MAP2313 - Tópicos de Matemática Aplicada

1º Semestre de 2013 - Lista 1

Exercício 1 Se $f(x) = -x$, para $-L < x < L$ e se $f(x+2L) = f(x)$, determine expressões para $f(x)$ nos intervalos $L < x < 2L$ e $-3L < x < -2L$.

Exercício 2 Se $f(x) = x + 1$, $-1 < x < 0$, $f(x) = x$, $0 < x < 1$ e se $f(x + 2) = f(x)$, determine expressões para $f(x)$ nos intervalos $1 < x < 2$ e $8 < x < 9$.

Exercício 3 Calcule os coeficientes de Fourier da função f periódica de período 4 definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ (x+1)/2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Exercício 4 Supondo que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right)$$

e

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{k\pi x}{L} + \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right),$$

mostre formalmente que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) g(x)\, dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k)$$

Exercício 5 Seja f uma função definida no intervalo $[0, L]$, seccionalmente diferenciável. Estenda f ao intervalo $(0, 2L]$ de modo que ela seja simétrica em relação a L: $f(2L - x) = f(x)$, $0 \leq x < L$. Estenda então a função resultante a $(-2L, 0)$ como uma função ímpar e depois à reta toda como uma função periódica de período $4L$. Mostre que esta função tem a série de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{2L}$$

onde

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{2L}\, dx.$$

Qual é o limite da série para $x \in [0, L]$?

Exercício 6 Como deve ser feita a extensão de uma função originalmente definida em $[0, L]$ de forma que a sua série de Fourier envolva somente as funções $\cos[(2k-1)\pi x/2L]$, $k \geq 1$?

Exercício 7 Use o método de separação de variáveis para resolver a equação do calor $u_t = u_{xx}$, $0 < x < L$, $t > 0$, sob as condições

a) $L = 1$, $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $u(x,0) = x$;

b) $L = 1$, $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $u(x,0) = x$;

c) $u_x(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$;

d) $u_x(0,t) + u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$.

Exercício 8 Resolva os problemas

a) $u_t = u_{xx} + 1 - |1 - 2x|$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$;

b) $u_t = u_{xx} + e^{-t}(1 - x)$, $u(0,t) = 0$, $u_x(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$.