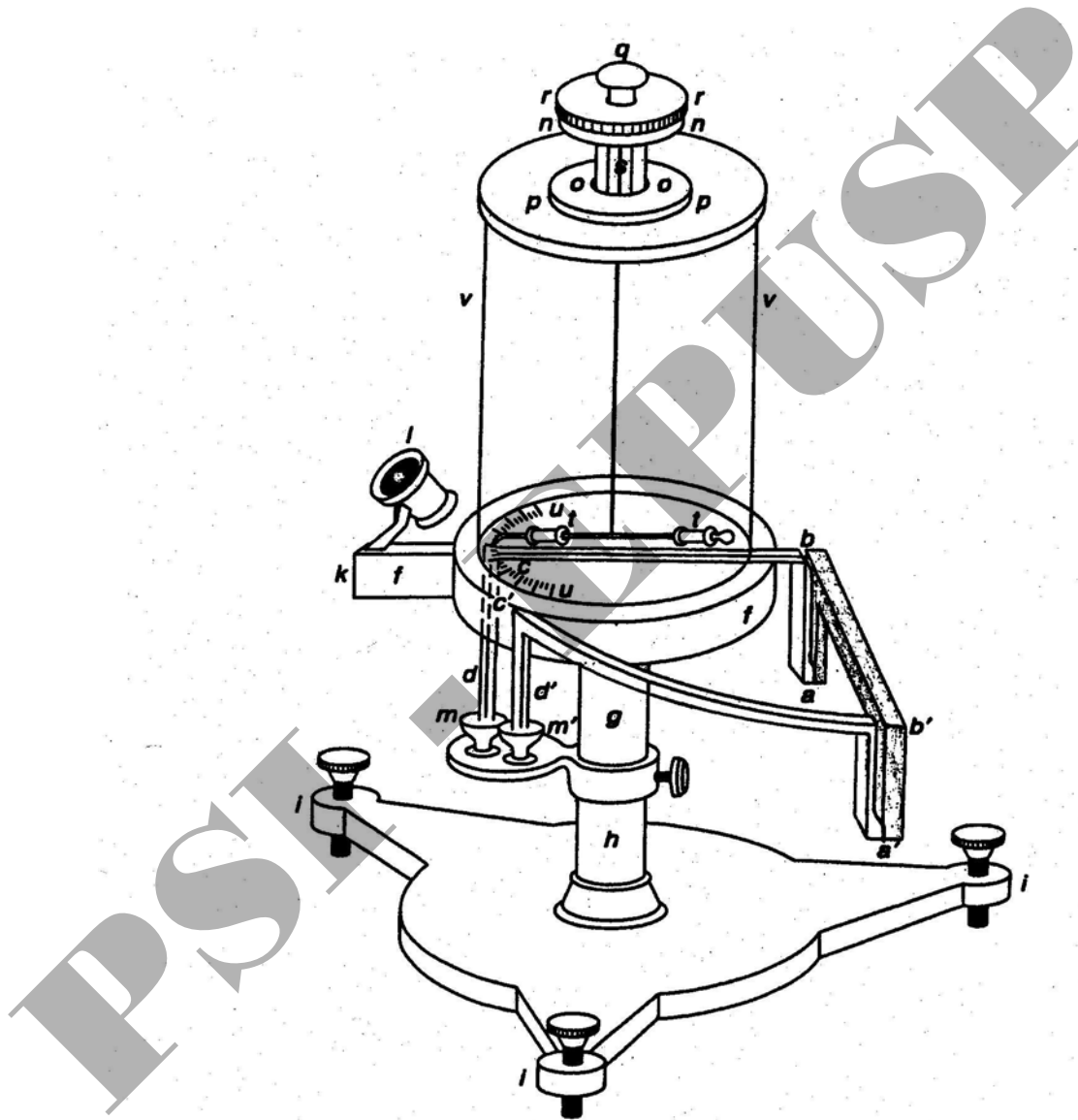


Figura 9 – Circuito termoeletrico de Ohm. $abb'a'$: fita de bismuto; $abcd$ e $a'b'c'd'$: fitas de cobre; mm' : copinhos cheios de mercúrio (para contato: mergulhava-se em cada pote uma das pontas do fio cuja resistência se queria determinar); v : cilindro de vidro; nop : parte fixa da balança de torção; qrs : parte móvel da balança de torção; tt : agulha magnética com pontas de marfim; uu : escala graduada; l : lente; a : junção fria do termopar (neve); a' : junção quente do termopar (água fervente). (modifica-

do de [1]).

Nem todos os materiais obedecem à Lei de Ohm – materiais que obedecem a esta lei são chamados *ôhmicos*. Na verdade, materiais *ôhmicos* também apresentam desvios da lei enunciada acima, se a temperatura do material não for mantida constante. Este efeito foi descoberto já pelo próprio Ohm, e descrito em seus artigos de 1826.

Bibliografia

- [1] – Keithley, J.F. – The Story of Electrical and Magnetic Measurements: from 500 B.C. to the 1940s., IEEE Press, New York, NY. EUA, 1999
- [2] – Whittaker, E. – A History of the Theories of Aether and Electricity. Thomas Nelson and Sons, Ltd, Londres, 1951
- [3] – Multímetros digitais RMS TX1 e TX3, TX-DMM, Tektronix Inc.

ANEXO I

Código de Cores

Resistores

O valor e a tolerância de resistores são indicados no corpo do resistor, através de código de cores, ou diretamente impressos com três dígitos significativos seguidos de uma letra para indicar um multiplicador: R = ohms, K = milhares de ohms e M = megaohms.

As cores apresentadas em faixas pintadas no corpo do resistor a partir de uma extremidade, com a seguinte equivalência:

- 0 – preto
- 1 – marrom
- 2 – vermelho
- 3 – laranja
- 4 – amarelo
- 5 – verde
- 6 – azul
- 7 – violeta
- 8 – cinza
- 9 – branco

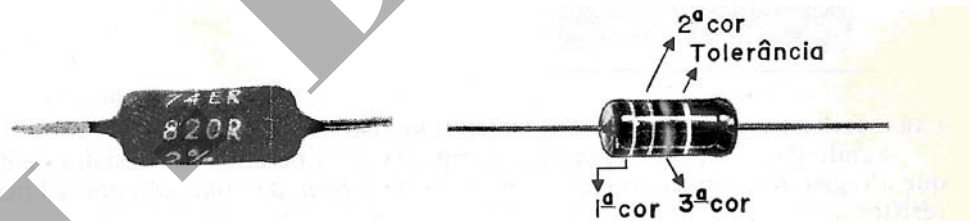


Figura A.2 – Resistor fixo de 820 ohms e Resistor com valor em código

A primeira faixa corresponde ao algarismo de maior ordem no valor ôhmico. A segunda indica o segundo algarismo; a terceira, o número de zeros e a quarta, a tolerância do resistor.

Tolerância: prata = 10 %; ouro = 5 %; 1 % vem normalmente impresso.