MAP 0313 - MAP 2220
Integração - I

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular
2. Tabelável

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular
2. Tabelável
3. Obter aproximação para $\int_a^b f(x)dx$

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular
2. Tabelável
3. Obter aproximação para $\int_a^b f(x)dx$

Ideia Geral

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular
2. Tabelável
3. Obter aproximação para $\int_a^b f(x)dx$

Ideia Geral

1. Tabele f em pontos $a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular
2. Tabelável
3. Obter aproximação para $\int_a^b f(x)dx$

Ideia Geral

1. Tabele f em pontos $a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$
2. $L_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

Hipóteses

Problema

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Suficientemente regular
2. Tabelável
3. Obter aproximação para $\int\limits_a^b f(x)dx$

Ideia Geral

1. Tabele f em pontos $a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$
2. $L_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$
3. $c_j = \int_a^b L_j(x)dx$
4. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{j=0}^{n} c_j f(x_j)$

Fórmulas de Newton - Cotes (Fechadas)

Pontos igualmente espaçados - incluí extremidades

$n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ h = \frac{b-a}{n}$
$j = 0, 1, \ldots, n,\ \ x_j = a + j * h$

1. $n = 1,\ \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

Fórmulas de Newton - Cotes (Fechadas)

Pontos igualmente espaçados - incluí extremidades

$n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 1,\ \ h = \frac{b-a}{n}$
$j = 0, 1, \ldots, n, \quad x_j = a + j * h$

1. $n = 1,\ \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$
2. $n = 2,\ \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

Fórmulas de Newton - Cotes (Fechadas)

Pontos igualmente espaçados - incluí extremidades

$n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1, \; h = \frac{b-a}{n}$
$j = 0, 1, \ldots, n, \quad x_j = a + j * h$

1. $n = 1, \; \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$
2. $n = 2, \; \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$
3. $n = 3, \; \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b))$

Estimativas de Erro I - Polinômio interpolador

Recordar é viver

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ com $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$, $y_j = f(x_j)$.
$p_n(x)$ polinômio interpolador da tabela $[(x_j, y_j)]$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
$E(x) = f(x) - p_n(x)$

Fato 1.

Se $f(x)$ é de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $\overline{x} \neq x_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ e I é o menor intervalo que contem $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ então existe $\xi = \xi_{\overline{x}} \in I$ tal que

$$E(\overline{x}) = (\overline{x} - x_0)(\overline{x} - x_1) \cdots (\overline{x} - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{1}$$

Estimativas de Erro I - Polinômio interpolador

Consequências

Como $\overline{x} \neq x_j,\ j = 0, 1, \ldots, n$, faça $x_{n+1} = \overline{x},\ y_{n+1} = f(\overline{x})$ e considere $p_{n+1}(x)$ o polinômio interpolador da tabela $[(x_j, y_j)],\ 0 \leq j \leq n+1$.

escreva $p_{n+1}(x)$ na forma de Newton:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Estimativas de Erro I - Polinômio interpolador

Consequências

Como $\overline{x} \neq x_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, faça $x_{n+1} = \overline{x}$, $y_{n+1} = f(\overline{x})$ e considere $p_{n+1}(x)$ o polinômio interpolador da tabela $[(x_j, y_j)]$, $0 \leq j \leq n+1$.

escreva $p_{n+1}(x)$ na forma de Newton:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Como $x_{n+1} = \overline{x}$, tem-se $p_{n+1}(\overline{x}) = f(\overline{x})$, e resulta

$$f(\overline{x}) = p_n(\overline{x}) + (\overline{x} - x_0)(\overline{x} - x_1)\cdots(\overline{x} - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}]. \qquad (2)$$

Estimativas de Erro I - Polinômio interpolador

Consequências

Como $\overline{x} \neq x_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, faça $x_{n+1} = \overline{x}$, $y_{n+1} = f(\overline{x})$ e considere

$p_{n+1}(x)$ o polinômio interpolador da tabela $[(x_j, y_j)]$, $0 \leq j \leq n+1$.

escreva $p_{n+1}(x)$ na forma de Newton:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Como $x_{n+1} = \overline{x}$, tem-se $p_{n+1}(\overline{x}) = f(\overline{x})$, e resulta

$$f(\overline{x}) = p_n(\overline{x}) + (\overline{x} - x_0)(\overline{x} - x_1)\cdots(\overline{x} - x_n) f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}]\,. \tag{2}$$

De (1) e (2) vem que, se $\overline{x} \neq x_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ e I é o menor intervalo que contem $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ então existe $\xi \in I$ tal que
$f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Estimativas de Erro I - Polinômio interpolador

Fato 2.

A função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n, x\right] & se \ x \neq x_j \\ \frac{d}{dx} f\left[x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_n, x\right]\big|_{x=x_j}, & se \ x = x_j \end{cases} \tag{3}$$

é contínua.

Notação

Definindo $f\left[x_0, \ldots, x_j, \ldots, x_n, x_j\right] = \frac{d}{dx} f\left[x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_n, x\right]\big|_{x=x_j}$ a função definida no fato 2 será escrita como

$$g(x) = f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n, x\right]$$

para todo $x \in [a, b]$.

Estimativas de Erro I - Polinômio interpolador

Lembre que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ e considere a função $g(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$ que acabou de ser definida para $x \in [a, b]$.
Para $h \neq 0$ considere a diferença $g[x, x+h]$ que será representada como $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x+h]$.
Existe $\lim\limits_{h \to 0} g[x, x+h]$ (por que?) e este limite será denotado por

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x].$$

Fato 3.

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ e I é o menor intervalo que contém $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e x, então existe $\xi \in I$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x] = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}.$$

Estimativas de Erro II - Fómulas de Newton-Cotes

As estimativas de erros para aproximações as fórmulas de Newton-Cotes apresentadas antes são obtidas com os resultados que se expuseram acima e são (como visto em aula):

Estimativas de erros: Trapézios ($n = 1$) e Simpson ($n = 2$)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $h = \frac{b-a}{n}$
$j = 0, 1, \ldots, n$, $x_j = a + j * h$

1. $n = 1$, $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + T_1$ com $|T_1| \leq \frac{h^3}{12} M_1$, para $M_1 = \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$.
2. $n = 2$, $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) + T_2$ com $|T_2| \leq \frac{h^5}{90} M_2$, para $M_2 = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$.

Estimativas de Erro II - Fómulas de Newton-Cotes

Para $n \geq 3$ podem-se obter fórmulas análogas às anteriores para estimativas de erros, apesar de não terem sido demonstradas nas aulas apresentam-se aqui essas fórmulas para $n = 3$ e $n = 4$.

Estimativas de erros: $n = 3$ (regra dos $\frac{3}{8}$) e $n = 4$

$n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1, \ h = \frac{b-a}{n}$

$j = 0, 1, \ldots, n, \quad x_j = a + j * h$

1. $n = 3, \ \int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)) + T_3$ com

   $|T_3| \leq \frac{3h^5}{80} M_3$, para $M_3 = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$.

2. $n = 4, \ \int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b)) + T_4$

   com $|T_4| \leq \frac{8h^7}{945} M_4$, para $M_4 = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(6)}(\xi)|$.