# Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

guilherme.germano@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

# Plano do Curso

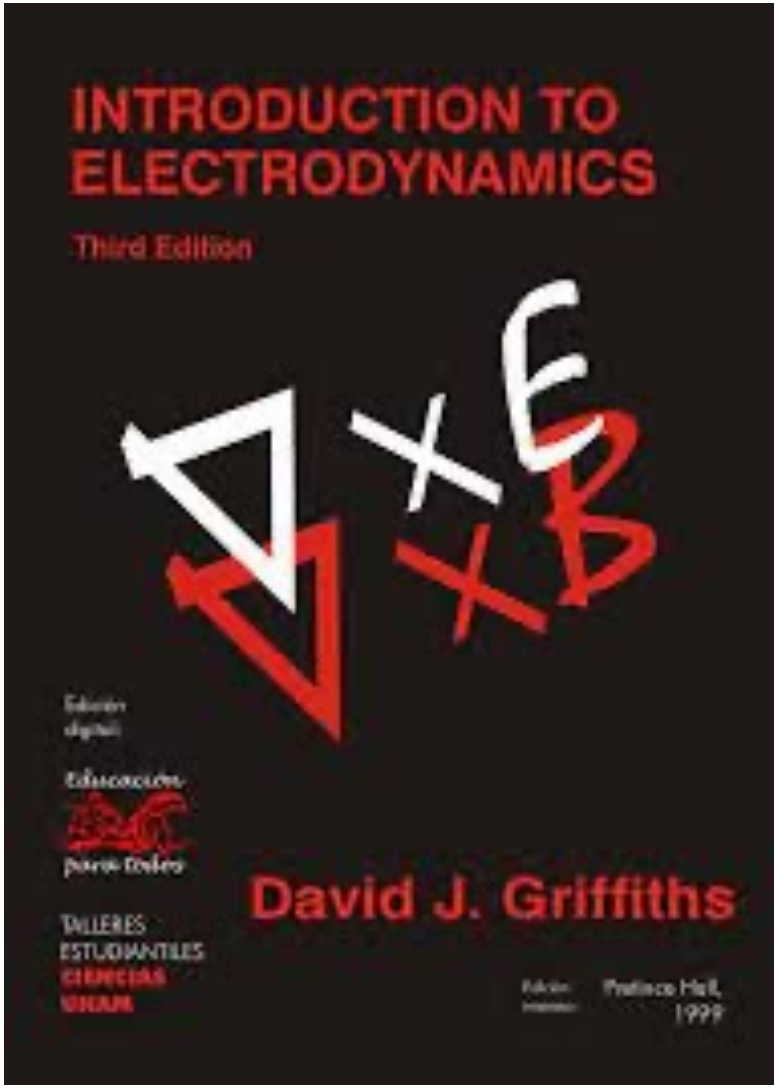
16/08
19/08
23/08
26/08
30/08
02/09
06/09
09/09

13/09
16/09
20/09 P1
23/09
27/09
30/09
04/10
07/10

11/10
14/10
18/10
21/10 P2
25/10
28/10
01/11
04/11

08/11
11/11
15/11
18/11
22/11
25/11 P3
29/11 correção
02/12 S1
06/12 revisão
09/12 S2

# Bibliografia




Capítulo 2 : eletrostática

Capítulo 5 : magnetostática

Capítulo 7 : eletrodinâmica

Capítulo 8 : leis de conservação

Capítulo 9 : ondas eletromagnéticas

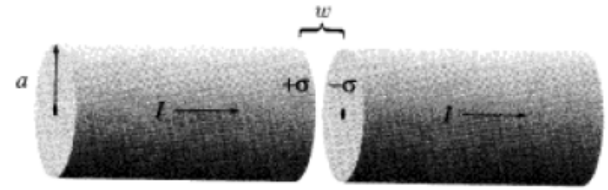
Capítulo 10 : campos e potenciais

Capítulo 11 : radiação

# Aula 23


Richard Serra
no Qatar
$\vec{E}$
Eternal tribute to the capacitor

3) Um fio espesso, de raio $a$, carrega uma corrente constante $I$, uniformemente distribuida sobre sua seção transversal. Um espaço estreito, de largura $w << a$, forma um capacitor de placas planas paralelas, conforme a figura.




(a) Calcule os campos elétrico e magnético no vão, como função da distância ao eixo $s$ e do tempo $t$, assumindo que a carga nas superfícies é nula em $t = 0$.

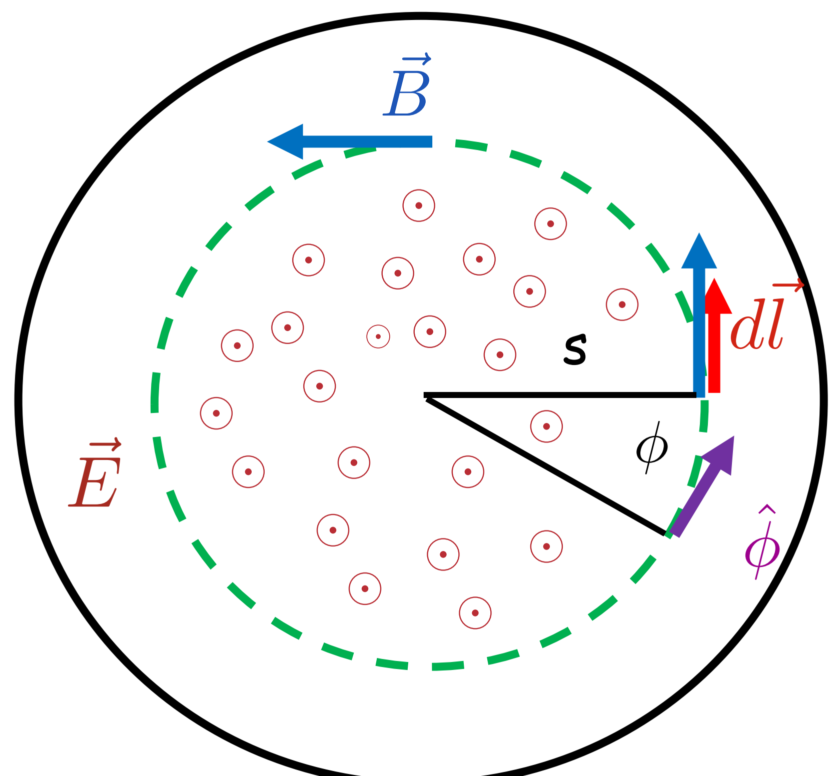
$$\mathbf{E}(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \boxed{\frac{It}{\pi a^2 \epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}}$$

$$\oint \vec{B}\,.\,\vec{dl} = \mu_0\,\epsilon_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt}\,.\,\vec{da}$$

