

26

Relatividade 2

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. Ricardo A. Terini

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

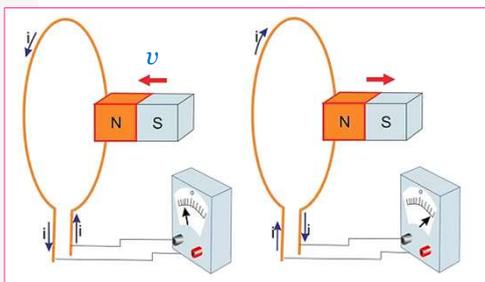
LDRFM – IF-USP

26

Relatividade restrita. Postulados de Einstein

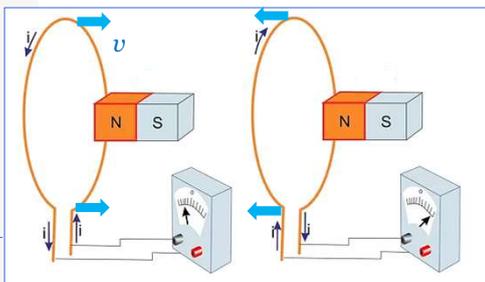
Recordando

27



- Ímã se aproxima (ou se afasta) da espira → fluxo magnético através da espira varia → *campo elétrico* é induzido em torno do ímã → *força elétrica* aparece sobre as cargas da espira → *corrente i* aparece na espira.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{sistema de ref. na espira})$$



- Espira se aproxima (ou afasta) do ímã → fluxo magnético varia através da espira → *fem ε de movimento* é induzida na espira → *corrente i* aparece na espira.

$$\varepsilon = -Blv = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{sistema de ref. no ímã})$$

Assimetrias: = resultados, ≠ interpretações

27

Relatividade restrita. Postulados de Einstein

Recordando

28

Postulados da Relatividade

1. **Princípio de Relatividade:** As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

Portanto, tanto as leis da Mecânica como as leis do Eletromagnetismo devem ter a mesma forma em qualquer referencial inercial.

2. **Constância da velocidade da luz:** A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em qualquer referencial inercial, independentemente da velocidade da fonte de luz.



A teoria da Relatividade restrita ou especial deriva desses dois postulados.

28

Relatividade. Postulados de Einstein

Recordando

29

• Transformações de Galileu

$$(i) \bar{x} = x - vt,$$

$$(ii) \bar{y} = y,$$

$$(iii) \bar{z} = z,$$

$$(iv) \bar{t} = t.$$

• Transformações de Lorentz

$$(i) \bar{x} = \gamma(x - vt),$$

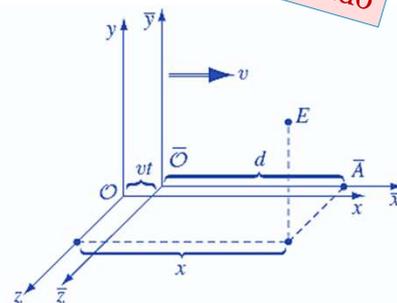
$$(ii) \bar{y} = y,$$

$$(iii) \bar{z} = z,$$

$$(iv) \bar{t} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x \right).$$

$$\beta = \frac{v}{c} < 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1.$$



- Consequências:
- Relatividade da simultaneidade,
- Dilatação temporal,
- Contração de Lorentz.

$$\bar{t}' = \gamma t$$

$$\Delta \bar{t}' = \Delta t / \gamma$$

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0$$

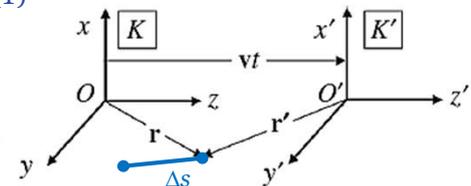
29

Relatividade. Invariante de Lorentz

- Uma **Grandeza invariante** em relatividade **assume o mesmo valor** em qualquer referencial inercial.
- A velocidade da luz no vácuo **c** e a carga elétrica **e** são **invariantes relativísticos**.
- **Intervalo invariante:** permite distinguir eventos passados e futuros, bem como causas desses eventos.
- Intervalo Δs entre 2 eventos, no ref. K :

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 \quad (1) \quad \therefore$$

- Δs é invariante a translações e rotações no espaço, a translações no tempo e a transformações de Lorentz.



