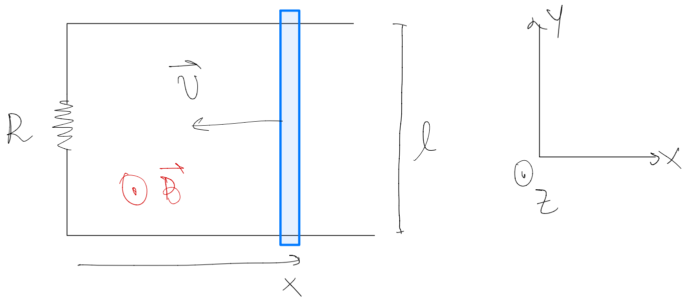
RESOLUÇÃO LISTA 3

Q.1



Informações dadas:

- Barra se move p/ esquerda $\Rightarrow \vec{v} = v(-\hat{e}_x)$
- Campo magnético $\Rightarrow \vec{B}(t) = \beta t \, \hat{e}_z$, $\beta > 0$

a) Força eletromotriz: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$, onde $\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi_m = \iint (\beta t \, \hat{e}_z) \cdot (dx\,dy\,\hat{e}_z) = \beta t \int_0^{\ell} dy \int_0^{x(t)} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_m = \ell\beta . t . x(t)}$$

Portanto $\mathcal{E} = -\dfrac{d}{dt}\left(\ell\beta t \, x(t)\right) = -\ell\beta \dfrac{d}{dt}(t.x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\ell\beta\left(x + t\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow$$

precisamos encontrar

» Como a barra se move p/ esquerda, temos que $\dfrac{dx}{dt} = -v$

Integrando $\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{dt'}dt' = -v\int_0^t \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) - \underbrace{x(0)}_{x_0} = -v.t \Rightarrow x(t) = x_0 - vt$,

Logo, $\mathcal{E} = -\ell\beta\left[x_0 - vt + (-v)t\right] \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\ell\beta(x_0 - 2vt)}$

b) Sabemos que a corrente em um circuito é dada por

$$\mathcal{E} = \underbrace{R}_{\text{Resistência do circuito}} \cdot I \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} \leftarrow \text{calculado} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = I(t) = -\frac{\ell B}{R}\left(x_0 - 2vt\right)}$$

↳ Queremos encontrar p/ qual tempo $t = t_f$ a corrente se anula: logo $I(t = t_f) = 0 \Rightarrow -\frac{\ell B}{R}\left(x_0 - 2vt_f\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \frac{x_0}{2v}}$$

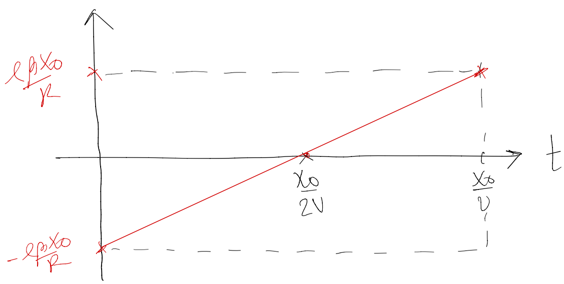
c) Gráfico da corrente:

$I(t) = -\frac{\ell B}{R}(x_0 - 2vt)$

p/ $t = 0 \Rightarrow I(0) = -\frac{\ell B x_0}{R}$

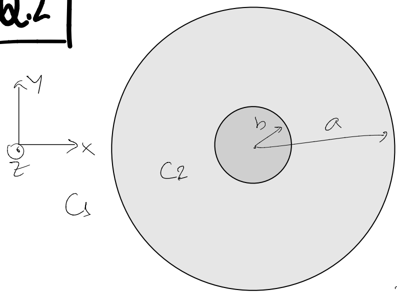
p/ $t = \frac{x_0}{2v} \Rightarrow I(0) = 0$

p/ $t = \frac{x_0}{v} \Rightarrow I(0) = \frac{\ell B x_0}{R}$



Logo, p/ o intervalo de tempo $0 \leq t < \frac{x_0}{2v}$, a corrente é negativa e portanto seu sentido é horário; enquanto que p/ $\frac{x_0}{2v} < t < \frac{x_0}{v}$, a corrente é positiva e portanto seu sentido é anti-horário

Q.2



a) Lembrando que a indutância mútua entre dois circuitos é a proporcionalidade entre fluxo magnético e corrente.

Logo, supondo que haja uma corrente I_1 passando pelo circuito C_1, ela gerará um fluxo magnético no circuito 2 dado por:

$$\Phi_{21} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$$

$\Rightarrow$ Como proposto, supomos que $b \ll a$ para que o campo $\vec{B}_1$ seja praticamente constante na área de C2

$\rightarrow$ Com isso, o campo $\vec{B}_1$ no centro é dado por $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2a}\hat{e}_z$

$$\Rightarrow \Phi_{21} = \iint \left(\frac{\mu_0 I_1}{2a}\hat{e}_z\right)\cdot\left(dA_2\hat{e}_z\right) = \frac{\mu_0 I_1}{2a}\iint dA_2 \Rightarrow$$

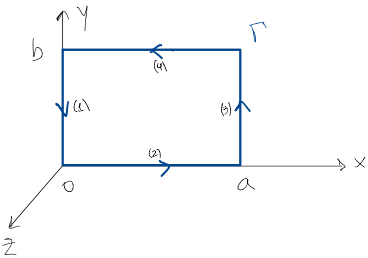
$$\Rightarrow \Phi_{21} = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a} I_1 \Rightarrow \boxed{M_{21} = M_{12} \equiv M = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}}$$

b) Força Eletromotriz: $\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}\Phi_{12} = -\frac{d}{dt}(M I_2) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 \pi b^2}{2a} I_0 \cos(\omega t)\right)$

$$= -\frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}\cdot I_0 \cdot \frac{d}{dt}\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_1 = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}\cdot I_0 \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t)}$$

Q3



→ informações:

