

FLUIDOS - AULA 4

Lembrete: Eq. Euler (1) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + u \right) = 0$

$$\text{Eq. Euler (2)} \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \right) = 0 \\ \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 0 \end{cases}$$

1. Escoamentos irrotacionais

Definimos "escoamento irrotacional" aquele escoamento para o qual

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

Lembrando de que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$, concluímos que

$\exists \phi$ = potencial das velocidades tal que $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$

A eq. de Continuidade (sempre para fluidos incompressíveis) resulta em

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla}^2 \phi \quad (\text{eq. Laplace})$$

Obs (IMPORTANTÍSSIMA): Como $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$ é eq. LINEAR

(= se ϕ_1 e ϕ_2 são soluções, logo $\alpha \phi_1 + \beta \phi_2$ = solução)
vimos imediatamente que, se

$$\vec{v}_1 = \vec{\nabla} \phi_1 \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \vec{\nabla} \phi_2,$$

O campo $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ainda é irrotacional

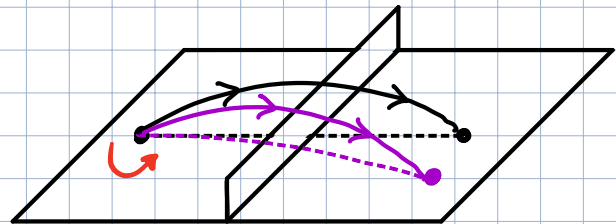
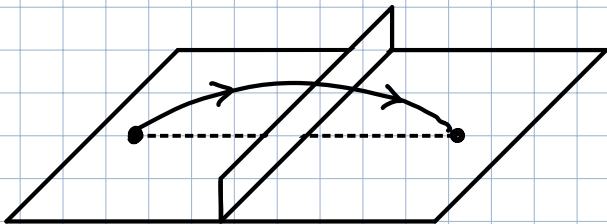


PARA CAMPOS DE VELOCIDADES
IRROTACIONAIS VALE O PRINCÍPIO
DE SUPERPOSIÇÃO!

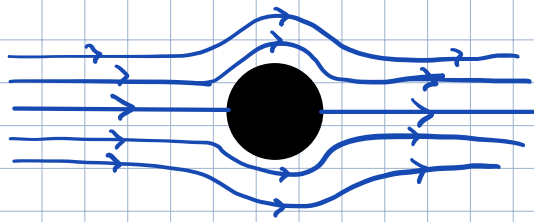
Estratégia: decompor o campo de velocidades em
dois ou mais campo irrotacionais "simples".
Feito isso, a pressão pode ser calculada
da eq. de Euler

APLICAÇÃO: EFEITO MAGNUS

Um corpo que está se deslocando num fluido sofre uma
força que desvia lateralmente a trajetória
quando o corpo está em rotação

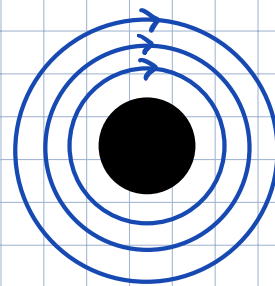


Quais campos irrotacionais podemos somar?

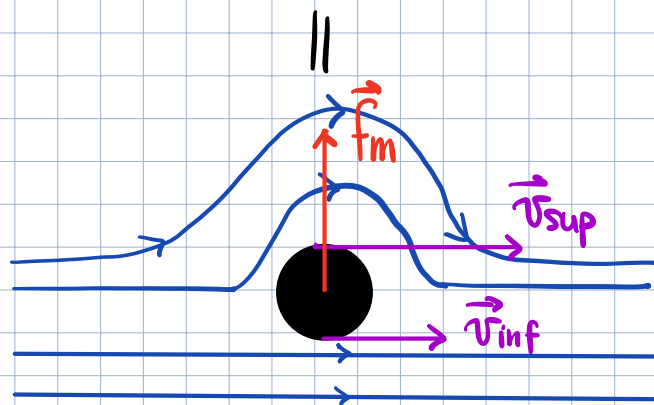


(1) corpo fechado num campo com velocidade paralelas (longe do corpo)

+



(2) campo de rotação
(obs: pode ser irrotacional!)