30

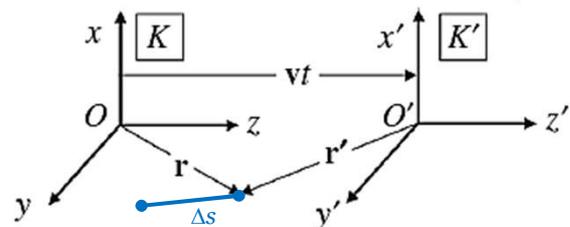
Relatividade. Invariante de Lorentz

- De fato, se quisermos expressar Δs num referencial K' , em MU na direção z , com velocidade \mathbf{v} , então:

$$(\Delta s')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \gamma^2(\Delta z - \beta c\Delta t)^2 - \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta z)^2,$$

... ou $(\Delta s')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \gamma^2(1 - \beta^2)[\Delta z^2 - c^2\Delta t^2]$.

- Como $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \rightarrow (\Delta s')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2$. (2)
- Assim, $(\Delta s)^2$ tem o mesmo valor em qualquer ref. inercial.
- A relatividade especial explora de várias maneiras a invariância do intervalo...
- 1º.) $(\Delta s)^2$ pode ser positivo, negativo ou zero.



31

Relatividade. Invariante de Lorentz

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2.$$

- Os três casos diferem na natureza da “separação” entre os eventos:

| | | |
|-----|--------------------|--|
| (3) | $(\Delta s)^2 > 0$ | Intervalo de separação tipo espacial |
| | $(\Delta s)^2 = 0$ | Intervalo de separação nula (luminosa) |
| | $(\Delta s)^2 < 0$ | Intervalo de separação tipo temporal |

- Um **par de eventos** com $(\Delta s)^2 = 0$ pode ser conectado por um sinal viajando na velocidade da luz. Ex.: a separação nula entre a origem e todos os pontos de uma frente de onda eletromagnética esférica em expansão.
- Para **dois eventos** com *separação tipo espacial* [$(\Delta s)^2 > 0$], a distância no espaço é maior que a distância $c\Delta t$ coberta por um feixe de luz no tempo Δt .
- Para tais eventos, sempre é possível realizar uma *transformação de Lorentz* para um ref. inercial onde os pares de eventos sejam *simultâneos*...

Prove

32

Relatividade. Invariante de Lorentz

- Se K' for esse ref. e se ambos os eventos estiverem no eixo z' ,

$$\therefore (\Delta s')^2 = (\Delta z')^2 - (c\Delta t')^2 = (\Delta z')^2.$$

- Essa igualdade deriva da condição $\Delta t' = 0$ de simultaneidade em K' e mostra porque a denominação “separação tipo espacial” é usada neste caso.

- Levando em conta que $\Delta z' = \gamma(\Delta z - \beta c\Delta t)$ e $c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z)$:

$$\therefore \Delta t' = 0 \Rightarrow \beta = \frac{c\Delta t}{\Delta z}$$

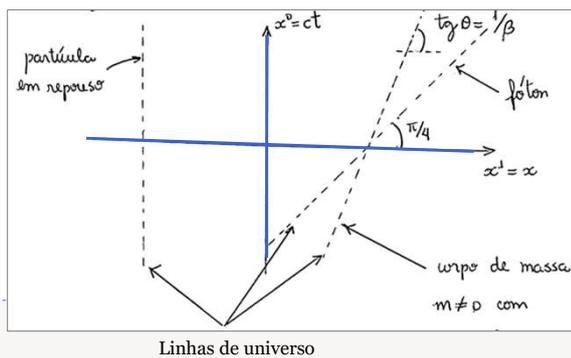
- Considerando (1), com $\Delta x = \Delta y = 0$, e $(\Delta s)^2 > 0$, vem que $\beta < 1$, o que mostra que o impulso para tornar $\Delta t' = 0$ é fisicamente realizável.
- Similarmente: um **par de eventos** com [$(\Delta s)^2 < 0$] sempre poderá ocorrer *em um único ponto no espaço* ($\Delta z' = 0$).
- Em tais eventos, a distância espacial $\Delta z' < c\Delta t$, a distância percorrida por um feixe de luz no tempo Δt .