- Campo elétrico $\vec{E}(y) = Ky\,\hat{e}_x$, $K>0$
- Campo magnético $\vec{B}(t) = B(t)\,\hat{e}_z$

a) Queremos calcular $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E}\cdot d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E}\cdot d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}\cdot d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E}\cdot d\vec{l}_4 =$

$$= \int_{(1)} \underbrace{(Ky\,\hat{e}_x)\cdot(dy\,\hat{e}_y)}_{\perp} + \int_{(2)} (Ky\big|_{y=0}\,\hat{e}_x)\cdot(dx\,\hat{e}_x) + \int_{(3)} \underbrace{(Ky\,\hat{e}_x)\cdot(dy\,\hat{e}_y)}_{\perp} + \int_{(4)} (Ky\big|_{y=b}\,\hat{e}_x)\cdot(dx\,\hat{e}_x) =$$

$$= \int_{(4)} (Kb\,\hat{e}_x)\cdot(dx\,\hat{e}_x) = Kb\int_a^0 dx = -Kab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -Kab}$$

b) Lei de Faraday: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\iint B(t)\,\hat{e}_z \cdot dA\,\hat{e}_z =$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(B(t).a.b\right) = -ab\frac{dB}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Kab = -ab\frac{dB}{dt} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = K \Rightarrow \int_0^t \frac{dB}{dt'}dt' = K\int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(t) - \underbrace{B(0)}_{B_0} = Kt \Rightarrow \boxed{B(t) = B_0 + Kt}$$

c) Lei de Gauss: $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho\, dv \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dv = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} dv \Rightarrow \iiint \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \rho/\epsilon_0\right) dv = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \rho = \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \epsilon_0 . \vec{\nabla}\cdot\left(Ky\,\hat{e}_x\right) =$$

$$= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(Ky\,\hat{e}_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}(Ky) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

Q.4 Informações:

- onda plana senoidal → campo elétrico
- Polarização: eixo x → campo elétrico
- Direção de propagação: crescente em z → campo elétrico e magnético
- Frequência: $f = 10^8\ Hz$ → campo elétrico e magnético
- Amplitude do campo magnético: $B_0 = 10^{-8}$ em $t=0$ e $z=0$ → campo magnético

(a) $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{e_x}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = E_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - ft\right)\right]\hat{e_x}$$

mas $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{10^8} = 3$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = E_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - 10^8 t\right)\right]\hat{e_x}$$; Além disso, temos que a amplitude do campo elétrico é c vezes maior que a do campo magnético, ou seja, $E_0 = c \cdot B_0 = 3\times10^8 \cdot 10^{-8} = 3$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z,t) = 3\cdot\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - 10^8 t\right)\right]\hat{e_x}}$$

Direção da polarização

Direção de propagação positiva em z

→ Para encontrar $\vec{B}$, usaremos a relação de ondas planas $\vec{B} = \frac{\hat{k}}{c}\times\vec{E}$ sendo $\hat{k}$ a direção de propagação que no caso é z ⇒

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\hat{e_z}}{c} \times 3\cdot\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - 10^8 t\right)\right]\hat{e_x} = 10^{-8}\cdot\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - 10^8 t\right)\right]\underbrace{(\hat{e_z}\times\hat{e_x})}_{\hat{e_y}}$$

$c = 3\times10^8$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(z,t) = 10^{-8}\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - 10^8 t\right)\right]\hat{e_y}}$$

b) Vetor de Poynting é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0} 3\times10^{-8} \cos^2\left[2\pi\left(\frac{z}{3}-10^8 t\right)\right] \underbrace{(\hat{e}_x \times \hat{e}_y)}_{\hat{e}_z} \Rightarrow$$

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{3\times10^{-8}}{4\pi\times10^{-7}} \cos^2\left[2\pi\left(\frac{z}{3}-10^8 t\right)\right]\hat{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{3}{40\pi}\cos^2\left[2\pi\left(\frac{z}{3}-10^8 t\right)\right]\hat{e}_z}$$

c) Período da onda. $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{T = 1 \,.\, \times10^{-8}\ s}$

Lembrando que vetor de Poynting tem unidade de potência por área, ou seja, $[\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$; Portanto, a potência da onda incidente na placa absorvedora é: $P_S = \iint \vec{S}\big|_{z=0} \cdot d\vec{A} = \frac{3}{40\pi}\cos^2\left(2\pi\times10^8 t\right) . 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P_S = \frac{3}{10\pi}\cos^2\left(2\pi\times10^8 t\right)}$$

Logo, a energia absorvida em um intervalo de três períodos é

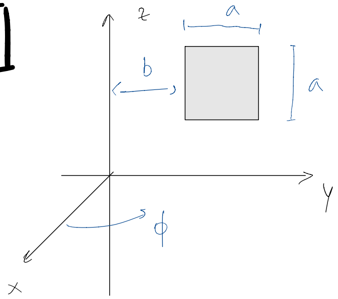
$$U = \int_0^{3T} P_S(t)\,dt = \frac{3}{10\pi}\int_0^{3T}\cos^2\left(2\pi\times10^8 t\right)dt$$

mas $\int \cos^2(\alpha x)\,dx = \frac{2\alpha x + \sin(2\alpha x)}{4\alpha}$

$$\text{Assim, } U = \frac{3}{10\pi}\left[\frac{2\cdot2\pi\times10^{-8}t + \operatorname{sen}\left(2\cdot2\pi\times10^{-8}t\right)}{2\cdot2\pi\times10^{-8}}\right]_0^{3T} = \frac{3}{10\pi}\left[\frac{4\pi\times10^{-8}\cdot 3T + \cancelto{0}{\operatorname{sen}\left(4\pi\times10^{-8}\cdot3T\right)}}{4\pi\times10^{-8}}\right]$$

$$\Rightarrow U = \frac{3}{10\pi}\cdot\frac{\cancel{4\pi\times10^{-8}}\cdot 3T}{\cancel{4\pi\times10^{-8}}} = \frac{9T}{10\pi} = \frac{9\times10^{-8}}{10\pi} \rightarrow \boxed{U = \frac{9}{\pi}\times10^{-9}\ J}$$

