L01 Física Matemática 02

Seja $f : M \to M$ uma função, onde M é um espaço métrico. Dizemos que $x \in M$ é um ponto fixo de M se $f(x) = x$.

Q1 Considere o caso onde $M = [a, b]$ é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e f uma função contínua. Siga os passos abaixo para mostrar que f possui pelo menos um ponto fixo.

(a) Caso 1: $f(a) = a$ ou $f(b) = b$. Obviamente não há o que se demonstrar.

(b) Vamos examinar o Caso 2, $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Defina a função $g(x) = x - f(x)$. Mostre que $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$.

(c) Use o Teorema do Valor Intermediário (Cálculo 01) e conclua a demonstração

Q2. Seja $h : (-1, 1) \to (-1, 1)$ a função

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

definida no intervalo aberto $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Mostre que h não possui ponto fixo.

Q3. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que $f : M \to M$ é uma contração se existe uma constante c, $0 < c < 1$, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$$

para todo par x, y em M. Nos itens a seguir, demonstraremos que se (M, d) é completo e f é uma contração contínua, então existe um único ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$. A prova deste teorema do ponto fixo consiste em construir uma sequência que converge para x.

Seja x_0 um ponto arbitrário de M. Definimos a sequência infinita $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ recursivamente pelas equações

$$x_1 = f(x_0),$$
$$x_n = f(x_{n-1}).$$

O exercício consiste em mostrar que esta sequência tem as propriedades desejadas.

(a) Mostre que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1).$$

(b) Seja $m = n + k$. Use a desigualdade triangular para mostrar que

$$d(x_n, x_m) \leq c^n(1 + c + c^2 + ... + c^{k-1})d(x_0, x_1).$$

(c) Mostre que

$$c^n(1 + c + c^2 + ... + c^{k-1}) \leq c^n \frac{1}{1-c}$$

e conclua que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

(d) Como M é completo, então existe $x \in M$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Mostre que $f(x) = x$. (Use a continuidade de f e a relação de recorrência $x_{n+1} = f(x_n)$.)

Q4. Seja $f : [\sqrt{\alpha}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$$

com $\alpha > 0$.

(a) Mostre que a derivada $f'(x)$ satisfaz

$$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$$

para $x \in (\sqrt{\alpha}, \infty)$. Mostre também que

$$f\left((\sqrt{\alpha}, \infty)\right) \subset (\sqrt{\alpha}, \infty)$$

e que $\sqrt{\alpha}$ é um ponto fixo de f.

(b) Mostre que $f : [\sqrt{\alpha}, \infty) \to [\sqrt{\alpha}, \infty)$ é uma contração. (Use o Teorema do Valor Médio).

(c) Mostre que $[\sqrt{\alpha}, \infty) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto completo.

(d) Podemos concluir que valem as hipóteses do teorema do ponto fixo demonstrado em Q3. Use a série definida no item Q3 com $x_0 = 7$ para calcular as 5 primeiras aproximações de $\sqrt{3}$ e seus respectivos erros percentuais.