Prove

33

Relatividade. Diagrama de Minkowski

- Vamos agora reconciliar o conceito de *causalidade* com a *relatividade da simultaneidade*.
- A figura abaixo é um *diagrama de espaço-tempo* ou *de Minkowski*, neste caso, simplificado só com a representação do eixo x .
- Trajetórias: *linhas de universo* (ou *de mundo*). Inclinação: $\text{tg } \theta = 1/\beta$



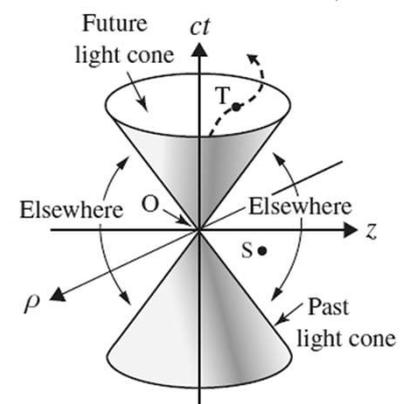
Hermann Minkowski

⋮

34

Relatividade. Diagrama de Minkowski

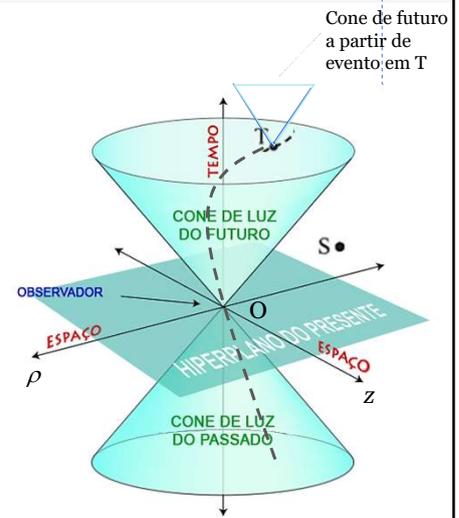
- A Figura ao lado é um *diagrama de Minkowski* onde os eixos x e y são representados por um único eixo ρ onde $\rho^2 = x^2 + y^2$.
 - Um evento (ou *observador*) O ocupa a origem.
- Os dois “*cones de luz*” desenhados na Fig. são definidos pela equação $\rho^2 + z^2 = c^2t^2$.
- Portanto, $\Delta s = 0$ entre O e qualquer evento na superfície de um dos cones (*interv. luminoso*).
- De (3), *fora dos cones*: *intervalo tipo espacial*; e *dentro de cada cone*: *intervalo tipo temporal*.
- **S**: evento tipo espacial. **T**: evento tipo temporal



35

Relatividade. Diagrama de Minkowski

- Trajetória: sua linha do universo
- Dentro dos cones de luz: velocidade $< c$.
 - Acima de O \rightarrow seu “futuro”; abaixo de O \rightarrow seu “passado”, que você pode acessar.
- Fora dos cones de luz: “presente” generalizado (você não tem acesso, já que $\Delta s > c\Delta t$, e $\beta > 1$)
- **Causalidade:** Dentro dos cones (temporais): eventos abaixo de O acontecem *sempre* antes (passado) de eventos acima de O (futuro).
- Fora dos cones (espaciais), a ordem depende do referencial inercial em que é observada.
- **OT:** interv. tipo temporal. **OS:** interv. tipo espacial