Q.5



» Informações:

- fio infinito ao longo do eixo z
- Campo do fio: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi$

a) Indutância mútua: $\underbrace{\Phi}_{} = M \cdot I$

↳ fluxo do campo produzido pelo fio na espira

$\Rightarrow M = \frac{1}{I}\iint \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$ no caso da espira no plano yz, temos que $x=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}(-\hat{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\hat{x}) \\ d\vec{A} = dz \cdot dy\,(-\hat{x}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{I}\iint \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\hat{x})\cdot dz \cdot dy\,(-\hat{x}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{b}^{a+b}\frac{1}{y}\,dy =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\underbrace{(z_2 - z_1)}_{a}\cdot \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0\, a}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}$$

b) Nesse caso, temos que a área da espira está orientada na direção z, logo $\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ pois $\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Como $\Phi = M \cdot I$ e $\Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \boxed{M = 0}$

c) No item a calculamos que $\Phi = M.I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) . I$$

Sendo $I \equiv I(t) = \alpha t^2 \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) . \alpha t^2$

Então, a força eletromotriz é dada por $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} =$

$$= -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \frac{d}{dt}(\alpha t^2)$$

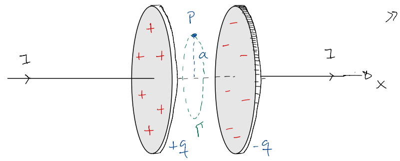
$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 a}{\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \alpha t \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ corrente induzida $I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{I_{ind} = -\frac{\mu_0 a}{\pi R} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \alpha t}$$

Pela Lei de Lenz $\Rightarrow$ sentido anti-horário

Q.6



» Informações:

∘ Campo elétrico entre placas $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{e}_x = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\cdot\hat{e}_x$

(I) Lei de Ampère-Maxwell: $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\cancel{I_{enc}}}_{=0,\ \text{pois } \nexists \text{ corrente fluindo dentro do capacitor}} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{E}\cdot \underbrace{d\vec{A}}_{dA\,\hat{e}_x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, dA = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\pi a^2\right) = \mu_0 \pi a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint B\hat{e}_\phi \cdot a\, d\phi\, \hat{e}_\phi = B.2\pi a = \mu_0 \pi a^2 \frac{\partial\sigma}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 a}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\mu_0 a}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q}{\pi R^2}\right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi R^2}\underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{\text{corrente}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 a}{2\pi R^2} I\,\hat{e}_\phi}$$

(II) Campo elétrico:

$$\vec{E}(x,t) = E_0\, e^{-\alpha(x-ct)^2}\hat{e}_y$$

⇒ Campo $\vec{E}$ só tem componente y

↳ Logo, o rotacional em coordenadas cartesianas é dado por

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\cancel{\frac{\partial}{\partial z}E_y}^{\,0}\,\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial x}E_y\,\hat{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = E_0\frac{\partial}{\partial x}e^{-\alpha(x-ct)^2} = E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\alpha(x-ct)^2\right] =$$

$$= -\alpha E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2}\cdot 2(x-ct) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -2\alpha(x-ct)E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 2\alpha(x-ct)E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2}\,\hat{e}_z$$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \hat{e}_x\frac{dB_x}{dt} + \hat{e}_y\frac{dB_y}{dt} + \hat{e}_z\frac{dB_z}{dt}$$

componente x é igual a zero
componente y também
componente z diferente de zero

$\Rightarrow$ Solução geral:

» Componente x: $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = B_{0x} = \text{constante}}$

» Componente y: $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = B_{0y} = \text{constante}}$

» Componente z: $\frac{\partial B_z}{\partial t} = 2E_0 \cdot \alpha\,(x-ct)\, e^{-\alpha (x-ct)^2}$

podemos reescrever $2\alpha (x-ct) e^{-\alpha(x-ct)^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} e^{-\alpha(x-ct)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{E_0}{c}\frac{\partial}{\partial t} e^{-\alpha(x-ct)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E_0}{c} e^{-\alpha(x-ct)^2}\right] \xrightarrow{\text{integrando}}$$

$$B_z(t) = B_{0z} + \frac{E_0}{c} e^{-\alpha(x-ct)^2}$$

Portanto, $\boxed{\vec{B}(t) = B_{0x}\,\hat{e_x} + B_{0y}\,\hat{e_y} + \left[B_{0z} + \frac{E_0}{c} e^{-\alpha(x-ct)^2}\right]\hat{e_z}}$

↳ onde a condição inicial é dada por B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}

↳ No caso em que $B_{0x} = B_{0y} = B_{0z} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(t) = \frac{E_0}{c} e^{-\alpha(x-ct)^2}\,\hat{e_z}}$$

Q.7

→ Informações

- Onda plana monocromática se propagando no sentido positivo de z

seno ou cosseno

↳ apenas uma cor (frequência)

↳ teremos $(z - ct)$

- Campo elétrico oscila na direção x

↳ polarização : versor $\hat{e_x}$

- Para $t=0$ e $z=0$, amplitude é $E_0/2$

a) $\vec{E}(z,t) = E_0 \cdot \text{sen}(kz - \omega t + \delta)\hat{e_x}$, mas $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$

↳ fase genérica

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = E_0 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \delta\right]\hat{e_x}$$

Agora precisamos aplicar $t=0$, $z=0$

$$\vec{E}(0,0) = E_0 \cdot \text{sen}(\delta)\,\hat{e_x} \Rightarrow \text{devemos ter que } \text{sen}\,\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z,t) = E_0 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{6}\right]\hat{e_x}}$$

⇒ O campo magnético obtemos por :

$$\vec{B} = \frac{\hat{k}}{c} \times \vec{E}, \quad \text{sendo } \hat{k} = \hat{e_z} \text{ (direção de propagação)}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c}\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{6}\right](\hat{e_z} \times \hat{e_x})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c}\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{6}\right]\hat{e_y}}$$

b) Vetor de Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{c} \cdot \text{sen}^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{6}\right](\hat{e_x} \times \hat{e_y})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\text{sen}^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{6}\right]\hat{e_z}}$$

c) Pela força de Lorentz $\Rightarrow \vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ sendo que, no instante