$$B 2\pi s = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\pi s^2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I \pi s^2}{\pi \epsilon_0 a^2}$$

$$\boxed{\mathbf{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

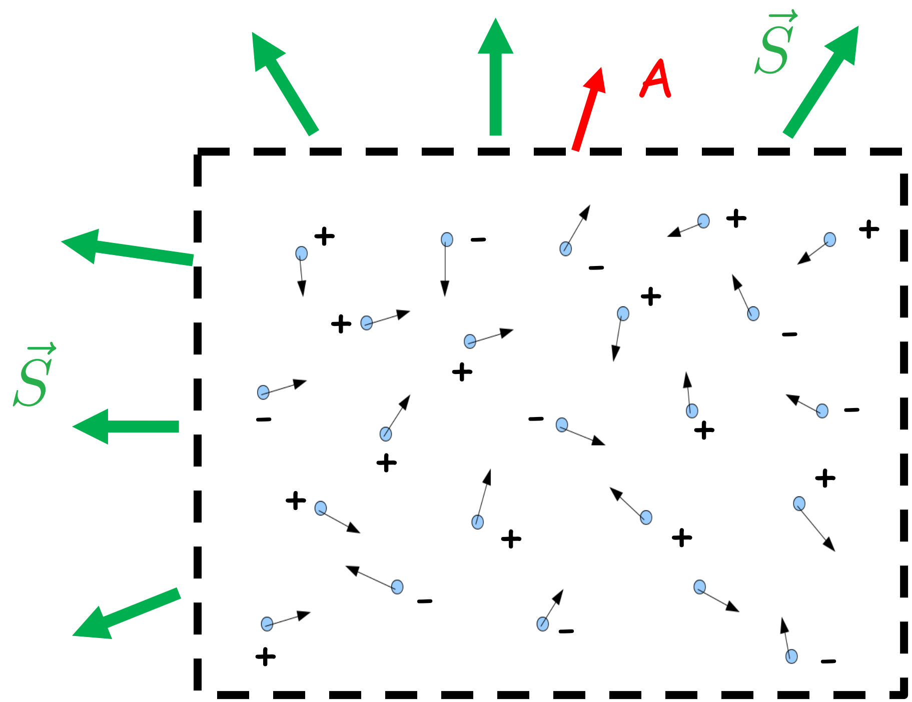
Olhando pela direita :



Vamos lembrar do teorema de Poynting :

A diminuição da energia armazenada nos campos é igual ao aumento de energia das partículas mais a energia que escapa do volume de observação com o vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$ Vetor de Poynting




$$-\frac{d}{dt}U_{em} = \frac{dW}{dt} + \oint_A \vec{S}\,.\,d\vec{a}$$

Quando não existem partículas:

$$-\frac{d}{dt}U_{em} = \oint_A \vec{S}\,.\,d\vec{a}$$

$$-\frac{d}{dt}\int u_{em}\,d^3r = \int_V \vec{\nabla}\,.\,\vec{S}\;d^3r$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u_{em} = -\vec{\nabla}\,.\,\vec{S}}$$

(b) Encontre a densidade de energia $u_{em}$ e o vetor de Poynting $\mathbf{S}$ no vão e verifique que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{em} = -\nabla \mathbf{S} \qquad \text{Obs:} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0\, \epsilon_0}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\left[\epsilon_0\left(\frac{It}{\pi\epsilon_0 a^2}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)^2\right] = \boxed{\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4}[(ct)^2] + (s/2)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} 2c^2 t = \frac{I^2 t}{\pi^2 \epsilon_0 a^4};}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{It}{\pi\epsilon_0 a^2}\right)\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)(-\hat{\mathbf{s}}) = \boxed{-\frac{I^2 t s}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4}\hat{\mathbf{s}}}$$

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s\,V_s) + \frac{1}{s}\cancelto{0}{\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}} + \cancelto{0}{\frac{\partial V_z}{\partial z}} \qquad \vec{\nabla}\,.\,\vec{S} = -\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{I^2\, t\, s^2}{2\,\pi^2\,\epsilon_0\, a^4}\right)$$

$$\boxed{-\vec{\nabla}\,.\,\vec{S} = \frac{I^2\, t}{\pi^2\,\epsilon_0\, a^4}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} u_{em} = -\nabla\cdot\mathbf{S}}$$

(c) Determine a energia total no vão como função do tempo. Determine a potencia que flui para o interior do vão, calculando o fluxo do vetor de Poynting através de uma superfície adequada. Verifique que a potencia é igual a taxa de aumento da energia.

Integrando $u_{em}$ sobre um cilindro de raio $R$ dentro do vão (para o vão todo basta tomar $R = a$):

$$U_{em} = \int_0^R u_{em} w 2\pi s ds = 2\pi w \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} \int_0 [(ct)^2 + (s/2)^2] s ds = \frac{\mu_0 w I^2}{\pi a^4} \left[ (ct)^2 \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{s^4}{4} \right]_0^R$$

$$\boxed{U_{em} = \frac{\mu_0 w I^2 R^2}{2\pi a^4} \left[ (ct)^2 + \frac{R^2}{8} \right]}$$

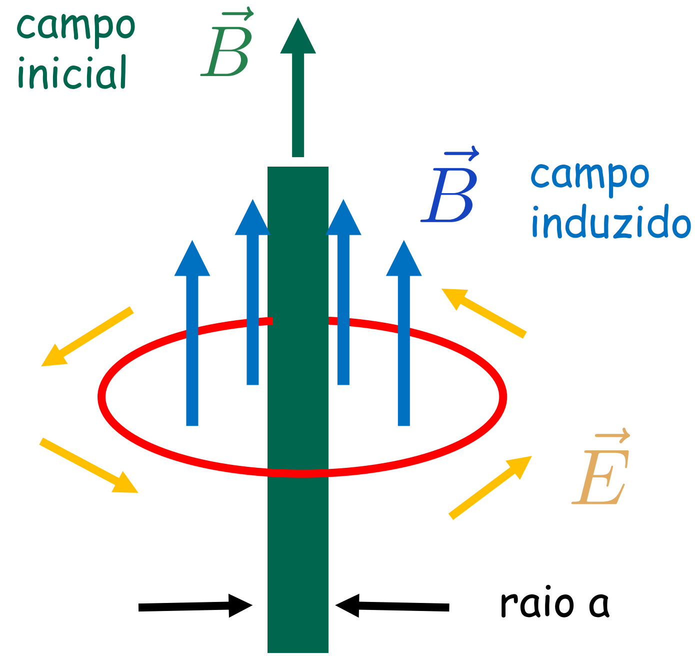
A potência que flui pra dentro do cílindro de raio $R$ no vão é:

$$P_{in} = -\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad = \frac{I^2\, t\, R}{2\,\pi^2\, \epsilon_0\, a^4}\, \hat{s}\,.\,(2\,\pi\, R\,\omega)\,\hat{s} \quad = \boxed{\frac{I^2 w t R^2}{\pi \epsilon_0 a^4}} \qquad c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$$

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{\mu_0\, \omega\, I^2\, R^2}{2\,\pi\, a^4} 2\, c^2\, t \quad = \frac{\omega\, I^2\, R^2\, t}{\pi\, \epsilon_0\, a^4} \qquad = P_{in}$$

5) Um solenóide infinito, de raio $a$, com $n$ voltas por unidade de comprimento, carrega uma corrente $I_S$. Coaxial ao solenóide, há um fio em forma de anel circular de raio $b >> a$, com resistência $R$. Quando a corrente no solenóide é gradualmente diminuida, uma corrente $I_r$ é induzida no anel.

