MAP 0313 - 2022 2° Semestre - IME USP
Lista sobre Diferenças, Interpolação, Integração

Questão 1 Uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ foi tabela e construiu-se a seguinte tabela.

x_i	0	0.5	0.75	1
$y_i = f(x_i)$	0	0.479	0.682	0.841

(a) Determine o polinômio interpolador $p(x)$ dessa tabela.

(b) Se, para todo $x \in [0,1]$, tem-se $-1 \leq f^{(4)}(x) \leq 1$, o que você pode dizer de $|f(0.65) - p(0.65)|$?

Questão 2 Considere a tabela de diferenças simples de uma certa função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

x_i	$f(x_i)$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
-1	4						
		3					
-0.5	1		10				
		$\cdots$		-21			
0	8		-11		17		
		-4		-4		$\cdots$	
0.5	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
		$\cdots$		$\cdots$		2	
1.0	$\cdots$		-3		18		
		-22		$\cdots$			
1.5	-37		$\cdots$				
		$\cdots$					
2.0	-32						

(a) Preencha as lacunas da tabela.

(b) Determine o polinômio interpolador da tabela apresentada (toda), escreva esse polinômio na forma de Newton.

(c) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 3 que interpola f nos 4 últimos pontos da tabela apresentada

Questão 3 Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ foi tabelada em $n+1$ pontos distintos $x_k,\ 0 \leq k \leq n$.

Para $j \in \{0, \ldots, n\}$ denote por $p_j(x)$ ao polinômio interpolador da tabela $(x_k, f(x_k)),\ 0 \leq k \leq j$.

Prove que se $1 \leq j \leq n$ então uma, e apenas uma, das duas seguintes possibilidades acontece:

(a) $p_{j-1}(x) \equiv p_j(x)$

(b) O grau de $p_j(x)$ é j.

Questão 4 A partir de uma função $g(t)$ obteve–se a seguinte tabela:

t_i	0	1	2	3	4	5	6
$g(t_i)$	-1.32	-3.16	-7.50	-10.7	-6.88	12.5	58.1

(a) Qual o grau do polinômio interpolador parece mais adequado para interpolar a tabela acima? Justifique suas afirmações.

(b) Suponha que g é derivável e demonstre que existe $\xi \in [0,1]$ tal que $g'(\xi) = 1.84$.

(c) Suponha que g é de classe $\mathcal{C}^2$ e demonstre que existe $\theta \in [0,2]$ tal que $g'(\theta) \geq g_2[0,1,2]$.

Questão 5 Calcule aproximações de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t^2 dt$ através dos seguintes métodos:

(a) Método dos trapézios com $n = 1,\ n = 2$ e $n = 3$, em cada caso indique a estimativa do erro cometido.

(b) Método de Simpson com $n = 1$ e $n = 2$.

(c) Qual o menor valor de n para garantir que o erro da aproximação de I pelo método de Simpson com esse n tenha valor absoluto menor ou igual a 10^{-4}?

Questão 6 A função $q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e, se $m = \frac{a+b}{2}$ tem–se que $s(m - x) = -s(m + x)$, para todo $x \in [0, \frac{b-a}{2}]$. Prove que, se $p(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2 e $s(x) = p(x) + q(x)$, então ao usar o método de Simpson para avaliar $\int\limits_a^b s(x)dx$ obtém-se o valor exato.

Questão 7 Seja $p(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a 3.

(a) Prove que $\int\limits_{-1}^{1} p(x)dx = p(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + p(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

(b) Use o item (a) para calcular $\int\limits_0^4 (x^3 + 2x^2 - 1)dx$.