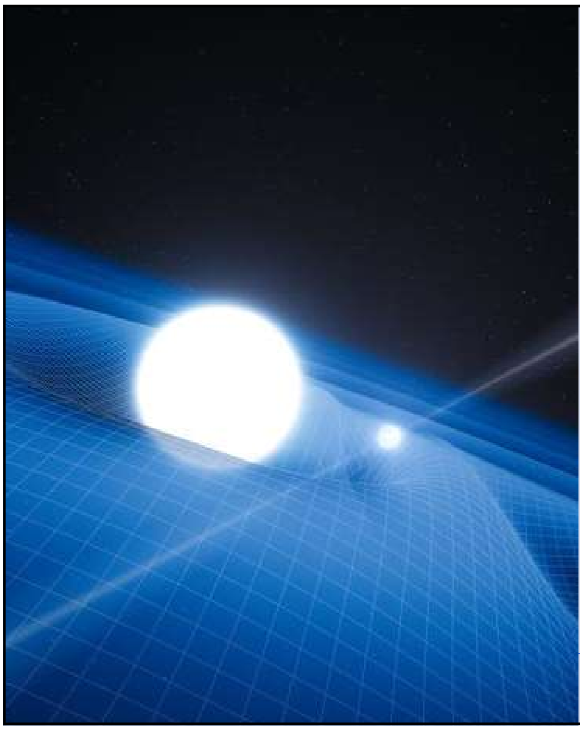


1

Relatividade 3

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. *Ricardo A. Terini*

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

1

2

Recordando

Relatividade. Invariante de Lorentz

- **Intervalo invariante**: permite distinguir eventos passados e futuros, bem como causas desses eventos.
- Intervalo Δs entre 2 eventos, no ref. K: $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$.
- Os três casos diferem na natureza da "separação" entre os eventos:

(3) $(\Delta s)^2 > 0$ Intervalo de separação tipo espacial
$(\Delta s)^2 = 0$ Intervalo de separação nula (luminosa)
$(\Delta s)^2 < 0$ Intervalo de separação tipo temporal

- Dois eventos com $(\Delta s)^2 = 0$ podem ser conectados por um sinal na velocidade c.
- Para 2 eventos com $[(\Delta s)^2 > 0]$, a distância no espaço $> c\Delta t$, a dist. coberta pela luz em Δt. Nesse caso, os eventos podem ser simultâneos em algum ref. inercial.
- Para 2 eventos com $[(\Delta s)^2 < 0]$, a distância $\Delta z' < c\Delta t$, mas sempre poderão ocorrer *em um único ponto no espaço* ($\Delta z' = 0$) em algum ref. inercial.

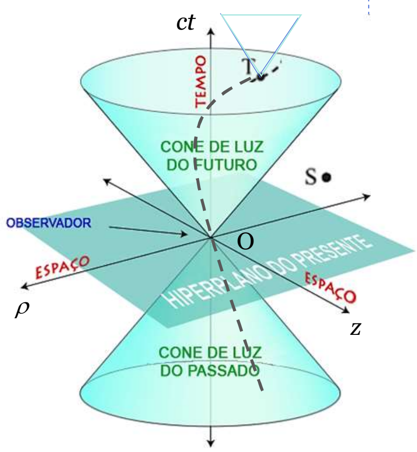
2

3

Recordando

Relatividade. Diagrama de Minkowski

- Trajetória: sua linha do universo
- Dentro dos cones de luz: velocidade < c .
  - Acima de O → seu "futuro"; abaixo de O → seu "passado", que você pode acessar.
- Fora dos cones de luz: "presente" generalizado (você não tem acesso, já que $\Delta s > c\Delta t$, e $\beta > 1$)
- **Causalidade**: *Dentro dos cones* (temporais): eventos abaixo de O acontecem *sempre* antes (*passado*) de eventos acima de O (*futuro*).
  - *Fora dos cones* (espaciais), a ordem depende do referencial inercial em que é observada.
- **OT**: interv. tipo temporal. **OS**: interv. tipo espacial



- Os "cones de luz" na Fig. são definidos pela equação $\rho^2 + z^2 = c^2t^2$.