(a) Calcule $I_r$ em termos de $dI_S/dt$.




O campo gerado pelo solenóide é $B = \mu_0 n I_S$

$$\Phi = \pi a^2 B = \mu_0 n \pi a^2 I_S$$

$$I_r = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{1}{R} = \boxed{-\frac{1}{R}(\mu_0 \pi a^2 n)\frac{dI_S}{dt}}$$

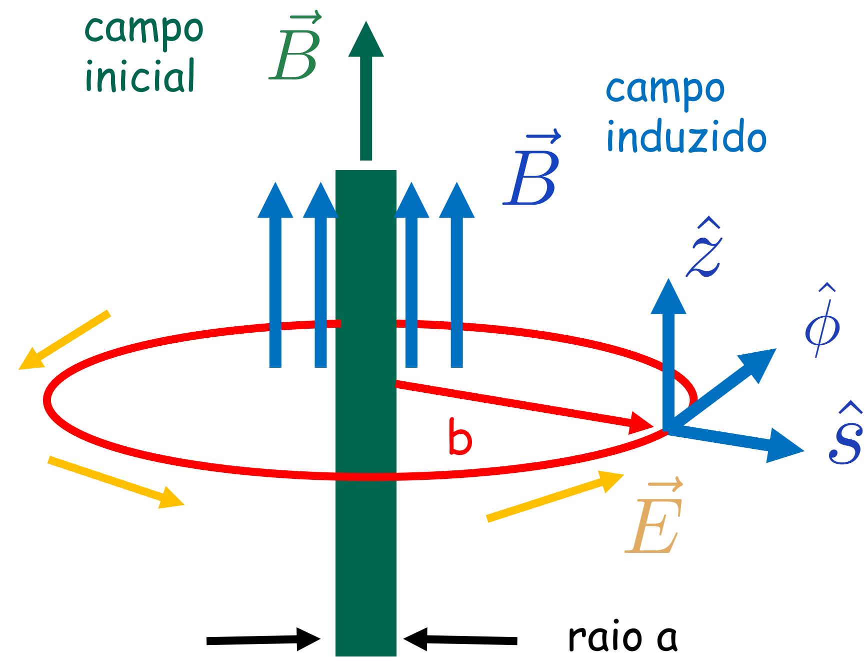
(b) Calcule o vetor de Poynting na superfície externa do solenóide (o campo elétrico é devido ao fluxo variavel no solenóide e o campo magnético devido à corrente induzida no anel). Calcule o fluxo de $\mathbf{S}$ através da superfície do solenóide

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E(2\pi a) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \pi a^2 n \frac{dI_S}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 a n \frac{dI_S}{dt}\hat{\phi}}$$

O campo magnético induzido produzido pela corrente que passa no anel :

$$\mathbf{B} = \cdot\frac{\mu_0 I_r}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}$$




$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 a n}{2}\frac{dI_S}{dt}\right)\left(\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\right)(\hat{\phi}\times\hat{\mathbf{z}})$$

energia fluindo para fora !

$$P = \int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi a)dz = -\frac{1}{2}\pi a^2 b^2 n I_r \frac{dI_S}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(b^2+z^2)^{3/2}}dz$$

$$P = -\left(\pi\mu_0 a^2 n\frac{dI_S}{dt}\right) I_r = R I_r = \boxed{I_r^2 R.}$$

$$\left[\frac{z}{b^2(z^2+b^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{b^2}$$

# Resumão

Eletromag is not the easy thing
Is the only baggage you can bring
Is all that you can't leave behind

Bono Vox

# Equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \oint_S \vec{E} \,.\, d\vec{a} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{E} \,.\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \,.\, d\vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{B} = 0 \qquad \oint_S \vec{B} \,.\, d\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \,\vec{J} + \mu_0 \,\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{B} \,.\, d\vec{l} = \mu_0 \, I_{int} + \mu_0 \,\epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \,.\, d\vec{a}$$

Conhecendo as fontes, encontramos os campos !

$\rho \rightarrow$ Coulomb ou Gauss $\rightarrow \vec{E}$

$\vec{J} \rightarrow$ Biot-Savart ou Ampère $\rightarrow \vec{B}$

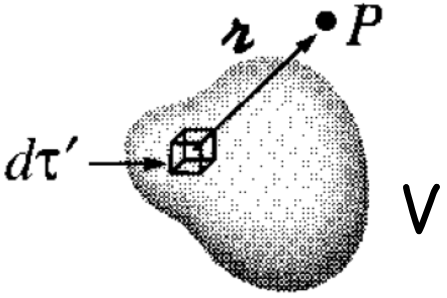
# Eletrostática

## Interação entre duas partículas:

$$F = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{r^2} \qquad\qquad E = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1}{r^2} \qquad\qquad F = q_2\,E$$

(Força de Coulomb)

## Interação entre várias partículas:

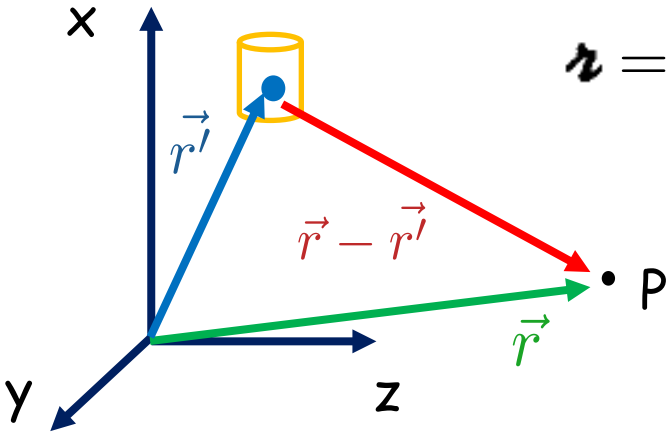



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\mathscr{r}^2}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,dq \qquad\qquad \vec{F} = q\,\vec{E}$$

