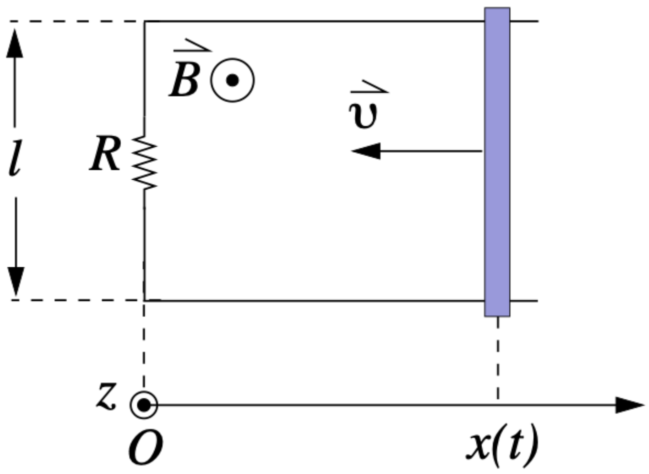
QUESTÃO 1

Uma barra condutora é movida com velocidade constante $-v\,\hat{\imath}$, sobre dois fios condutores separados por uma distância l. A coordenada da barra no instante $t = 0$ é $x(0) = x_0$. Um resistor de resistência R em $x = 0$ está conectado às extremidades dos dois fios, formando o circuito fechado mostrado na figura. Um campo magnético uniforme e crescente com o tempo $\vec{B} = \beta\, t\, \widehat{k}$, onde $\beta > 0$, está presente na região. Nas perguntas abaixo considere o tempo t apenas no intervalo $0 \leq t < x_0/v$.



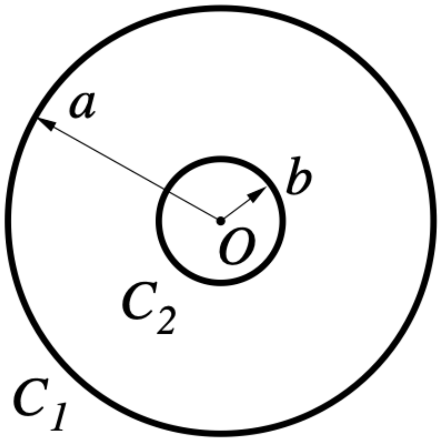
(a) (1,0 ponto) Determine a força eletromotriz induzida no circuito como função do tempo t.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente induzida no circuito e determine o instante de tempo no qual ela se anula.

(c) (0,5 ponto) Determine o sentido da corrente (horário ou anti-horário) como função do tempo t.

QUESTÃO 2

Um anel condutor C_1 de raio a está no plano xy e centrado na origem O de um sistema de coordenadas. Outro anel condutor C_2, concêntrico a C_1 possui raio $b << a$, conforme a figura.



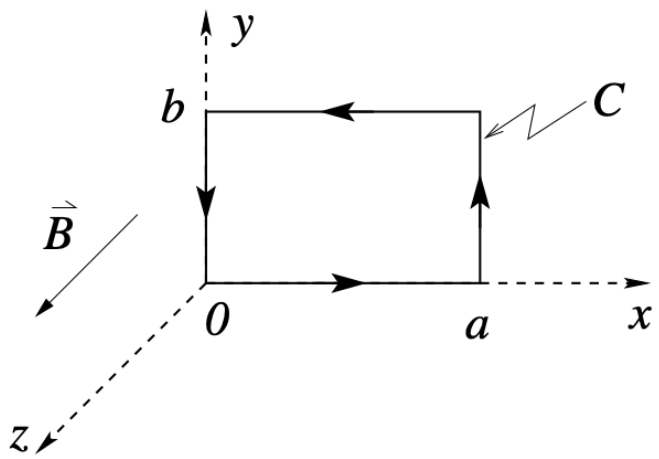
(a) (1,5 ponto) Calcule a indutância mútua entre os dois anéis. Justifique as aproximações feitas.

(b) (1,0 ponto) No anel C_2 circula uma corrente $I_2 = I_0 \cos(\omega t)$. Calcule a força eletromotriz induzida no anel 1 pelo anel 2.

Dado: O campo magnético no centro de um anel de raio R por onde passa uma corrente I é $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$.

QUESTÃO 3

O campo elétrico na região considerada na figura é dado por $\vec{E}(y) = Ky\,\hat{\imath}$ sendo K uma constante positiva.