3

4

Recordando

Relatividade. Quadrivetores

- Ex. na relatividade especial é a *coordenada espaço-temporal*

$$\vec{r} = (x, y, z, ict) = (\mathbf{r}, ict). \qquad (5)$$

- A partir de (5) podemos representar a transformação de Lorentz e sua inversa em forma *matricial* , como:

$$r'_\mu = \left[\frac{\partial r'_\mu}{\partial r_\nu}\right] r_\nu = L_{\mu\nu} r_\nu \quad \text{e} \quad r_\mu = \left[\frac{\partial r_\mu}{\partial r'_\nu}\right] r'_\nu = L^{-1}_{\mu\nu} r'_\nu,$$

linha coluna

onde (6)

∴

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{L}| = |\mathbf{L}^{-1}| = 1 \qquad \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

- **L** é a *matriz de transf. de Lorentz*, uma matriz ortogonal, e $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$.
- Então, $\vec{a}$ é um quadrivetor se satisfizer $a'_\mu = L_{\mu\nu} a_\nu$

4

Relatividade. 4 – Velocidade e 4 – Aceleração

Recordando

5

- O quadrivetor **4 – velocidade** pode ser obtido dividindo o quadrivetor $\vec{r}$ por um *diferencial de tempo próprio* $d\tau$, que é um invariante de Lorentz :
- $$\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \gamma(u)\frac{d}{dt}(\mathbf{r}, ict) = \gamma(u)\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, ic\right) = \gamma(u)(\mathbf{u}, ic) \equiv (\mathbf{U}, U_4). \quad (8)$$
- (8) é um quadrivetor tipo *temporal*, tal que:

$$\vec{U}\cdot\vec{U} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{U} + U_4^2 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - c^2}{1 - u^2/c^2} = -c^2$$

∴ • Uma definição natural de **4 – aceleração** é:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \gamma(u)\frac{d}{dt}\frac{(\mathbf{u}, ic)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \equiv (\mathcal{A}, \mathcal{A}_4). \quad (9)$$

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbf{a}}{1 - u^2/c^2} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})/c^2}{(1 - u^2/c^2)^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_4 = \frac{i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})/c}{(1 - u^2/c^2)^2}.$$

5

Relatividade. 4 – Momento e Energia

Recordando

6

- Da definição da **4 – velocidade** , e usando o momento **p** tridimensional e o escalar $\mathcal{E}$, o **4 – vetor de momento-energia** ficaria:

$$\vec{p} = m\vec{U} = m(\mathbf{U}, U_4) = (\mathbf{p}, i\mathcal{E}/c). \quad (10)$$

- A massa m deve ser também um invariante de Lorentz.
- De (10), extraímos os componentes:

∴ $\mathcal{E}/c = -imU_4 = \gamma(u)mc$ e $\mathbf{p} = m\mathbf{U} = \gamma(u)m\mathbf{u}.$

- **Exercício 1:** Como podemos deduzir o significado físico de $\mathcal{E}$?
- Mostre que: $\boxed{p' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}v}$

6

Relatividade. 4 – Momento e Energia

- Da definição de **4 – momento-energia** , extraímos os componentes:

$$\mathcal{E}/c = -imU_4 = \gamma(u)mc \qquad \text{e} \qquad \mathbf{p} = m\mathbf{U} = \gamma(u)m\mathbf{u}. \qquad (11)$$

- I) O significado físico de $\mathcal{E}$ aparece quando expandimos a sua expressão por *série de Taylor* para *u << c:*

$$\therefore \qquad \boxed{\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2} + \frac{3}{8}m\frac{u^4}{c^2} + \cdots. \qquad (12)$$

- 2º. Termo: é a conhecida energia cinética de baixa velocidade.
- 1º. Termo: é uma constante que pode ser chamada de *energia de repouso*, que permanece mesmo quando a partícula está parada.
- $\mathcal{E}$ é então a *energia total* .
- A impossibilidade de *acelerar* uma partícula massiva *até a velocidade c* aparece aqui já que, nesse caso, *a energia tenderia ao infinito*.

Relatividade. 4 – Momento e Energia

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}m\frac{u^4}{c^2} + \cdots. \qquad (12)$$

- A energia cinética exata é

$$\therefore \qquad T = \mathcal{E} - mc^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right]. \qquad (13)$$

- II) O significado de **p** aparece também quando expandimos a sua expressão (**p** = γm**u**) em *série de Taylor* para *u << c:*

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m\mathbf{u}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right], \qquad (14)$$

- **p** é o **momento relativístico** e se reduz ao *momento linear* newtoniano quando a velocidade é muito baixa.