## Potencial eletrostático :

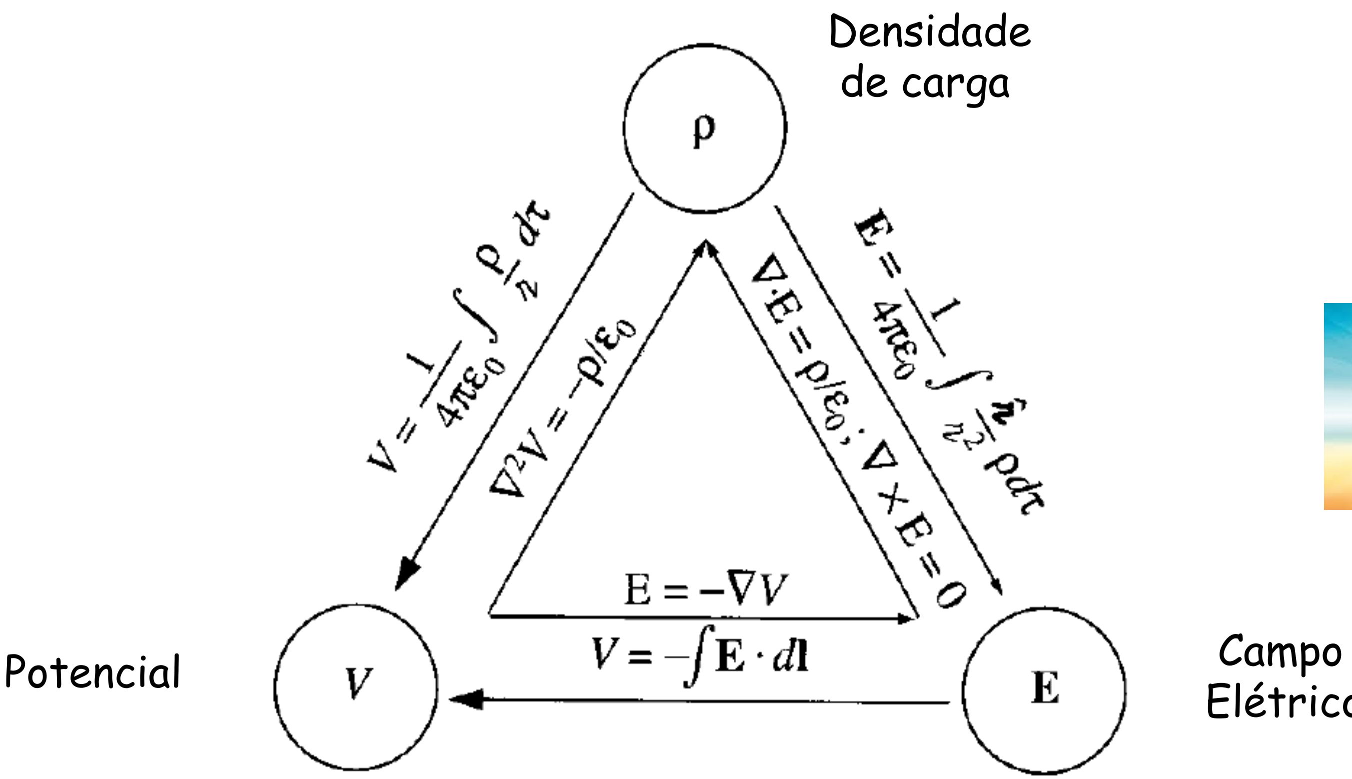
$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad\qquad V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

Ponto de referência




$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$$


D.J. Griffiths

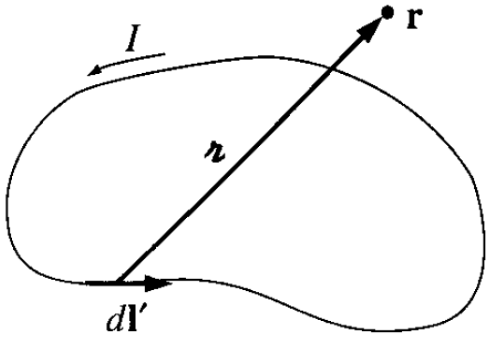



# Magnetostática

Força sobre uma carga em movimento num campo B: $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

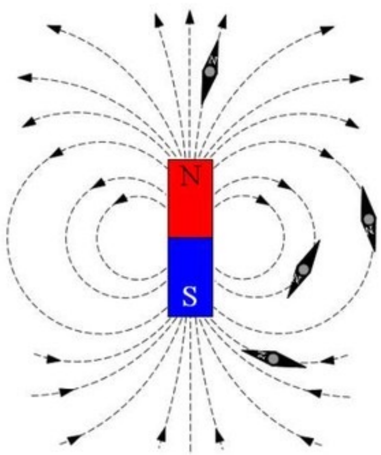
Força sobre uma corrente num campo magnético : $\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$

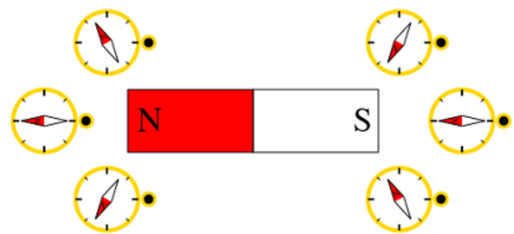
Lei de Biot-Savart: $$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\, dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}.$$