(a) (1,0 ponto) Calcule a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do retângulo C de largura a e altura b, orientado como é mostrado na figura.

(b) (1,0 ponto) Além do campo elétrico na região considerada há também um campo magnético uniforme $\vec{B}(t) = B(t)\,\widehat{k}$ cuja intensidade depende do tempo. Em $t = 0$, $B(0) = B_0$. Utilizando a lei de Faraday na forma integral determine $B(t)$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade de carga na região.

QUESTÃO 4

Uma onda eletromagnética plana senoidal polarizada na direção do eixo x propaga-se no vácuo na direção dos valores crescentes do eixo z. A frequência da onda é 10^8 s^{-1} e o valor máximo atingido pela componente magnética da onda é 10^{-8} tesla na origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$.

(a) (1,0 ponto) Escreva as expressões dos vetores campo elétrico e campo magnético da onda como função do tempo e posição. Todos os parâmetros da expressão devem ser numéricos.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor de Poynting da onda. Todos os parâmetros da expressão devem ser numéricos.

(c) (1,0 ponto) Considere agora a incidência desta onda sobre uma placa totalmente absorvedora de área $A = 4$ m^2, que se encontra em uma posição paralela ao plano xy em $z = 0$. Calcule a energia U absorvida pela placa após um intervalo de tempo de incidência igual a três vezes o período da onda. A resposta deve ser numérica.

QUESTÃO 5

Considere um sistema composto por um fio retilíneo infinito e uma espira quadrada de lado a. O fio, que está colocado ao longo do eixo z de um sistema de referência, é percorrido por uma corrente I e gera um campo magnético dado por $\vec{B} = \mu_0 I \,\widehat{\phi}/(2\pi r)$, onde r é a distância até o fio.

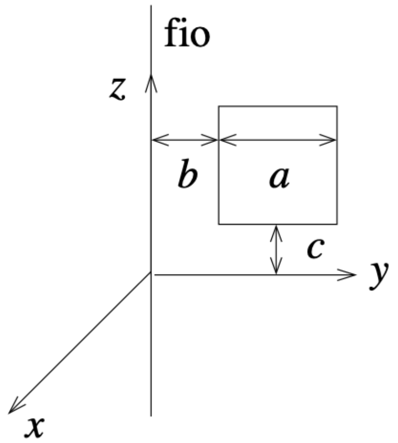


FIG. 1

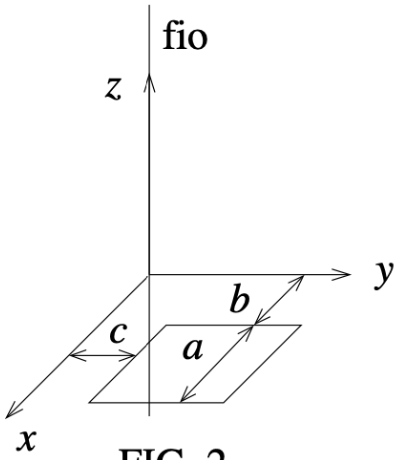


FIG. 2

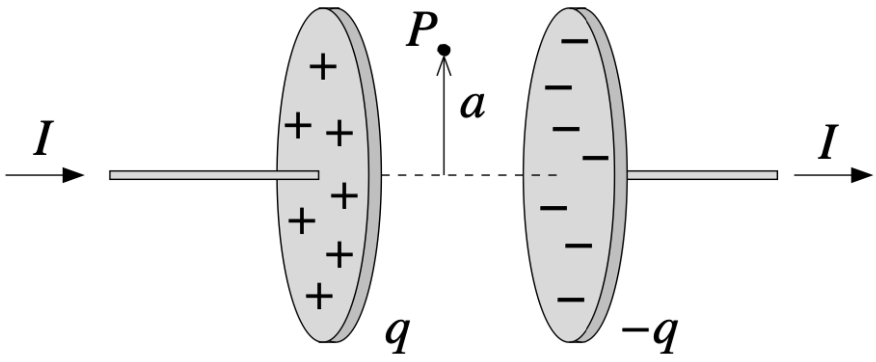
(a) (1,0 ponto) Calcule a indutância mútua entre o fio e a espira quando ela está colocada no plano yz, conforme a figura 1.

(b) (0.5 ponto) Calcule a indutância mútua entre o fio e a espira quando ela está colocada no plano xy, conforme a figura 2.