Relatividade. 4 – Momento e Energia

- III) Agora, o *produto escalar* do quadrivetor $\vec{p}$ pode ser dado, a partir de sua definição, como:

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 \vec{U} \cdot \vec{U} = -m^2 c^2. \qquad (15)$$

... e também a partir de suas componentes (10), como:

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}. \qquad (16)$$

- Assim, de (15) e (16), pode-se expressar $\mathcal{E}$ em função da *massa* e do *momento* tridimensional:

$$\therefore \qquad \mathcal{E} = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \qquad (17)$$

- Por outro lado, de (11), vem também que: $\boxed{\mathbf{u} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}.}$ (18)

- Experimentos mostram que (17) e (18) são válidos mesmo se $m = 0$.

9

Relatividade. 4 – Momento e Energia

- No limite em que $m = 0$, (17) e (18) ficam:

$$\mathcal{E} = cp \qquad \text{e} \quad \therefore \quad \mathbf{u} = c\frac{\mathbf{p}}{p}. \qquad (19)$$

- O *4-vetor de energia-momento* (10) neste caso é $\vec{p} = (\mathbf{p}, ip)$.
  - Não há referencial onde $\mathbf{p} = 0$, a menos que $\mathcal{E} = 0$, caso em que a “partícula” não existe.
  - Fótons e neutrinos não têm *massa de repouso*.
- IV) Finalmente, levando em conta o momento relativístico (14), é natural supor que a **equação de movimento** para uma partícula com carga q e massa m, em um campo eletromagnético arbitrário, seja

... $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \therefore$ $\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right] = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).}$ (20)

10

Relatividade. 4 – Momento e Energia

- Dessa forma, a taxa de variação do *trabalho realizado sobre a partícula pela força de Coulomb* (*potência*) é igual à taxa de variação da energia cinética da partícula:

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E} - mc^2\right) = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.} \qquad (21)$$

$\therefore$ ... que é uma expressão familiar da conservação da energia.

- ---------------------------------------

Exercício 2: Movimento de partícula carregada em uma onda plana

Determinar as equações relativísticas de movimento de uma partícula carregada numa onda eletromagnética plana...

11

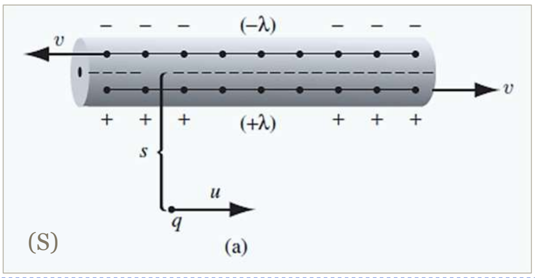
Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- A relatividade especial explica por que diferentes observadores inerciais interpretam o mesmo fenômeno eletromagnético de maneiras diferentes.
- O Eletromagnetismo de Maxwell já é, em si, consistente com os princípios da Relatividade restrita.
- Por exemplo, os potenciais retardados dependem de $t_r = t - r/c$, adotando a *constância da velocidade da luz*.
- Vamos começar analisando como, a partir de um fenômeno *eletrostático* e da *relatividade*, podemos "prever" a existência de fenômenos *magnéticos*.
- Na aplicação seguinte, vamos analisar a mesma situação elétrica em 2 sistemas de referência inerciais diferentes.

12

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- **Aplicação 1**: Suponha uma série de cargas positivas movendo-se para a direita com velocidade $\boldsymbol{v}$, próximas o suficiente para que possamos tratá-las como uma *linha de carga contínua* λ.
- Sobreposta a ela está uma linha *negativa*, $-\lambda$, seguindo para a esquerda com a mesma velocidade $\boldsymbol{v}$. (*Fig*. a)

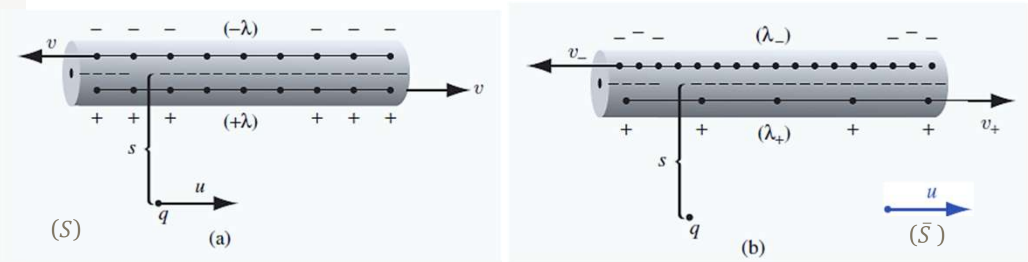


- Temos, então, uma *corrente líquida* para a direita, de valor:

$$I = 2\lambda v. \qquad (22)$$

- Enquanto isso, à distância $\boldsymbol{s}$, há uma carga puntiforme q viajando para a direita com *velocidade* $u < v$