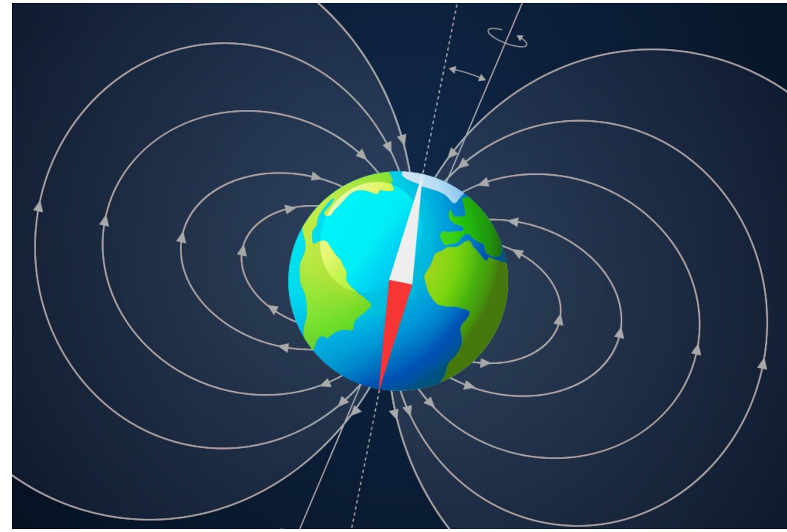


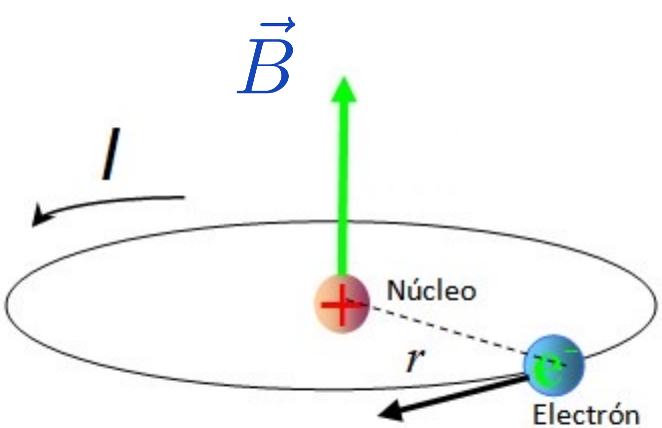

Lei de Ampère: $$\oint_C \vec{B} \,.\, d\vec{l} = \mu_0\, I$$

# Campo magnético micro e macroscópico:

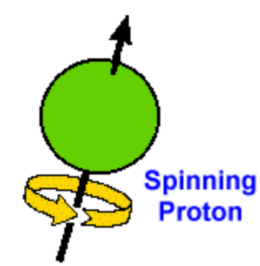


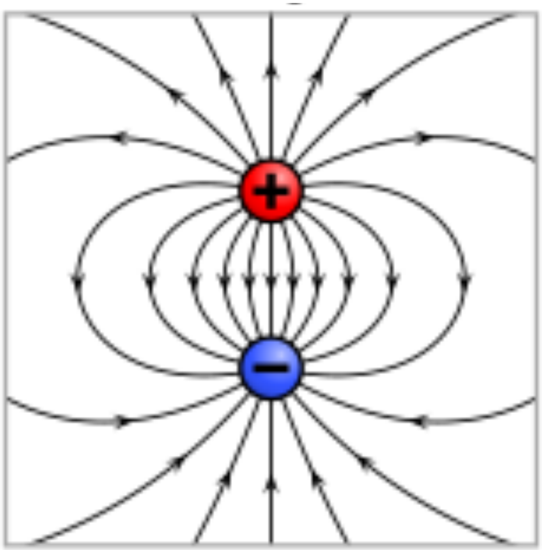





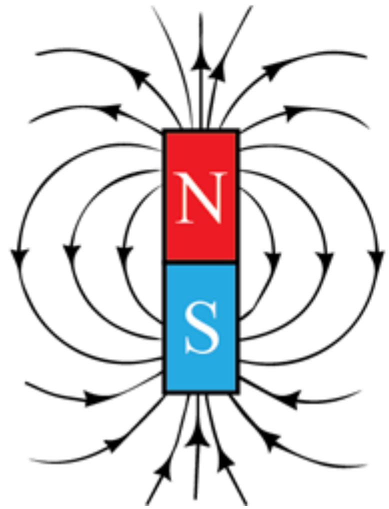


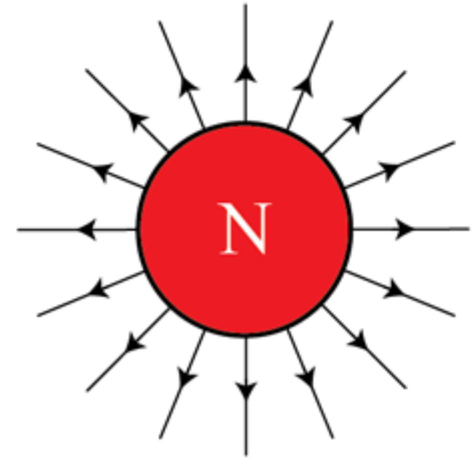
# Não existem monopolos magnéticos !



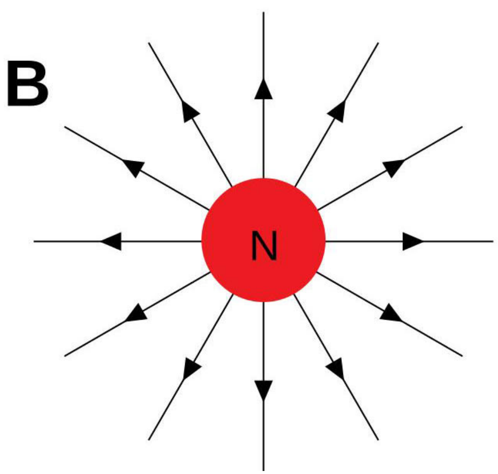
dipolo elétrico

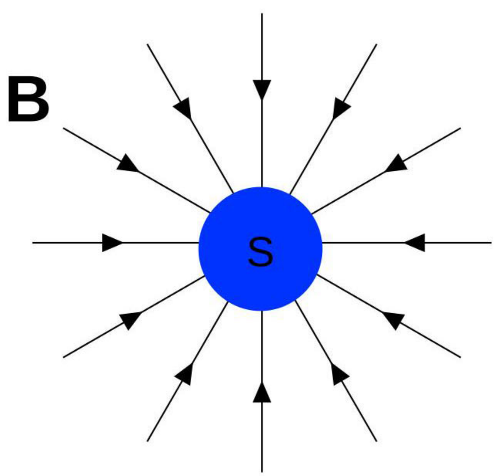



dipolo magnético




monopolo magnético



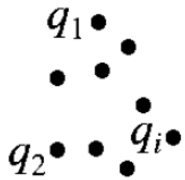




$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

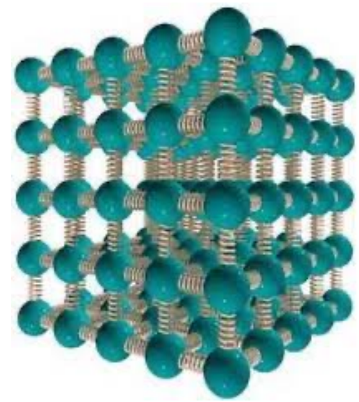
$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{da} = 0$$