$t=0$, $\vec{v} = \frac{c}{2}\hat{e_z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{B}\Big|_{t=0} = \frac{c}{2} \cdot \frac{E_0}{c} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - \cancelto{0}{ct}) + \frac{\pi}{6}\right](\hat{e_z} \times \hat{e_y}) =$$

$$= -\frac{E_0}{2} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - \cancelto{0}{ct}) + \frac{\pi}{6}\right]\hat{e_x} = -\frac{E_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{\pi}{6}\right)\hat{e_x}$$

$$\Rightarrow \vec{F_0} = \vec{F}(t=0) = q_e\left[E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{\pi}{6}\right)\hat{e_x} - \frac{E_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{\pi}{6}\right)\hat{e_x}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{F_0} = \frac{q_e E_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{\pi}{6}\right)\hat{e_x}$$

Também queremos calcular a força na origem, ou seja, $z=0$

$$\Rightarrow \vec{F_0} = \frac{q_e E_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{e_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_0} = \frac{q_e E_0}{4}\hat{e_x}}$$

Q.8 $\rightarrow$ Informações:

- Luz monocromática
- incidência perpendicular
- intensidade I e seção reta circular de raio R

a) Se partirmos da fórmula que consta no formulário $\Rightarrow I = \langle \vec{S} \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0}$

e também que $E_m = cB_m$ $\Rightarrow$ tb no formulário

$$\Rightarrow I = \frac{cB_m^2}{2\mu_0} \Rightarrow \boxed{B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}}$$

b) Como a intensidade da luz incidente tem unidade de $\frac{\text{ENERGIA}}{\text{ÁREA} \times \text{TEMPO}}$

Ficamos com ENERGIA ABSORVIDA = INTENSIDADE × ÁREA × TEMPO

ÁREA ↳ da placa

TEMPO ↳ período T

$$\Rightarrow \boxed{E = I \cdot \pi R^2 \cdot T}$$

FORMULÁRIO

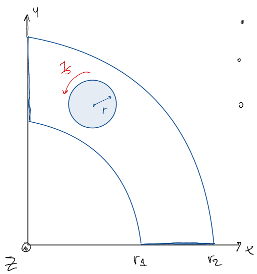
c) ENERGIA MÉDIA $(\mathcal{E}_m)$ $= \langle u \rangle \times$ VOLUME $= \dfrac{\langle S \rangle}{c} \cdot \pi R^2 \cdot L$,

$\langle u \rangle$ ↳ energia média contida em um volume

mas $\langle S \rangle = I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{I L \pi R^2}{c}}$$

Q.9



→ Informações:

- circuito com resistência R
- Solenóide muito longo com n espiras por unidade de comprimento
- $2r < r_2 - r_1$ (contido no circuito)
- Com a corrente I_s temos $\vec{B}_s = \mu_0 n I_s \hat{e}_z$ e $\dfrac{dI_s}{dt} = \beta > 0$

a) $\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint \mu_0 n I_s \hat{e}_z \cdot dA \hat{e}_z =$

$= \mu_0 n I_s \cdot \iint dA = \mu_0 n I_s \cdot \pi r^2 \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{\Phi_B(t) = \mu_0 n \pi r^2 I_s(t)}$$

b) Indutância mútua entre solenóide e circuito

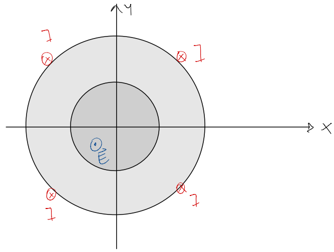
$$M = \frac{\Phi_B}{I_s} \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 n \pi r^2}$$

c) Força eletromotriz: $\varepsilon = -\dfrac{d}{dt}\Phi_B = -\mu_0 n \pi r^2 \dfrac{dI_s}{dt} \Rightarrow$

$$\rightarrow \varepsilon = R I_{ind} = -\mu_0 n \pi r^2 \beta \Rightarrow \boxed{I_{ind} = -\frac{\mu_0 n \pi r^2}{R} \beta}$$

Como $\beta > 0 \Rightarrow I_{ind} < 0 \Rightarrow$ sentido horário

Q.10



→ Informações:

- Corrente I fluindo na casca
- Campo elétrico dependente do tempo na região cilíndrica.

a) Campo magnético: Lei de Ampère-Maxwell (pois estamos interessados em calcular o campo $\vec{B}$ gerado pelo campo $\vec{E}$)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

i) Região $r<a$: $I_{enc}=0$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\oint}_{\text{circuito de raio } r} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\underbrace{\iint}_{\text{área de raio } r} \vec{E}\cdot d\vec{A}$

$$\begin{cases} \vec{B} = B\hat{e}_\phi \\ d\vec{l} = dl\,\hat{e}_\phi \\ \vec{E} = kt\,\hat{e}_z \\ d\vec{A} = dA\,\hat{e}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B.2\pi r = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(kt.\pi r^2\right) \Rightarrow B.2\pi r = \mu_0\epsilon_0 . k\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 k r}{2}\hat{e}_\phi} \quad p/\ r<a$$

ii) Região $r>a$: $I_{enc}=0$ $\Rightarrow$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B.2\pi r = \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\left(kt.\pi a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 k a^2}{2r}\hat{e}_\phi} \quad p/\ r>a$$

b) Para calcular o campo magnético devido à casca cilíndrica (e somente ela) usamos Lei de Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Γ → Amperiana de raio $r>2a$

$\Rightarrow$ Como I flui p/ a direção negativa de z $\Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = B(-\hat{e}_\phi) \\ d\vec{l} = dl\,\hat{e}_\phi \end{cases}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = -B.2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi}$$

c) Para que o campo elétrico seja na região $r>2a$, devemos ter

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_0\epsilon_0 k a^2}{2r}\hat{e}_\phi - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{\mu_0} I}{\cancel{2}\pi \cancel{r}} = \frac{\cancel{\mu_0}\epsilon_0 k a^2}{\cancel{2r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \pi\epsilon_0 k a^2}$$