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas



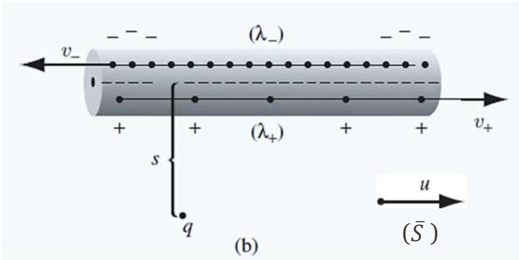
- Como as duas linhas de carga se cancelam, *não há força elétrica sobre* $\boldsymbol{q}$ neste sistema (S). (*Fig*. a).
- No entanto, vamos examinar a mesma situação do ponto de vista do sistema ($\bar{S}$) , *que se move para a direita com velocidade* u (*Fig*. b).
- Neste referencial, $\boldsymbol{q}$ *está em repouso*. As velocidades das linhas positivas e negativas agora se superpõem à do sistema...

15

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- Pela regra de adição de velocidades de Einstein, as velocidades das linhas positivas e negativas são, agora

$$\therefore \quad \boxed{v_\pm = \frac{v \mp u}{1 \mp vu/c^2}.} \qquad (22)$$



- Como $\boldsymbol{v}_-$ será maior que $\boldsymbol{v}_+$, a *contração de Lorentz* do espaçamento entre cargas negativas *é mais severa do que entre cargas positivas*;
- Em $(\bar{S}\,)$, portanto, *o fio carrega uma carga líquida negativa*!
- De fato, $\boxed{\lambda_\pm = \pm(\gamma_\pm)\lambda_0,}$ sendo $\gamma_\pm = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_\pm^2/c^2}}$, (23)

$\boldsymbol{v}_+ < \boldsymbol{v}_-$
$\therefore\ \gamma_+ < \gamma_-$
$\therefore\ \lambda_+ < \lambda_-$

... e λ_0 é a densidade de carga positiva no seu próprio referencial.

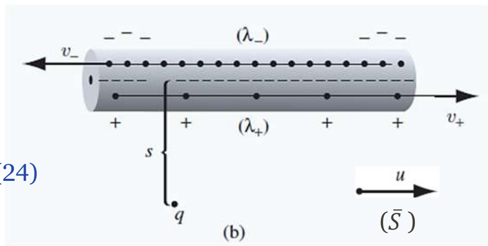
15

16

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- Em (S), $\lambda_0 \neq \lambda$ pois as cargas estão se movendo com velocidade v nesse sistema, onde

$$\therefore \quad \lambda = \gamma\lambda_0, \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (24)$$



- Com um pouco de álgebra, pode-se demonstrar que:

$$\gamma_\pm = \gamma\frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (25)$$

- Então, em $(\bar{S}\,)$, o valor líquido da densidade resultante é:

$$\boxed{\lambda_{\text{tot}} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda u v}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}}.} \qquad (26)$$

16

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- Conclusão: Como resultado da contração de Lorentz desigual das linhas positiva e negativa, um fio condutor de corrente eletricamente *neutro* em um sistema inercial, poderá estar *carregado* em um outro sistema.
- Além disso, a linha de carga λ_{tot} cria um *campo elétrico* à distância s dado por:

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0 s},} \qquad (27)$$

- Esse campo produzirá, em ($\bar{S}$), uma *força* elétrica sobre a carga q :

$$\boxed{\bar{F} = qE = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2 s}\frac{qu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.} \qquad (28)$$

- Mas, então, não deveria haver uma força também em S? Na verdade, podemos calculá-la usando *regras de transformação de Lorentz para forças*.