# Energia Elétrica

Trazendo cargas do infinito




$=$

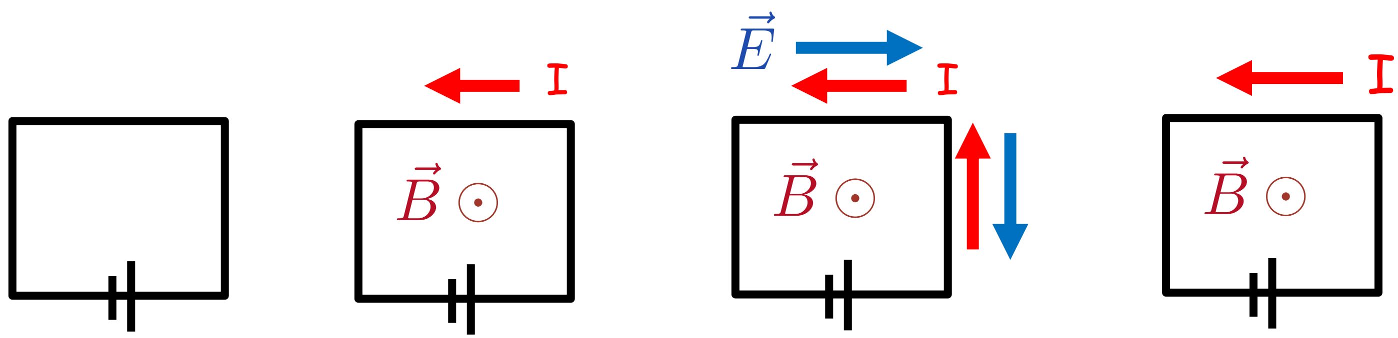


$$W = \frac{1}{2}\int \rho\, V\, d^3r$$

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\, d^3r$$

# Energia Magnética

Iniciando um circuito




$$W = \frac{1}{2}\, L\, I^2$$

$$W_m = \frac{1}{2\,\mu_0}\int B^2\, d^3r$$

# Ondas Eletromagnéticas

Equações de Maxwell no vácuo

$$\begin{cases} \vec{\nabla} . \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} . \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \epsilon_0 \, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

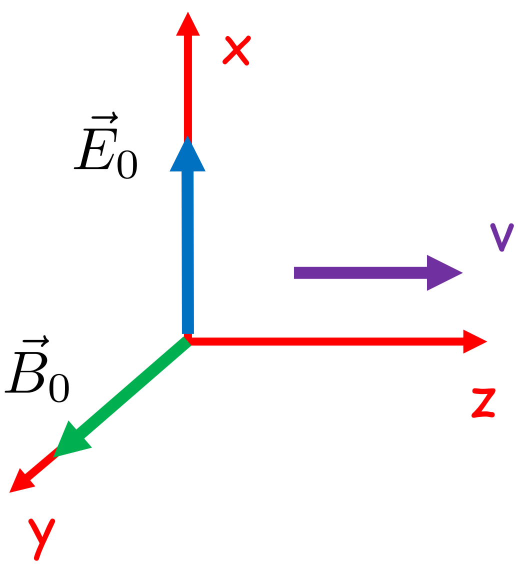
$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \, \vec{E}$$

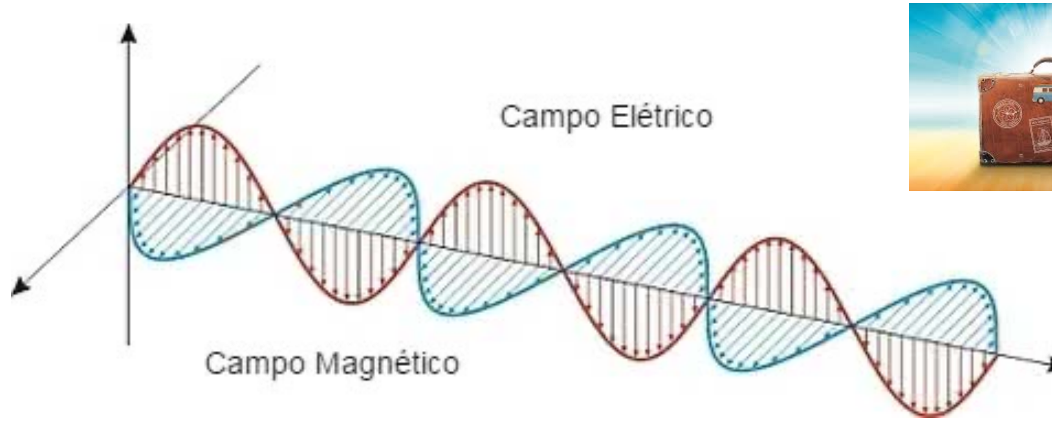
$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \, \vec{B}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \, \epsilon_0}}$$

Luz !

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, cos\,(kz - \omega t) \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \, cos\,(kz - \omega t)$$




# Ondas Eletromagnéticas carregam energia e momento

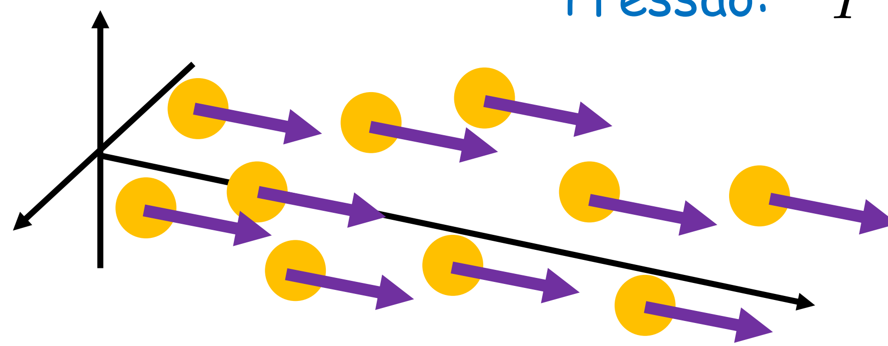
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,(\vec{E} \times \vec{B})$$

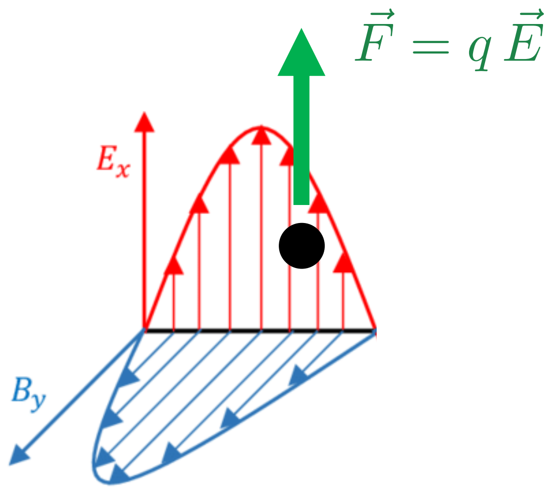
$$\vec{S} = c\,\epsilon_0\,E_0^2\,cos^2\,(kz - \omega t)\,\hat{z}$$