(c) (1,0 ponto) Suponha, agora, que a espira tem resistência R e que a corrente no fio varia no tempo como $I(t) = \alpha t^2$, onde α é uma constante positiva. Com a espira na posição indicada na figura 1, calcule a corrente induzida na espira. Esta corrente circula a espira no sentido horário ou anti-horário? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 6

(I) (1,5 ponto) Um capacitor de placas paralelas circulares, no vácuo, está sendo carregado, como indica a figura abaixo. As placas têm raio R e a corrente de condução nos fios no instante t é igual a $I(t)$.



Calcule o campo magnético no ponto P a uma distância $a < R$ do eixo do capacitor, conforme a figura. Dado: o campo elétrico dentro do capacitor é $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga.

(II) (1,0 ponto) O campo elétrico de uma onda que se propaga no vácuo é dada por $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2}\,\hat{\jmath}$, onde a constante $\alpha > 0$. Use a lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, para calcular o campo vetorial $\vec{B}$ desta onda.

QUESTÃO 7

Uma onda eletromagnética plana monocromática de comprimento de onda λ propaga-se no vácuo no sentido positivo do eixo z. Seu campo elétrico oscila na direção x e sua amplitude assume metade do seu valor máximo E_0 na origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$. Nos itens (a) e (b) abaixo, expresse suas respostas em termos de E_0, c, μ_0 e λ.

(a) (1,5 ponto) Escreva a expressões dos vetores campo elétrico e campo magnético associados a esta onda.

(b) (0.5 ponto) Calcule o vetor de Poynting.

(c) (0.5 ponto) No instante $t = 0$, um elétron de carga q_e está passando pela origem do sistema de coordenadas com velocidade $c/2$, na direção e sentido do eixo z. Calcule o vetor força que age sobre o elétron em $t = 0$ devido a essa onda.

QUESTÃO 8

Um feixe de luz laser monocromático incide normalmente sobre uma placa que absorve totalmente a radiação. O feixe tem intensidade I e seção reta circular de raio R.

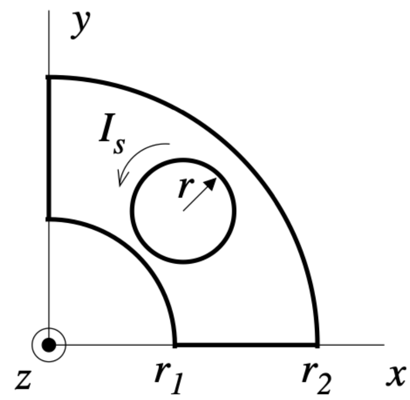
(a) (1,0 ponto) Calcule a amplitude do campo magnético do feixe.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia média absorvida pela placa no intervalo de tempo T.

(c) (0,5 ponto) Calcule a energia eletromagnética média contida num comprimento L do feixe.

QUESTÃO 9

Um circuito com resistência R, contido no plano xy, é constituído por dois arcos de circunferência com raios r_1 e r_2 e por dois segmentos retos. Este circuito envolve um solenóide muito longo, com eixo paralelo ao eixo z, n espiras por unidade de comprimento e raio r tal que $2r < r_2 - r_1$, conforme a figura. Pelo solenóide passa uma corrente I_s que flui no sentido anti-horário. I_s cresce com o tempo com taxa $\beta = dI_s/dt > 0$. Desprezando efeitos de borda, a intensidade do campo magnético no interior do solenóide é $B = \mu_0 n I_S$.



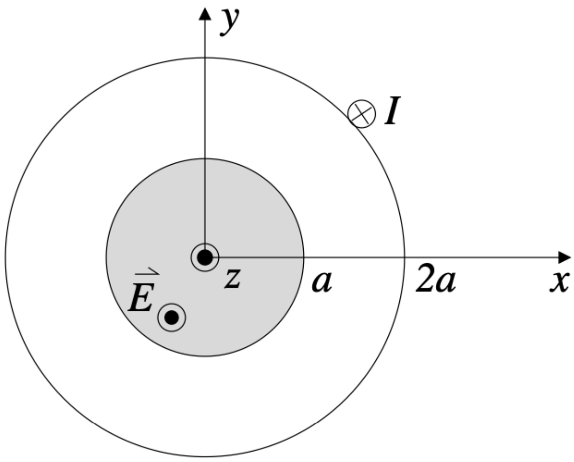
(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo do solenóide através do circuito.