A "força Magnus" $\vec{f}_m$ resulta da eq. de Bernoulli:

(1) Vamos considerar 2 linhas de escoamento: uma passando por cima, a outra para baixo do objeto

(2) Vamos impor as condições seguintes: muito antes e muito depois do objeto, a pressão será p_0 e a velocidade 0

(3) Eq. de Bernoulli: $\rho \frac{v_{sup}^2}{2} + p_{sup} = p_0 = \rho \frac{v_{inf}^2}{2} + p_{inf}$

Como $v_{sup} > v_{inf} \Rightarrow p_{sup} < p_{inf} \Rightarrow \vec{f}_m$ para cima

2. Ondas sonoras

A eq. de Euler contém uma eq. de ondas (sonoras).
Como obtemos essa eq.?

Vamos considerar uma região de fluido uniforme inicialmente em repouso, com pequenas perturbações de pressão se propagando nela.

Quantitativamente : $L \sim$ dimensão região considerada
 $a \sim$ amplitude oscilação ($a \ll L$)
 $u \sim$ velocidade perturbação

Eq. Euler (desprezando a gravidade) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

↑
estimativa dos ordem de grandeza :

Velocidade será de ordem u e variará sobre distâncias de ordem L , em um tempo de ordem $\frac{a}{u}$ (o período da perturbação)

$$|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| \sim \frac{u^2}{L} \quad ; \quad \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{u^2}{a} \gg \frac{u^2}{L}$$

$\Rightarrow$ Eq. de Euler (aproximada)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

Calculando o rotacional:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \approx 0 \Rightarrow \vec{\Omega} \approx \text{const}$$

Tomando agora a média no tempo:

$$\langle \vec{\Omega} \rangle = \text{const} = \langle \vec{\nabla} \times \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} \times \langle \vec{v} \rangle$$

para um movimento oscilatório

$$\langle \vec{v} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \text{fixe } \text{const} = 0$$

Logo $\vec{\nabla} \times \vec{v} \approx 0 \Rightarrow$ Campo aproximadamente irrotacional

Vamos agora definir as médias

$$\langle p \rangle = p_0 \quad , \quad \langle p \rangle = p_0$$



Cuidado! Não podemos tomar $p = \text{const}$

$\Rightarrow$ precisamos tomar em conta

também a eq. de continuidade

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) = 0$$

e considerar pequenas perturbações

$$\begin{cases} p = p_0 + \Delta p \\ p = p_0 + \Delta p \\ \vec{v} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Delta p \ll p_0 \\ \Delta p \ll p_0 \\ \text{pequena} \end{array}$$

Logo $\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \simeq \frac{\vec{\nabla} \Delta p}{\rho_0}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}(\Delta \rho \vec{v}) \simeq \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

O sistema a ser resolvido é portanto

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\vec{\nabla} \Delta \rho}{\rho_0} \\ \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

O único ingrediente que falta é uma eq. de estado:

$$\Delta \rho = \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0}_{\text{calculada em } (p_0, \rho_0); \text{ é constante}} \Delta p$$

Substituindo no sistema obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \frac{\vec{\nabla} \Delta \rho}{\rho_0} \\ \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \frac{\vec{\nabla}^2 \Delta \rho}{\rho_0} \\ \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \vec{\nabla}^2 \Delta \rho = 0}$$

eq. de onda com velocidade

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0}$$

Como $\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \Delta p$ temos também

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \vec{\nabla}^2 \Delta p = 0$$

pressão Δp obedece a mesma eq. de onda com a mesma velocidade



visão "dual" da onda sonora:
é onda de pressão mas, ao mesmo tempo, é também uma onda de densidade