17

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- Como q está em repouso em $\bar{S}$, e $\bar{F}$ é perpendicular a **u**, a força em S é dada por:

$$\therefore \quad \boxed{F = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\bar{F} = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2}\frac{qu}{s}.} \qquad (29)$$

- A carga q é atraída para o fio por uma força puramente elétrica em $\bar{S}$ (onde o fio está carregado e q está em repouso), mas claramente não elétrica em S (onde o fio é neutro).
- Então, a *eletrostática* e a *relatividade* implicam na existência de outra força que é, obviamente, ***magnética***.
- De fato, podemos expressar a Eq. (29) numa forma mais familiar, usando $c^2 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$ e expressando λv em termos da corrente :

$$\therefore \quad \boxed{F = -qu\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right).} \qquad (30)$$

18

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

$$F = -qu\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right).$$

19

- O termo entre parênteses é o *campo magnético de um fio longo e reto*, e a *força* é exatamente a que teríamos obtido usando a lei de força de Lorentz no sistema S.
- Assim, observamos que, nesse caso, *o campo elétrico*, para um observador no referencial $\bar{S}$, manifesta-se como *campo magnético* para um observador em outro referencial S !

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0 s},} \quad (\bar{S})$$

$$\updownarrow \quad (31)$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}} \quad (S)$$

- Mas haverá regras gerais de transformação de um campo eletromagnético, num referencial, para outro referencial?

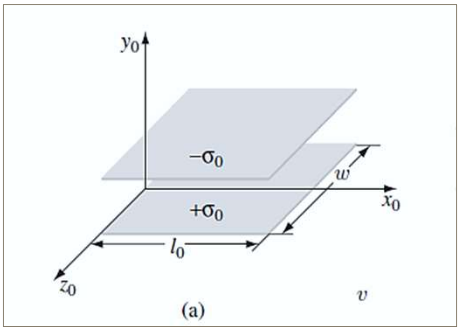
19

Relatividade. Leis de transformação dos campos

20

- Pistas: - A carga, como a massa, são *invariantes* em qualquer ref. Inercial.
  - As transformações *não dependem das fontes dos campos*.

- **Aplicação 2**: Partimos do campo elétrico mais simples:
- ...O campo entre duas placas paralelas de um grande capacitor (*Fig*. a).
- Suponhamos o capacitor em repouso num ref. inercial S_0 e carregado com uma carga superficial $\pm\sigma_0$



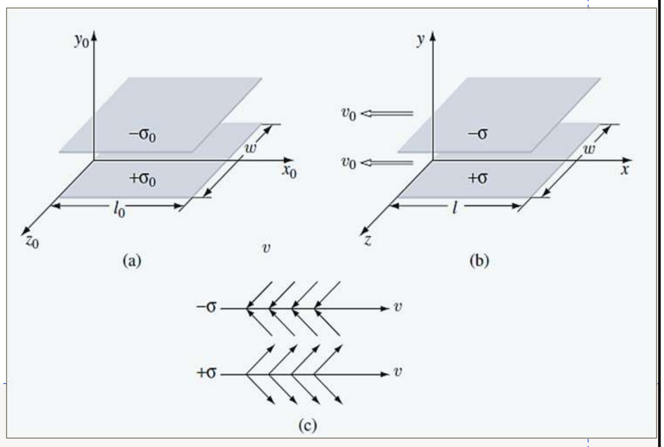
(a)

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{y}}.} \quad (32)$$

20

Relatividade. Leis de transformação dos campos

- Num ref. S (*Fig*. b) *que se move para a direita* com velocidade v_0, as placas se movem *para a esquerda* com a mesma velocidade.
- O campo $\mathbf{E}$ (em S) mantém-se igual a $\mathbf{E}_0$ (em S_0)...?
- Ainda que, durante o movimento das placas, o campo se inclinasse (*Fig*. c), o campo líquido (soma) das duas placas permaneceria perpendicular a elas.
- A *carga* total nas placas e a *largura* w são invariantes, mas o comprimento $\boldsymbol{l}$ contrai-se (Lorentz) por um fator γ_0.



Relatividade. Leis de transformação dos campos

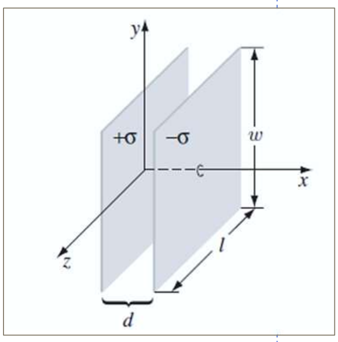
- Então, a carga por unidade de área aumenta por esse fator:

$$\therefore \quad \boxed{\sigma = \gamma_0 \sigma_0.} \qquad \text{sendo} \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

- Dessa forma, a componente de E perpendicular ao movimento...