(b) (1,0 ponto) Calcule o coeficiente de mútua indutância entre o solenóide e o circuito.

(c) (1,0 ponto) Calcule o sentido (horário ou anti-horário) e a magnitude da corrente I induzida no circuito.

QUESTÃO 10

Em uma casca cilíndrica de comprimento infinito, raio $2a$ e coaxial com o eixo z passa uma corrente I, uniformemente distribuída, que flui no sentido de z negativo. No interior desta casca cilíndrica existe uma região cilíndrica (região cinza na figura) também de comprimento infinito, raio a e coaxial com o eixo z onde há um campo elétrico uniforme $\vec{E}(t) = Kt\,\widehat{k}$, onde K é uma constante positiva e t é o tempo.



(a) (1,5 ponto) Desconsiderando a casca cilíndrica por onde passa corrente, calcule o vetor campo magnético em todo o espaço (regiões $r < a$ e $r > a$, onde r é distância ao eixo z).

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo magnético devido somente à corrente que passa pela casca cilíndrica em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) Calcule o valor da corrente I para que o campo magnético seja nulo para $r > 2a$.

QUESTÃO 11

A componente magnética da radiação existente no vácuo é dada pela superposição de duas ondas planas:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -10\cos(3x - 9\times 10^8 t)\,\hat{\jmath} - 10\cos(3x + 9\times 10^8 t)\,\hat{\jmath} \quad \text{(SI)}.$$

Coloque a velocidade da luz $c = 3\times 10^8$ m/s e se necessário deixe suas respostas em função de μ_0.

(a) (1,0 ponto) Calcule o número de onda k e o vetor velocidade de propagação de cada componente de $\vec{B}$.

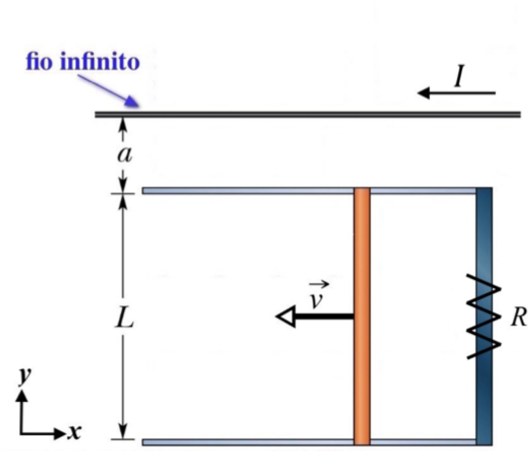
(b) (1,0 ponto) Determine as correspondentes componentes elétricas $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado a esta radiação.

(d) (0,5 ponto) Esta radiação transporta energia? Justifique.

QUESTÃO 12

Uma barra condutora vertical de comprimento L sob a ação de uma força externa $\vec{F}_{\text{ext}}$, se move na horizontal com velocidade constante $\vec{v} = -v\hat{\imath}$, deslizando sem atrito sobre 2 condutores paralelos fixos, formando um circuito fechado com uma terceira barra fixa de resistência R. Simultaneamente, um fio horizontal infinito está paralelo aos dois condutores e a uma distância a do condutor mais próximo. Por este fio passa uma corrente constante I no sentido negativo do eixo x. Sabendo que o módulo do campo magnético produzido por um fio com corrente I a uma distância r é dado por $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, determine:



(a) (1,5 ponto) O módulo da força eletromotriz induzida no circuito.

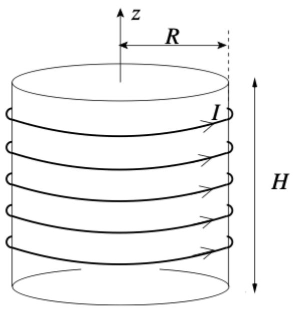
(b) (0,5 ponto) O sentido da corrente induzida no circuito e justifique sua resposta.

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor força externa $\vec{F}_{\text{ext}}$, em termos dos parâmetros geométricos do problema e demais dados no enunciado.

QUESTÃO 13

Parte I

Considere um solenóide ideal de N espiras, raio R e comprimento $H \gg R$ transportando uma corrente I no sentido indicado pela figura abaixo. O campo magnético em seu interior é dado por $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{H} \hat{z}$.



(a) (1,0 ponto) Determine a auto-indutância do solenóide.