Q.11 Campo magnético composto de duas superposição:

$$\vec{B}_1 = -10\cos(3x - 9\times10^8 t)\,\hat{e_y}$$

$$\vec{B}_2 = -10\cos(3x + 9\times10^8 t)\,\hat{e_y}$$

Reescrevendo
$$\begin{cases} \vec{B}_1 = -10\cos(3x - 3ct)\,\hat{e_y} \\ \vec{B}_2 = -10\cos(3x + 3ct)\,\hat{e_y} \end{cases}$$

(a) O número de onda aparece no argumento da função trigonométrica da onda plana:

fase genérica

$$|\vec{B}| = B_0 \cdot \cos(\underbrace{kx - \omega t}_{} + \phi) \quad \text{ou} \quad |\vec{B}| = B_0 \cdot \cos(\underbrace{kx + \omega t}_{} + \phi)$$

p/ uma onda que viaja no sentido positivo do eixo x

p/ uma onda que viaja no sentido negativo do eixo x

Logo,
$$\begin{cases} \vec{B}_1 = -10\cdot\cos(k_1 x - \omega_1 t), \text{ onde } k_1 = 3 \text{ e } \omega_1 = 3c \\ \vec{B}_2 = -10\cdot\cos(k_2 x + \omega_2 t), \text{ onde } k_2 = 3 \text{ e } \omega_2 = 3c \end{cases}$$

$$\boxed{k_1 = k_2 = 3\,m^{-1}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kc}$$

e da relação: $v = \lambda \cdot f = \frac{2\pi}{k}\cdot\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$

$f =$

$$\rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\omega_1}{k_1}\hat{e_x} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = c\,\hat{e_x}}$$

$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\rightarrow \vec{v}_2 = \frac{\omega_2}{k_2}(-\hat{e_x}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = -c\,\hat{e_x}}$$

b) Para calcular o campo elétrico da onda plana em questão, partimos da fórmula $\vec{B} = \frac{\hat{k}}{c}\times\vec{E} \longrightarrow \hat{k}\times\vec{E} = c\vec{B} \xrightarrow{\hat{k}\,\times}$

$$\hat{k}\times(\hat{k}\times\vec{E}) = \hat{k}\times c\vec{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\hat{k}\circ\vec{E})}_{=0}\hat{k} - \underbrace{(\hat{k}\circ\hat{k})}_{1}\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = c\vec{B}\times\hat{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = c\vec{B}_1\times\hat{k} = -10\,c\cdot\cos(3x-3ct)\underbrace{\hat{e}_y\times\overset{\hat{k}}{\hat{e}_x}}_{-\hat{e}_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1(x,t) = 10\cdot c\cdot\cos(3x-3ct)\,\hat{e}_z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = c\vec{B}_2\times\hat{k} = -10c\cdot\cos(3x+3ct)\underbrace{\hat{e}_y\times(-\hat{e}_x)}_{\hat{e}_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2(x,t) = -10c\cdot\cos(3x+3ct)\,\hat{e}_z}$$

c) Campo magnético total:

$$\vec{B} = -10\cdot\cos(3x-3ct)\hat{e}_y - 10\cdot\cos(3x+3ct)\hat{e}_y =$$

$$= -10\left[\underbrace{\cos(3x-3ct) + \cos(3x+3ct)}\right]\hat{e}_y$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

→ formulário
$A = 3x-3ct$
$B = 3x+3ct$

$$= -10\times 2\times\cos\left(\frac{6x}{2}\right)\cdot\underbrace{\cos\left(-\frac{6ct}{2}\right)}_{\cos(-x)=\cos(x)} = -20\cdot\cos(3x)\cdot\cos(3ct)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = -20\cdot\cos(3x)\cdot\cos(3ct)\,\hat{e}_y}$$

Campo elétrico total:

$$\vec{E} = 10\cdot c\cdot\left[\underbrace{\cos(3x-3ct) - \cos(3x+3ct)}\right]\hat{e}_z$$

$$\cos A - \cos B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

formulário

$$= 10\cdot c\cdot 2\cdot\text{sen}\left(\frac{6x}{2}\right)\cdot\underbrace{\text{sen}\left(-\frac{6ct}{2}\right)}_{\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -20c \cdot \operatorname{sen}(3x) \cdot \operatorname{sen}(3ct)\,\hat{e}_z}$$

Logo, o vetor de Poynting fica

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (-20c) \cdot \operatorname{sen}(3x) \cdot \operatorname{sen}(3ct)(-20) \cos(3x) \cos(3ct)\,(\hat{e}_z \times \hat{e}_y)$$

$$= \frac{400c}{\mu_0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(3x)}_{\frac{\operatorname{sen}(6x)}{2}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(3ct) \cdot \cos(3ct)}_{\frac{\operatorname{sen}(6ct)}{2}}\,(-\hat{e}_x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = -\frac{100c}{\mu_0} \cdot \operatorname{sen}(6x) \cdot \operatorname{sen}(6ct)\,\hat{e}_x}$$

d) Para sabermos se a radiação transporta energia, tomamos a média temporal do vetor de Poynting $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}|\,dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{100 \cdot c}{\mu_0} \cdot \operatorname{sen}(6x) \cdot \operatorname{sen}(6c \cdot t)\,dt =$$

$$= \frac{100c \operatorname{sen}(6x)}{T\mu_0} \int_0^T \operatorname{sen}(6ct)\,dt = \frac{100c \cdot \operatorname{sen}(6x)}{T\mu_0} \cdot (-1) \frac{\cos(6c \cdot t)}{6c} \Big|_0^T =$$

$$= -\frac{100 \cdot c}{T\mu_0} \cdot \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6c} \cdot \left[\cos(6cT) - \cos(0)\right] = \frac{-100}{T\mu_0 6} \operatorname{sen}(6x) \cdot \left[\cos(6cT) - 1\right]$$