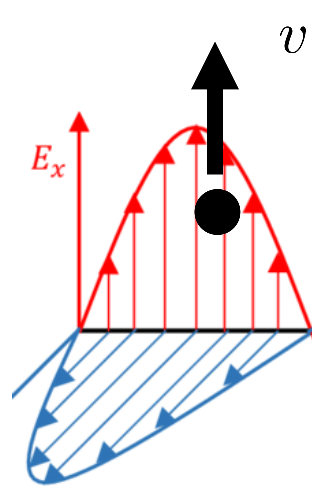
$$I = \langle S \rangle \;\; = \frac{1}{T}\int_0^T dt\,S(t)$$

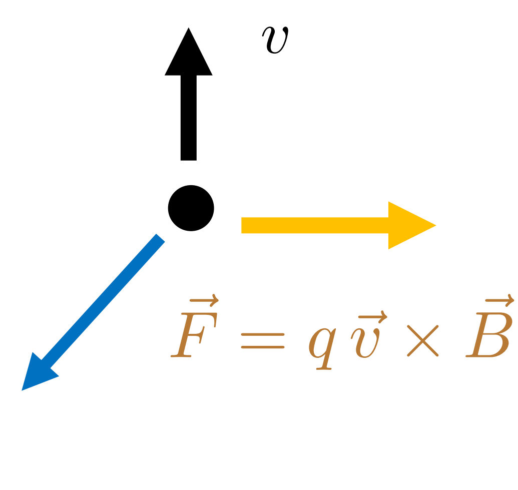
$$= \frac{1}{2}\,c\,\epsilon_0\,E_0^2$$

Pressão: $P = \dfrac{I}{c}$

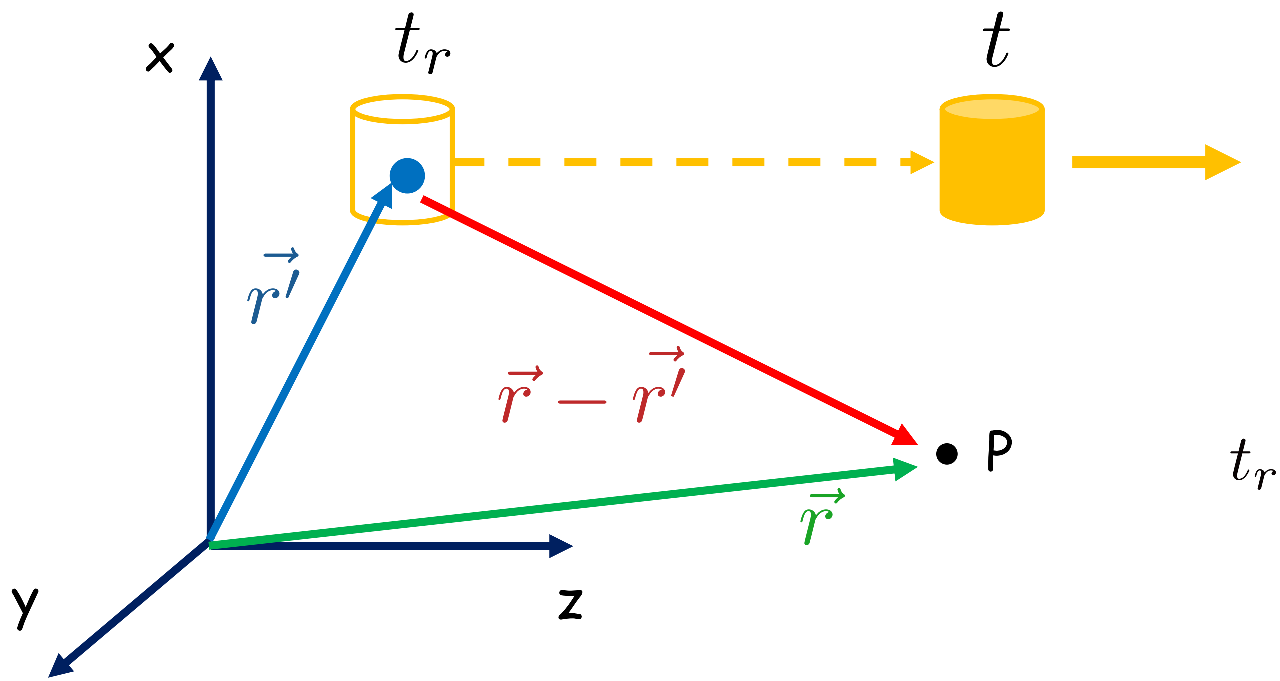




# Potenciais retardados




$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3r'$$

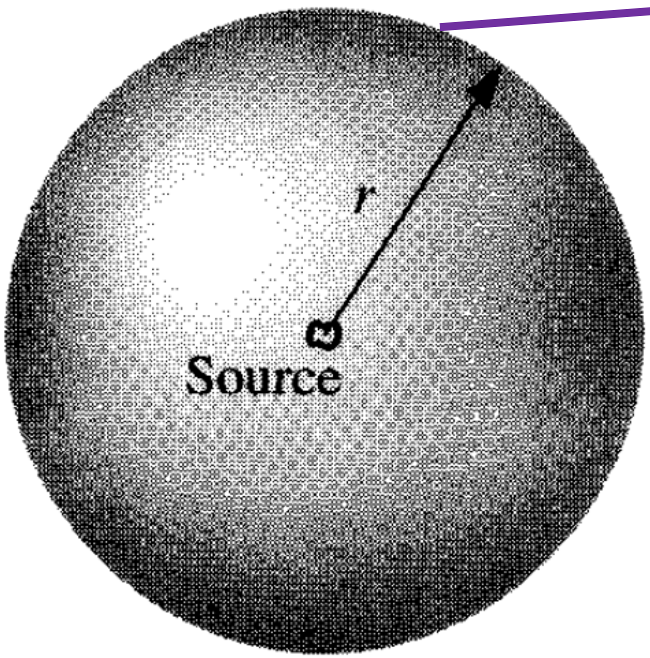
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3r'$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

# Radiação: produção de ondas eletromagnéticas

Radiação: emissão de energia eletromagnética, que sai de uma fonte finita e vai até o infinito.