36

Relatividade. Tempo próprio

- **Tempo próprio:** é uma medida invariante do movimento de uma partícula ao longo de sua trajetória no espaço-tempo.
- Sua definição segue naturalmente da definição da “**linha do universo**” de uma partícula: *é o lugar geométrico dos pontos no espaço-tempo que descrevem a trajetória* em questão.
 - Ex.: A curva tracejada na Figura é uma linha de universo típica para uma partícula com velocidade não uniforme $\mathbf{u}(t) = d\mathbf{r}/dt$.
- Todas as linhas de universo estão dentro do cone de luz porque $u < c$. E, à medida que você se desloca pela sua linha, *seu relógio desacelera*.
- Suponha agora o intervalo entre dois pontos na linha que estejam infinitesimalmente próximos um do outro. Ele será dado por:

$$\therefore (ds)^2 = (d\mathbf{r})^2 - (cdt)^2 = -(cdt)^2 \left[1 - \frac{u^2(t)}{c^2} \right]$$

37

Relatividade. Tempo próprio

$$(ds)^2 = (d\mathbf{r})^2 - (cdt)^2 = -(cdt)^2 \left[1 - \frac{u^2(t)}{c^2} \right]$$

- Dividindo pela velocidade da luz produz-se outra invariante.
- Isso nos permite definir um *incremento diferencial do tempo próprio*, um *invariante* em um referencial inercial K , como:

$$\therefore d\tau = \sqrt{-\frac{(ds)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma(u)}. \quad (4)$$

- A invariância de $d\tau$ significa que (4) tem o mesmo valor numérico em qualquer outro referencial inercial K' onde $u' \neq u$, $t' \neq t$ e $dt' \neq dt$.
- τ representa o tempo que seu *relógio de pulso* marca, ou o *tempo no sistema do objeto em movimento*. Já, t é o tempo marcado por um observador fixo em K .

38

Relatividade. Quadrivetores

- O 1º. postulado de Einstein afirma que *as leis matemáticas da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais*.
- Os **quadrivetores** são o primeiro passo em direção a um formalismo que tornará essa invariância de forma (ou *covariância*) auto-evidente.
- Objetivo imediato: analisar a *física* que pode ser aprendida diretamente da manipulação de quadrivetores individuais.
- Começamos comparando com o espaço euclidiano. O produto escalar de 2 vetores tridimensionais é invariante a translações e rotações do ref.. Se K e K' fossem os dois sistemas, então

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_k b_k = a'_k b'_k = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'.$$

- Representamos um *quadrivetor* no espaço de Minkowski como:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

39

Relatividade. Quadrivetores

- $a_1, a_2,$ e a_3 : componentes espaciais; a_4 : componente temporal
- O **produto escalar de quadrivetores** é, por definição, invariante em translações, rotações e transformações de Lorentz. Assim:

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = a_\mu b_\mu = a'_\mu b'_\mu = \vec{a}' \cdot \vec{b}'$$
- Caso particular: $a_\mu a_\mu = a'_\mu a'_\mu$ (4)
- Também, é comum dizer que um quadrivetor é *nulo, tipo espacial* ou *tipo temporal*, dependendo se (4) é zero, positivo ou negativo.
- O protótipo de um quadrivetor na relatividade especial é a *coordenada espaço-temporal*

$$\vec{r} = (x, y, z, ict) = (\mathbf{r}, ict). \quad (5)$$
- 4º. Termo: imaginário, de modo que $(\Delta s)^2 = \Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r}$ e satisfaz (1).

40

Relatividade. Quadrivetores

- A partir de (5) podemos representar a transformação de Lorentz e sua inversa em forma *matricial*, como:

$$r'_\mu = \left[\frac{\partial r'_\mu}{\partial r_\nu} \right] r_\nu = L_{\mu\nu} r_\nu \quad \text{e} \quad r_\mu = \left[\frac{\partial r_\mu}{\partial r'_\nu} \right] r'_\nu = L_{\mu\nu}^{-1} r'_\nu, \quad (6)$$
- onde

$$\therefore \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$
- \mathbf{L} é a *matriz de transf. de Lorentz*, uma matriz ortogonal, e $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$.
- Além disso, o seu determinante é $|\mathbf{L}| = |\mathbf{L}^{-1}| = 1$.
- Então, \vec{a} é um quadrivetor se satisfizer $a'_\mu = L_{\mu\nu} a_\nu$