Como $T = \frac{2\pi}{w}$ e $w = kc \Rightarrow T = \frac{2\pi}{kc} \Rightarrow \cos(6c \cdot T) = \cos\left(6c \cdot \frac{2\pi}{kc}\right) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{6}{k}\right) \Rightarrow$

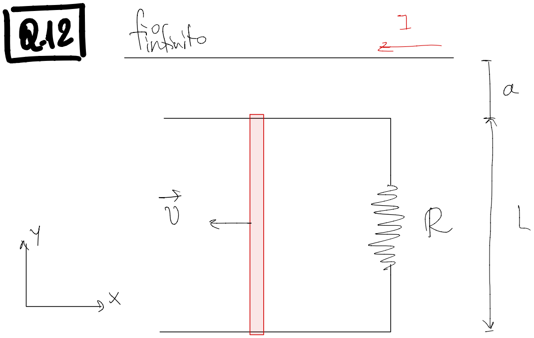
$\hookrightarrow k = 6$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{-100}{T\mu_0 \cdot 6} \operatorname{sen}(6x) \cdot [\cancel{\cos(2\pi)} - 1] \Rightarrow$$

0

$\Rightarrow$ Logo, $\boxed{\langle \vec{S} \rangle = 0}$ Portanto, não há transporte de energia.

Q12



→ Informações:

- Campo do fio: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{e}_z$ na região do circuito

a) Vamos calcular o fluxo do campo magnético:

$$\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{e}_z \cdot dA\,\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{a+L}\frac{1}{y}\,dy\int_0^x dx = \frac{\mu_0 I x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

$r \to \sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$

$$\Rightarrow \Phi_B(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)x(t)$$

Logo a força eletromotriz $\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\frac{dx}{dt} \Rightarrow$ $\left(\frac{dx}{dt} = -v\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = +\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}$$

b) $I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I_{ind} = +\frac{\mu_0 I v}{2\pi R}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}$

↳ como a área está aumentando, então o fluxo magnético também está, por consequência (Lei de Lenz), a corrente será no sentido horário

c) Para calcular a força,

$$\vec{F}_m = \int |I_{ind}|\,d\vec{l}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\int_a^{a+L} dy\,\hat{e}_y \times \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,\hat{e}_z =$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{a+L} \frac{dy}{y} \cdot \hat{e}_x = \frac{\mu_0^2 I^2 v}{4\pi^2 R} \ln^2\left(\frac{a+L}{a}\right) \hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_M = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2 \frac{v}{R} \hat{e}_x}$$

Q.13

→ Informações:

- Campo magnético: $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{H} \hat{e}_z$

» PARTE (I)

a) Vamos calcular o fluxo do campo $\vec{B}$ no próprio solenóide

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$ → para apenas uma espira ⇒

$$\Rightarrow \Phi_B = N \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 N^2 I}{H} \iint \hat{e}_z \cdot dA \hat{e}_z = \frac{\mu_0 N^2 I}{H} \cdot \iint dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{H} I$$

Logo, a auto-indutância é $\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 R^2 \pi}{H}}$

b) Para calcular o campo elétrico induzido ⇒

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oiint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Teremos duas regiões:

(i) Dentro do solenóide $(r < R)$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E_\phi = -\frac{d}{dt} \iint \frac{\mu_0 N \cdot I(t)}{H} \hat{e}_z \cdot dA \hat{e}_z = -\frac{\mu_0 N}{H} \frac{d}{dt} \left(I(t) \cdot \pi r^2\right)$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\pi r} \cdot E_\phi = -\frac{\mu_0 N \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{H} \frac{d}{dt}(at) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 N \cdot a \cdot r}{2H} \hat{e}_\phi}$$

(ii) Fora do solenóide $(r > R)$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r . E\phi = -\frac{d}{dt} \iint \frac{\mu_0 N I(t)}{H} \hat{e_z} \cdot dA \hat{e_z} = -\frac{\mu_0 N}{H} \frac{d}{dt} \left(I(t) . \pi R^2 \right)$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\pi} r . E\phi = -\frac{\mu_0 N \cancel{\pi} R^2}{H} . \frac{d}{dt}(at) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 N . a}{2H} . \frac{R^2}{r} \hat{e_\phi}}$$

» PARTE (II)

Campo elétrico: $\vec{E} = (hx + pxyt)\hat{e_x}$

Campo magnético: $\vec{B} = ay\,\hat{e_x} + bxt^2\,\hat{e_z}$

c) Usando Lei de Gauss ~~na~~ forma diferencial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \xcancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}}^{\,0} + \xcancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}}^{\,0} \right) = \epsilon_0 . \frac{\partial E_x}{\partial x} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}(hx + pxyt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \epsilon_0 (h + pyt)}$$

d) Usando Lei de Ampère-Maxwell na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\cdot\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e_x} & \hat{e_y} & \hat{e_z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & 0 & B_z \end{vmatrix} = \xcancel{\partial_y B_z}^{\,0} \hat{e_x} + \left(\xcancel{\partial_z B_x}^{\,0} - \xcancel{\partial_x B_z}^{\,bt^2} \right) \hat{e_y} - \xcancel{\partial_y B_x}^{\,a} \hat{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = -bt^2 \hat{e_y} - a\hat{e_z} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 pxy \hat{e_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 \vec{J} = -\mu_0 \epsilon_0 pxy \hat{e_x} - bt^2 \hat{e_y} - a\hat{e_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\mu_0 \epsilon_0 pxy \hat{e_x} + bt^2 \hat{e_y} + a\hat{e_z} \right)}$$

Q.14

→ Informações:

- Temos o campo magnético de uma onda plana

$$\vec{B}(x,t) = B_0 . \text{sen}[k(x+ct)]\,\hat{e}_z$$

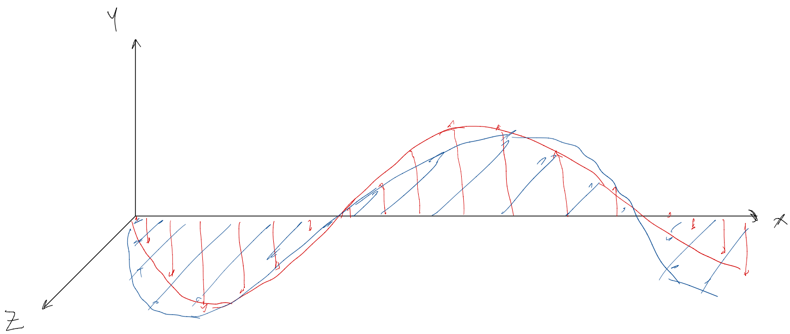
como temos $(x+ct)$, ela se propaga no sentido negativo de x

a) obtida na questão 11, a relação entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ de uma onda plana é

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{k} \rightarrow \text{sendo } \hat{k} = -\hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -cB_0 . \text{sen}[k(x+ct)]\,\hat{e}_z \times \hat{e}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(x,t) = -cB_0 \,\text{sen}[k(x+ct)]\,\hat{e}_y}$$



b) Vetor de Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(-cB_0)\text{sen}[k(x+ct)] . B_0 . \text{sen}[k(x+ct)]\,\hat{e}_y \times \hat{e}_z$

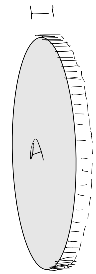
$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = -\frac{c}{\mu_0} B_0^2 \,\text{sen}^2[k(x+ct)]\,\hat{e}_x}$$

c) Densidade de energia (retirado do formulário)

$$u = \frac{S}{c}, \text{ onde } S = |\vec{S}| = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \,\text{sen}^2[k(x+ct)]$$

$$\Rightarrow u = \frac{B_0^2}{\mu_0} \text{sen}^2[k(x+ct)]$$

Logo a energia total transportada através da área perpendicular A é dada por



distância percorrida pela onda $dx = c\,dt$

$$U = \iiint u\,dV = \int u.A.dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{B_0^2}{\mu_0} A \int_0^{4T} \operatorname{sen}^2[k(x+ct)].c\,dt =$$

$$= \frac{A B_0^2 c}{\mu_0} \int_0^{4T} \operatorname{sen}^2[k(x+ct)]\,dt$$

Denominando $\theta = k(x+ct) \Rightarrow d\theta = kc.dt \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{kc}$

$$\Rightarrow U = \frac{ACB_0^2}{\mu_0} \int_{\theta_0}^{\theta_F} \operatorname{sen}^2\theta . \frac{d\theta}{kc} = \frac{AB_0^2}{k\mu_0} \int_{kx}^{(kx+kc4T)} \operatorname{sen}^2\theta . d\theta =$$

$$= \frac{AB_0^2}{k\mu_0} . \frac{1}{2}\left[\theta - \operatorname{sen}\theta.\cos\theta\right]\Big|_{kx}^{(kx+4kcT)} =$$

$$= \frac{AB_0^2}{2k\mu_0}\left[\cancel{kx} + 4kcT - \operatorname{sen}(kx+4kct).\cos(kx+4kcT)\right] - \frac{AB_0^2}{2k\mu_0}\left[\cancel{kx} - \operatorname{sen}(kx).\cos(kx)\right] =$$

$$= \frac{AB_0^2}{2k\mu_0}\left\{4kcT + \underbrace{\operatorname{sen}(kx).\cos(kx)}_{\frac{\operatorname{sen}(2kx)}{2}} - \underbrace{\operatorname{sen}[k(x+4cT)].\cos[k(x+4cT)]}_{\frac{\operatorname{sen}[2(k+4cT)]}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{AB_0^2}{2k\mu_0}\left[\frac{8kcT}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2kx)}{2} - \frac{\operatorname{sen}[2k(x+4cT)]}{2}\right] =$$

$$= \frac{AB_0^2}{4k\mu_0}\left[kcT + \operatorname{sen}(2kx) - \operatorname{sen}[2k(x+4cT)]\right] =$$

$$= \frac{AB_0^2}{4k\mu_0}\left[kcT + \operatorname{sen}(2kx) - \operatorname{sen}(2kx).\cos(8kcT) - \cos(2kx)\operatorname{sen}(8kcT)\right]$$

como $T = \frac{2\pi}{kc}$

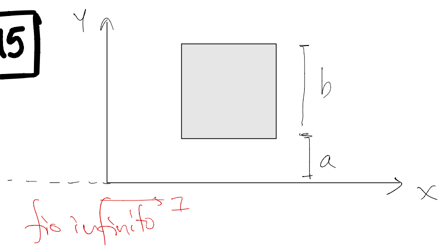
$$\Rightarrow U = \frac{AB_0^2}{4k\mu_0}\left[kc.\frac{2\pi}{kc} + \operatorname{sen}(2kx) - \operatorname{sen}(2kx).\cos\left(\frac{8kc.2\pi}{kc}\right) - \cos(2kx).\operatorname{sen}\left(\frac{8kc\,2\pi}{kc}\right)\right]$$

$$= \frac{AB_0^2}{4k\mu_0}\left[2\pi + \operatorname{sen}(2kx) - \operatorname{sen}(2kx).\underbrace{\cos(16\pi)}_{1} - \cos(2kx).\underbrace{\operatorname{sen}(16\pi)}_{0}\right] =$$

$$= \frac{AB_0^2}{4k\mu_0}\left[2\pi + \cancel{\operatorname{sen}(2kx)} - \cancel{\operatorname{sen}(2kx)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{\pi AB_0^2}{2k\mu_0}}$$

Q.15



→ Informações:

- Corrente do fio infinito: $I(t) = I_0.\cos(\omega t)$
- Módulo do campo do fio: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- Fluxo magnético: $\Phi_m = C.I(t)$

a) Como a indutância mútua é a constante de proporcionalidade entre o fluxo magnético e a corrente ⇒

$$\Rightarrow \boxed{M = C}$$

b) Sendo $\Phi_m = C.I(t) \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -C.\frac{dI}{dt} = -C I_0.\frac{d}{dt}\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = C.I_0\,\omega.\operatorname{sen}(\omega t)}$$