$$\boxed{\mathbf{E}^{\perp} = \gamma_0 \mathbf{E}_0{}^{\perp}}$$

- Para achar a componente paralela, suponha agora que as placas estejam alinhadas com o plano yz (*Fig. ao lado*).
- Desta vez, é a separação de placas ($\boldsymbol{d}$) que *se contrai* (Lorentz), enquanto l e w (e, portanto, também $\boldsymbol{\sigma}$) são os mesmos em ambos os refs..
- Como o campo não depende de d, segue-se que $\boxed{E^{\parallel} = E_0{}^{\parallel}.}$



Relatividade. Leis de transformação dos campos

- Para um sistema em que houvesse tanto campo E quanto B, então, vamos considerar os 3 referenciais ao lado...
- Em S_0, teríamos só o *campo elétrico* E_0 .
- Em S, teríamos também um *campo magnético* devido a correntes superficiais dadas por:

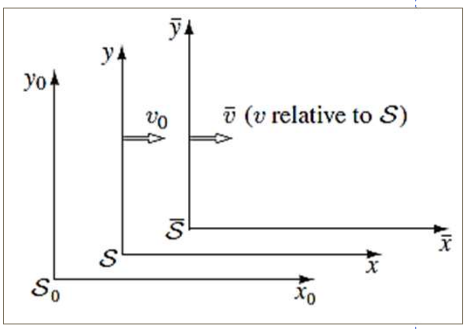
$$\mathbf{K}_{\pm} = \mp\sigma v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

- Pela lei de Ampère, o campo seria:

$$\therefore \quad B_z = -\mu_0 \sigma v_0.$$

- Num 3º. ref. $\bar{S}$, com vel. $\bar{v}$ relativo a S, teríamos:

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0}, \quad \bar{B}_z = -\mu_0 \bar{\sigma} \bar{v},$$



...sendo:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{1 + v v_0/c^2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}},$$

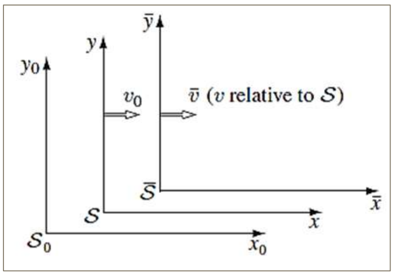
$$\bar{\sigma} = \bar{\gamma}\sigma_0.$$

23

Relatividade. Leis de transformação dos campos

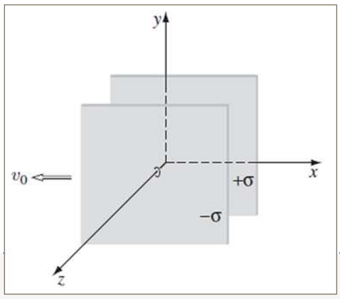
- Pode-se deduzir, então, a relação entre os campos no referencial $\bar{S}$ em relação a S. Resulta:

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}_y &= \gamma(E_y - v B_z), \\ \bar{B}_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right). \end{aligned}\right\}$$



- Girando as placas (*fig. abaixo*), podemos achar outras componentes:

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \bar{E}_z &= \gamma(E_z + v B_y), \\ \bar{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right). \end{aligned}\right\}$$



- Para determinar B_x, imaginaríamos uma fonte, como um solenoide, p. ex....

24

Relatividade. Leis de transformação dos campos

- Observadores em referenciais distintos podem divergir sobre a origem de um dado fenômeno eletromagnético porque os conceitos de *campo elétrico* e *campo magnético* são dependentes do observador!
- Isso resolve a questão da *assimetria de interpretação* levantada por Einstein!
- Levando em conta as *componentes dos campos* perpendiculares e paralelas à velocidade **v** = $c\beta$ de um referencial K' em relação a outro, K, pode-se mostrar que, em geral :

$$\therefore \boxed{\begin{array}{lll} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B})_{\perp} & \mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}' - \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}')_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} & c\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})_{\perp} & c\mathbf{B}_{\perp} = \gamma(c\mathbf{B}' + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}')_{\perp}. \end{array}} \quad (32)$$

- Note-se também que *se E = B = 0 em um referencial, isso ocorrerá também em todos*.

Relatividade. Referências

- Griffiths, D. J., Eletrodinâmica, 3rd. Ed., Pearson Addison Wesley, SP, 2011.
- Relatividade restrita – consequências. https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/relatividade/relatividade-restrita/consequencias/
- Zangwill, A., *Modern Eletrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 2012.
- Jackson, J. D., *Classical Eletrodynamics*, 3rd. Ed., John Wiley and Sons, NY, 1999.
-