Lista 02

Ex-02

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}$$

Os pontos fixos acontecem quando

$$x = \frac{2x}{1+x}$$

$x(1+x) = 2x$

$x + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)$

$x^* = (0, 1)$

Para a estabilidade

$f(x) = \frac{2x}{1+x}$ → derivar pela regra do quociente

$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

para $f'(0) = 2$ → estável

para $f'(1) = \frac{1}{2}$ → instável

* A condição é
$f'(x) < 1$ instável.
$f'(x) > 1$ estável

Para o cobweb, vocês podem calcular alguns valores de x (positivos e negativos) e sob iteração do mapa, obter os próximos.

→ lembrem-se de considerar a função $f(x)$ e a linha $y = x$ (identidade).
A trajetória estará representada no cobweb.

→ O desenho fica para vocês

Ex. 03 $\quad x_{n+1} = 3x_n - x_n^3$

Na condição de pf:

$$x = 3x - x^3$$

$$3x - x - x^3 = 0 \rightarrow 2x - x^3 = 0$$

$$x(2 - x^2) = 0$$

Assim, os pfs são:

$$x^* = (0, \pm\sqrt{2})$$

b) e c) É para desenhar o cobweb.
Que, mais uma vez, fica por conta de vocês.

d) Existe um ciclo de periodo 2 em ± 2

$$x_{n+1} = 3(\pm 2) - (\pm 2)^3$$

x_{n+1} pode ser -2 e $+2$, respectivamente.
Como consequência

$$2 \rightarrow -2 \rightarrow 2 \rightarrow -2 - \ldots$$

que explica o comportamento diferente p/ as c.I's
Veja com isso fica no cobweb.

Existe um "limite" onde $-2 < x_n < 2$
↳ isso mapeia dentro do ciclo de periodo 2.
Verifiquem e justifiquem isso.

Outra coisa a ser verificada é o que acontece se começar fora do ciclo de p2.

A conclusão a ser obtida (por meios matemáticos) é a de que $|x_n| \to \infty$ no limite de $n \gg 1$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

(isso espirala se afastando do ciclo de periodo 2)

Ex. 05
Em sequência

$\lambda = \lim_{n\to\infty} a_n$ ⇝ onde a_n é definido pelo ln do produtório do módulo da $f'(x_i)$.
(Vimos em aula)

Podemos fazer isso p/ muitas sequências (p/ cada valor de n)

$a_1 = \ln(|f'(p)|)$

$a_2 = \frac{1}{2}\ln(|-1|) = 0$ ⇝* Usar que $f'(p)f'(q) = -1$ quando $r = r_2$.

⋮

$a_3 = \frac{1}{3}\ln|f'(p)|$

...

Estenda o pensamento... Generalize e conclua que

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\ln|f'(p)| \\ a_{2k} = 0 \end{cases}$$

Quando $k\to\infty$; $a_{2k+1}\to 0$

Assim
$\lambda = 0$ em $r = r_2$ $(a_n \to 0\ ;\ n\to\infty)$

Generalizem para o r_m
valores maiores

— // —

EX 06: Por conta de vocês / Considerem as aulas do lab. também.
Leiam os últimos caps do livro (10, 11 e 12)

Ex. 05

Em um dobramento de período

$$f(x^*) = -1$$

Considerando x^* com x

$$x_1 = x_2 = x_3 \ldots = x^* \text{ é p.f!}$$

Na definição dos expoentes de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

Lembrem-se, que p/ um dobramento de período r_n, teremos "n" termos. O que nos leva em

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \ln |f'(x^*)|$$ ↑ calculem como chegar aqui.

$$\lambda = \ln|1| = 0.$$

↳ em $r = r_1$

E em $r = r_2$? ($p^{(2)}$ bifurca para $p^{(4)}$)

Aqui teremos pontos de $p^{(2)}$ p e q (por exemplo)

Definindo

$$f(p) = q \quad e \quad f(q) = p$$

$$f^{(2)'}(p) = -1 \quad e \quad (f^{(2)})'(q) = -1$$

As derivadas composta nos levará a concluir

$$f'(p) f'(q) = -1$$ ⇒ (Verifiquem como chega aqui)

Ex. 01. $X_{n+1} = f(X_n) = 1 - rX_n^2$

A condição p/ a superestabilidade $p^{(3)}$

$$\frac{d}{dx} f(f(f(x))) = 0$$

e

$$x = f(f(f(x))) = 0$$

Considerando um valor qualquer de x.

$$\frac{d}{dx} f(f(f(x))) = f'(f(f(x)))\, f'(f(x))\, f'(x)$$

deriva ...

$$= -8r^3 f(f(x)) f(x) x = 0$$

ou $x = 0$; ou $f(x) = 0$ ou $f(f(x)) = 0$

O "trabalho" é verificar, qual dos 3 casos acima é de $p^{(3)}$.

Perceba que, onde $f(f(x_n)) = 0$
$f(x_{n+1}) = 0$
$f(x_{n+2}) = 0$

Considerando $f(f(x)) = 0$

$f(f(f(x))) = x$ e $f(f(x)) = 0$

↳ Isso leva em $f(0) = 1 = x$

↳ $f(f(1)) = 1 - r(1-r)^2 = 0 \rightarrow$ o ciclo $p^{(3)}$ existe.