Logo, como $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = C \cdot I_0 \cdot w \cdot \operatorname{sen}(wt)}$$

c) O FLUXO MAGNÉTICO É CALCULADO POR:

$\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$, sendo na região da espira $\begin{cases} \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_z \\ d\vec{A} = dA \, \hat{e}_z \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi_m = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{e}_z \cdot dx\,dy\, \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{a}^{a+b} \frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{b} \cdot \ln(y) \Big|_{a}^{a+b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_m = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot I}$$

Logo $\boxed{C = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\dfrac{a+b}{a}\right)}$

d) Como $\Phi_m = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\dfrac{a+b}{a}\right) I_0 \cdot \cos(wt) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = R \cdot I_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_m \Rightarrow I_{ind} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi R} I_0 \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \frac{d}{dt}\cos(wt)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{ind} = \frac{\mu_0 b}{2\pi R} I_0 \cdot w \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \operatorname{sen}(wt)}$$

Para o intervalo $0 \leq t < \pi/w$, a corrente induzida é positiva, ou seja, pela lei de Lenz, ela será no sentido <u>anti-horário</u>

Q.16

⇒ Informações:

- $\vec{B}(x,y) = (\alpha y + \beta x)\hat{e}_x$
- $\vec{E}(t)$ tal que $\vec{E}(t=0) = \vec{E}_0$ uniforme
- Assumir $\vec{J} = 0$

a) Para encontrarmos a constante β, vamos usar a Lei do Divergente para o campo magnético ⇒

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}}^{0} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}}^{0} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

b) Pela Lei de Ampère-Maxwell ⇒

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \cancel{\mu_0\vec{J}}^{0} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{\partial_z B_x}^{0}\,\hat{e}_y - \partial_y B_x\,\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = -\alpha\hat{e}_z = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{-\alpha}{\mu_0\varepsilon_0}\hat{e}_z$$

- componente x: $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_x = E_{0x}$
- componente y: $\frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_y = E_{0y}$
- Componente z: $\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{-\alpha}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow E_z = E_{0z} - \frac{\alpha t}{\mu_0\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_{0x}\hat{e}_x + E_{0y}\hat{e}_y + E_{0z}\hat{e}_z - \frac{\alpha t}{\mu_0\varepsilon_0}\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\alpha t}{\mu_0\varepsilon_0}\hat{e}_z}$$

c) Pela Lei de Gauss, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \rho = \varepsilon_0\underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\text{zero}}$

Logo, $\boxed{\rho = 0}$

d) Não utilizamos Lei de Faraday ⇒ $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Também será zero pois o campo elétrico não depende explicitamente das coordenadas espaciais

zero pois $\vec{B}$ não depende explicitamente do tempo

$$\boxed{\text{Logo, } \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ é satisfeita}}$$

Q.17

→ Informações:

- Onda eletromagnética no vácuo

$$\vec{E}(x,t) = E_0 . \text{sen}(\alpha x) . \cos(\beta t) \hat{e_y} \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

a) Equação de onda (tem no formulário)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow$$ como estamos em 1D: $\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 . \text{sen}(\alpha x) . \cos(\beta t) \hat{e_y}\right] = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[E_0 . \text{sen}(\alpha x) . \cos(\beta t) \hat{e_y}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 . \cos(\beta t) . (-1) . \text{sen}(\alpha x) . \alpha^2 \hat{e_y} = \mu_0 \varepsilon_0 E_0 . \text{sen}(\alpha x) . (-1) . \cos(\beta t) \beta^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c^2} \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = c^2 \alpha^2 \Rightarrow \boxed{\beta = \alpha c}$$

b) Lei de Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e_x} & \hat{e_y} & \hat{e_z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\cancelto{0}{\partial_z E_y} \hat{e_x} + \partial_x E_y \hat{e_z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 . \text{sen}(\alpha x) . \cos(\beta t)\right] = E_0 . \alpha . \cos(\alpha x) . \cos(\beta t) \hat{e_z}$$

$$\Rightarrow E_0 \alpha . \cos(\alpha x) . \cos(\beta t) \hat{e_z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow$$

- Componente x: $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \rightarrow B_x = B_{0x}$
- Componente y: $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \rightarrow B_y = B_{0y}$
- Componente z: $\frac{\partial B_z}{\partial t} = -E_0 . \alpha . \cos(\alpha x) . \cos(\beta t) \Rightarrow$

$$\rightarrow B_z = B_{0z} - \frac{E_0 . \alpha}{\beta} \cos(\alpha x) \text{sen}(\beta t)$$

Logo $$\vec{B} = \underbrace{(B_{0x} \hat{e_x} + B_{0y} \hat{e_y} + B_{0z} \hat{e_z})}_{\vec{B_0}} - \frac{E_0 \alpha}{\beta} \cos(\alpha x) \text{sen}(\beta t)$$ $1/c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 - \frac{E_0}{c}\cos(\alpha x)\cdot \text{sen}(\beta t)\,\hat{e}_z}$$

c) Temos que $\vec{E}(x,t) = E_0 \cdot \text{sen}(\alpha x) \cdot \cos(\beta t)\,\hat{e}_y$

seja $\begin{cases} \alpha x = \frac{A+B}{2} \\ \beta t = \frac{A-B}{2} \end{cases} = \begin{cases} A+B = 2\alpha x \\ A-B = 2\beta t \end{cases}$

$+ \quad 2A = 2\alpha x + 2\beta t$

$\Rightarrow \underbrace{A = \alpha x + \beta t}$

logo $B = 2\alpha x - \alpha x - \beta t$

$\Rightarrow \underbrace{B = \alpha x - \beta t}$

Portanto, $|\vec{E}| = E_0 \,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \frac{2}{2} =$

$= \frac{E_0}{2} \cdot \underbrace{2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$ → Formulário $=$

$= \text{sen}\,A + \text{sen}\,B$

logo, $\boxed{\vec{E}(x,t) = \frac{E_0}{2}\left[\text{sen}(\alpha x + \beta t) + \cos(\alpha x - \beta t)\right]\hat{e}_y}$