

PROVA 2 MATEMÁTICA I CCM

Dezembro 2022

Diferenciação

① Calcule a derivada das funções a seguir:

(a) $\sin((3x+2)(x+1)^2)$

(b) $\sin\left(\frac{x^4}{\cos x^2}\right)$

(c) $\operatorname{tg}(x)$

(d) $\sec(x)$

(e) $\sin^2 x \cos x^2 \operatorname{tg} x$

(f) $\cos(\sin(\cos(\sin x)))$

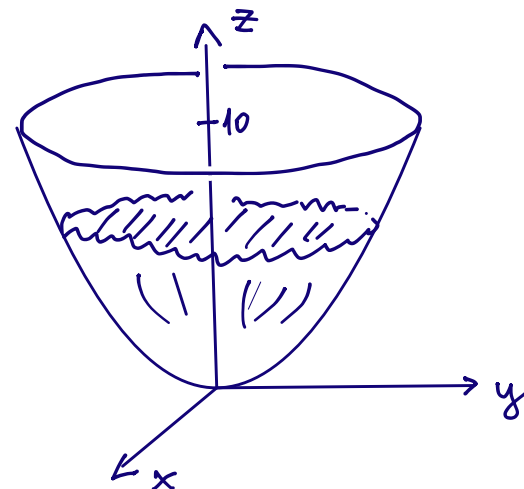
(g) $\ln(3\cos x - 1/x)$

(h) $\int_1^{e^x} \frac{\cos^3(1-\sqrt{t})}{(1+t^2+t^4)^8} dt$

(i) $e^{e^x} - (e^e)^x$

(j) $\ln(\log_x e)$

- ② Um reservatório de água tem a forma de um parabolóide de equação $f(x, y) = x^2 + y^2$. A unidade de medida é o metro e a altura do reservatório é 10m. Uma torneira aberta derrama $0,2 \text{ m}^3$ de água por minuto no reservatório. Qual é a taxa de variação da altura do nível de água quando essa altura é 4m.



- ③ (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^5 - 5x + c$, onde $c \in \mathbb{R}$, indicando os pontos de máximo e mínimo, os valores da função nesses pontos, e os intervalos nos quais f é côncava e convexa.
- (b) Prove que, independentemente do valor de $c \in \mathbb{R}$, f nunca tem duas raízes no intervalo $[0, 1]$.
- ④ Esboce os gráficos de $f(x) = x^2 - 2\cos x$ e de sua derivada. Indique tudo o que for relevante nos gráficos, como pontos de máximo e mínimo, intervalos onde as funções são crescentes, decrescentes, côncavas, convexas, etc. Seja cuidadoso.

- ⑤ (a) Mostre que se $f'(x) \geq M$ para todo $x \in [a, b]$, então $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.
- (b) Mostre que se $f'(x) \leq m$ para todo $x \in [a, b]$, então $f(b) \leq f(a) + m(b-a)$.
- (c) Enuncie e demonstre um resultado análogo no caso em que $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in [a, b]$.
- (d) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vale a desigualdade
- $$(1+x)^n > 1+nx \quad \forall x \in (-1, 0) \cup (0, \infty).$$
- (e) Mostre que, para todo $\alpha \in (0, 1)$, vale a desigualdade
- $$(1+x)^\alpha < 1+\alpha x \quad \forall x \in (-1, 0) \cup (0, \infty).$$