(b) (1,5 ponto) Considere agora que a corrente elétrica seja variável no tempo $I(t) = at$, sendo $a > 0$ uma constante. Determine **o vetor campo elétrico** induzido nas regiões $r < R$ (dentro do solenóide) e $r > R$ (fora do solenóide).

Parte II

Considere um sistema cujo vetores campo elétrico e magnético são dados por $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (hx + pxyt, 0, 0)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (ay, 0, bxt^2)$, respectivamente onde h, p, a, b são constantes e (x, y, z) denotam coordenadas cartesianas. Usando as equações de Maxwell, determine:

(c) (0,5 ponto) A densidade de carga do sistema.

(d) (1,0 ponto) O vetor densidade de corrente $\vec{J}$ do sistema.

QUESTÃO 14

O campo magnético de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo é dado por $\vec{B} = B_0 \sin[k(x + ct)]\hat{z}$. **Expresse suas respostas apenas em termos de dados do problema e constantes universais.**

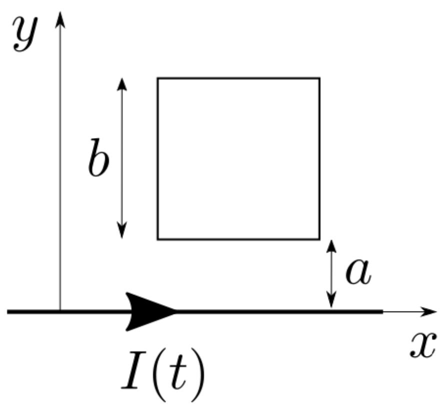
(a) (1,0 ponto) Determine o *vetor* campo elétrico desta onda. Justifique sua resposta por meio de um esquema gráfico dos vetores pertinentes.

(b) (1,0 ponto) Determine o *vetor* de Poynting desta onda.

(c) (1,0 ponto) Determine a energia total transportada pela radiação através de uma área A perpendicular à frente de onda durante um intervalo de tempo igual a 4 vezes o período da onda.

QUESTÃO 15

Considere um fio infinito transportando uma corrente elétrica $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ ao longo do eixo x e uma espira quadrada de b, conforme indicado na figura abaixo. De acordo com a lei de Biot-Savart, módulo do campo magnético produzido pelo fio infinito é dado por $B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$. O fluxo ϕ_m do campo magnético do fio através da espira é dado por $\phi_m = CI(t)$, sendo C uma constante.



(a) (0,5 ponto) Obtenha a indutância mútua do sistema fio-espira em termos de C.

(b) (1,0 ponto) Calcule a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo da espira.

(c) (1,5 ponto) Calcule o fluxo magnético ϕ_m e a constante C em termos de a, b, μ_0.

(d) (1,0 ponto) Supondo que a espira tenha resistência R, determine a corrente induzida na espira e seu sentido no intervalo $0 < t < \pi/\omega$.

QUESTÃO 16

Em uma região do espaço com campo magnético $\vec{B}$ da forma $\vec{B}(x,y) = (\alpha y + \beta x)\vec{i}$, onde α e β são duas constantes. Existe também um campo elétrico $\vec{E}(t)$ com valor inicial $\vec{E}(0) = \vec{E}_0$ uniforme. Usando as equações de Maxwell na forma diferencial e assumindo que o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ seja nulo, determine:

(a) (0,5 ponto) A constante β.

(b) (1,0 ponto) O vetor campo elétrico $\vec{E}(t)$.

(c) (0,5 ponto) A densidade de carga do sistema.

(d) (1,0 ponto) Qual das equações de Maxwell não foi utilizada ainda? Verifique que tal equação é satisfeita.

QUESTÃO 17

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta t)\vec{j},$$

onde α e β são duas constante positivas dadas. Expresse suas respostas utilizando a velocidade da luz no vácuo c.

(a) (1,0 ponto) Deduza a relação existente entre as constantes α e β sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda.

(b) (1,0 ponto) A partir da lei de Faraday, deduza a expressão do campo magnético da onda.

(c) (1,0 ponto) Reescreva $\vec{E}(x,t)$ na forma de uma superposição de ondas que se compõem para produzir esta onda estacionária.

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{j}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >= \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) >=< \mathrm{sen}^2(kx-\omega t+\phi) >= 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\ \mathrm{sen}(kx-\omega t+\phi) >= 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$