41

Relatividade. Quadrivetores

- De modo geral, o movimento do referencial K' pode não estar alinhado a algum eixo de K .
- Nesse caso, pode-se representar um quadrivetor \vec{a} por meio de suas **componentes perpendiculares e paralelas a \mathbf{v}** .
- Então, a transformação de Lorentz e sua inversa ficarão:

$$\therefore \begin{array}{ll} \mathbf{a}'_{\perp} = \mathbf{a}_{\perp} & \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}'_{\perp} \\ \mathbf{a}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{a}_{\parallel} + i\beta a_4) & \mathbf{a}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{a}'_{\parallel} - i\beta a'_4) \\ a'_4 = \gamma(a_4 - i\beta \cdot \mathbf{a}_{\parallel}) & a_4 = \gamma(a'_4 + i\beta \cdot \mathbf{a}'_{\parallel}). \end{array} \quad (7)$$

- **Exercício 1:** *Verifique que essas transformações mantêm o produto escalar invariante.*

Relatividade. 4 – Velocidade e 4 – Aceleração

- A **4 – velocidade** é outro protótipo que ilustra a lógica de construção e a utilidade geral de todos os quadrivetores.
- **Tarefa:** identificar uma quantidade que esteja relacionada à velocidade tridimensional $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ de uma partícula, e que tenha as propriedades de transformação de Lorentz do quadrivetor \vec{r} definido em (5).
- **Solução natural:** dividir o quadrivetor \vec{r} por um elemento diferencial de **tempo próprio**, que é um escalar invariante de Lorentz. Isso dá:

$$\therefore \cdot \quad \vec{U} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \gamma(u) \frac{d}{dt} (\mathbf{r}, ict) = \gamma(u) \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, ic \right) = \gamma(u) (\mathbf{u}, ic) \equiv (\mathbf{U}, U_4). \quad (8)$$

- (8) é um quadrivetor tipo *temporal*, que define um invariante *escalar*:

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + U_4^2 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - c^2}{1 - u^2/c^2} = -c^2.$$

Relatividade. 4 – Velocidade e 4 – Aceleração

- Uma definição natural de **4 – aceleração** deve ser:

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \gamma(u) \frac{d}{dt} \frac{(\mathbf{u}, ic)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \equiv (\mathcal{A}, \mathcal{A}_4).$$

- Se $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$, então teremos:

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbf{a}}{1-u^2/c^2} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})/c^2}{(1-u^2/c^2)^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_4 = \frac{i(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})/c}{(1-u^2/c^2)^2}. \quad (9)$$

- $\vec{\mathcal{A}}$ é ortogonal a \vec{U} , como se pode mostrar:

$$\therefore \vec{U} \cdot \vec{\mathcal{A}} = \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\vec{U} \cdot \vec{U}) = 0.$$

44

Relatividade. 4 – Momento e Energia

- Da definição da **4 – velocidade**, e usando o momento \mathbf{p} tridimensional e o escalar \mathcal{E} , o **4 – momento** ficaria:

$$\vec{p} = m\vec{U} = m(\mathbf{U}, U_4) = (\mathbf{p}, i\mathcal{E}/c). \quad (10)$$

- A massa m deve ser também um invariante de Lorentz.
- De (10), extraímos os componentes:
 $\therefore \mathcal{E}/c = -imU_4 = \gamma(u)mc$ e $\mathbf{p} = m\mathbf{U} = \gamma(u)m\mathbf{u}$.
- **Exercício 2: Como podemos deduzir o significado físico de \mathcal{E} ?**

- **Mostre que:**

$$\mathbf{p}' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v}$$

45

Relatividade. Referências

46

- Griffiths, D. J., *Eletrodinâmica*, 3rd. Ed., Pearson Addison Wesley, SP, 2011.
- Zangwill, A., *Modern Eletrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 2012.
- Jackson, J. D., *Classical Eletrodynamics*, 3rd. Ed., John Wiley and Sons, NY, 1999.
- Relatividade restrita – consequências.
<https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/relatividade/relatividade-restrita/consequencias/>