Potência atravessando esta superfície:

$$P = \oint \vec{S} \,.\, d\vec{a} \;=\oint \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,.\,d\vec{a}$$

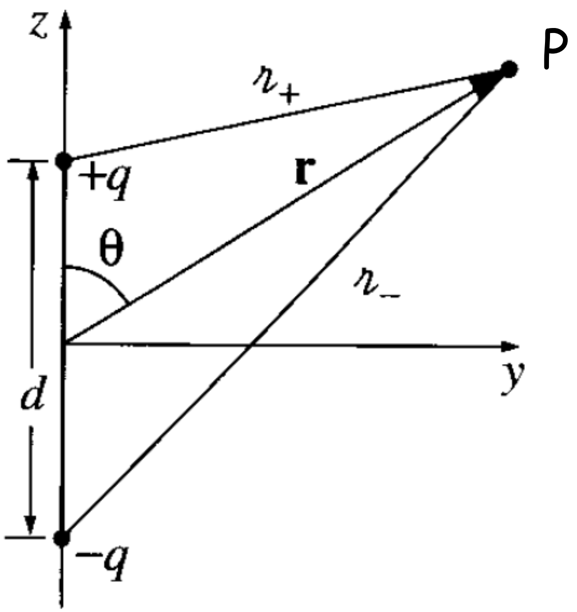
Potência Radiada é o limite de P quando o raio r vai ao infinito

$$P_{rad} = \lim_{r\to\infty} P(r)$$

Radiação: fluxo de energia para longe da fonte !!!

$$\begin{cases} P_{rad} = 0 & \text{Fonte não irradia} \\ P_{rad} \neq 0 & \text{Fonte irradia} \end{cases}$$

# Paradigma: dipolo - antena



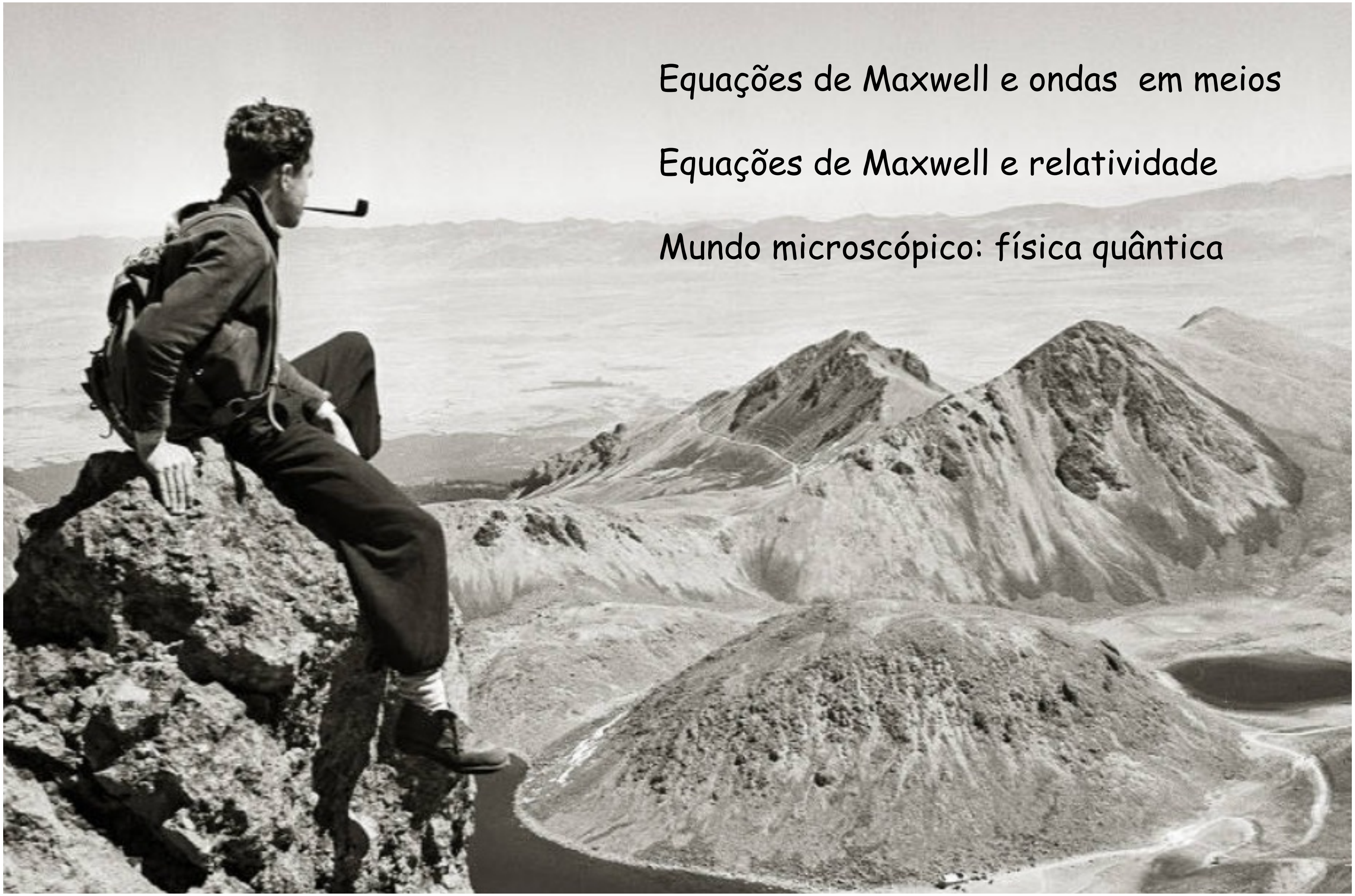

$$< P > = \frac{\mu_0\, q_0^2\, d^2 \omega^4}{12\, \pi^2\, c}$$

$$< P_{rad} > = \lim_{r \to \infty} < P > \neq 0$$

Sim, este sistema irradia !

Céu azul !

# Para onde ir ?




Juan Rulfo 1917 - 1986

Para quem está gostando muito:


Prova de recuperação: 13/12/22 às 21:00

8) No exemplo do dipolo "de brinquedo", calcule a resistência de radiação

$$P = R I^2$$

**Problem 11.3** Find the **radiation resistance** of the wire joining the two ends of the dipole. (This is the resistance that would give the same average power loss—to heat—as the oscillating dipole in *fact* puts out in the form of radiation.) Show that $R = 790\,(d/\lambda)^2\,\Omega$, where $\lambda$ is the wavelength of the radiation. For the wires in an ordinary radio (say, $d = 5$ cm), should you worry about the radiative contribution to the total resistance?

---

**Problem 11.3**

$P = I^2 R = q_0^2\omega^2\sin^2(\omega t)R$ (Eq. 11.15) $\Rightarrow \langle P\rangle = \frac{1}{2}q_0^2\omega^2 R$. Equate this to Eq. 11.22:

$$\frac{1}{2}q_0^2\omega^2 R = \frac{\mu_0 q_0^2 d^2\omega^4}{12\pi c} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\mu_0 d^2\omega^2}{6\pi c};} \text{ or, since } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

$$R = \frac{\mu_0 d^2}{6\pi c}\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \frac{2}{3}\pi\mu_0 c\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{3}\pi(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2\,\Omega = \boxed{789.6(d/\lambda)^2\,\Omega.}$$