Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

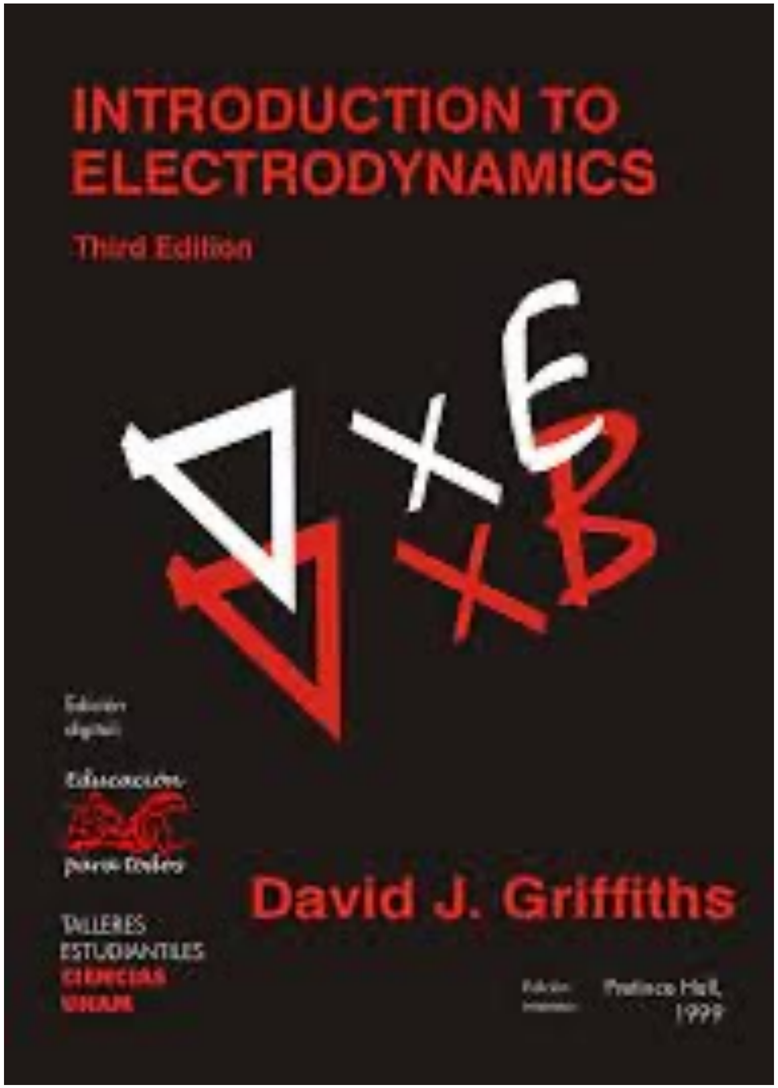
guilherme.germano@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

Plano do Curso

16/08	13/09	11/10	08/11
19/08	16/09	14/10	11/11
23/08	20/09 P1	18/10	15/11
26/08	23/09	21/10 P2	18/11
30/08	27/09	25/10	22/11
02/09	30/09	28/10	25/11 P3
06/09	04/10	01/11	29/11 correção
09/09	07/10	04/11	02/12 S1
			06/12 revisão
			09/12 S2

Bibliografia



Capítulo 2 : eletrostática

Capítulo 5 : magnetostática

Capítulo 7 : eletrodinâmica

Capítulo 8 : leis de conservação

Capítulo 9 : ondas eletromagnéticas

Capítulo 10 : campos e potenciais

Capítulo 11 : radiação

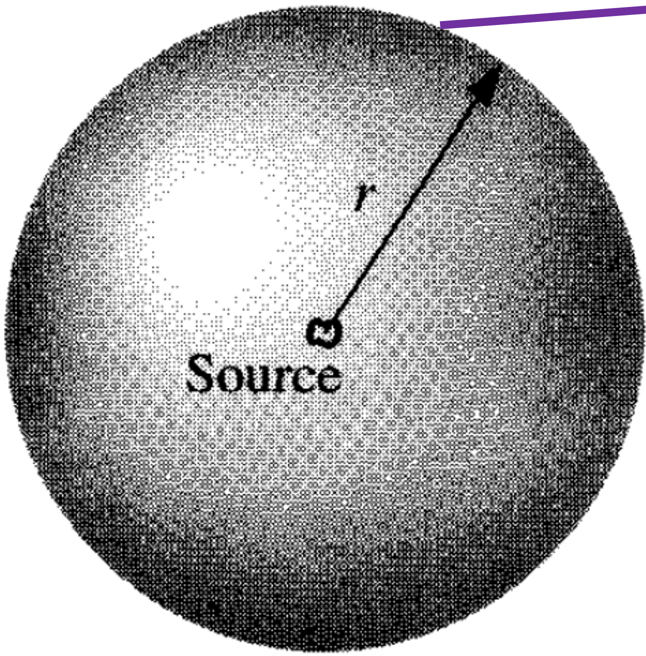
Aula 22

Radiação

Griffiths - Capítulo 11

Radiação: produção de ondas eletromagnéticas

Radiação: emissão de energia eletromagnética, que sai de uma fonte finita e vai até o infinito.



Potência atravessando esta superfície:

$$P = \oint \vec{S}\,.\,\vec{da} \;=\oint \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,.\,\vec{da}$$

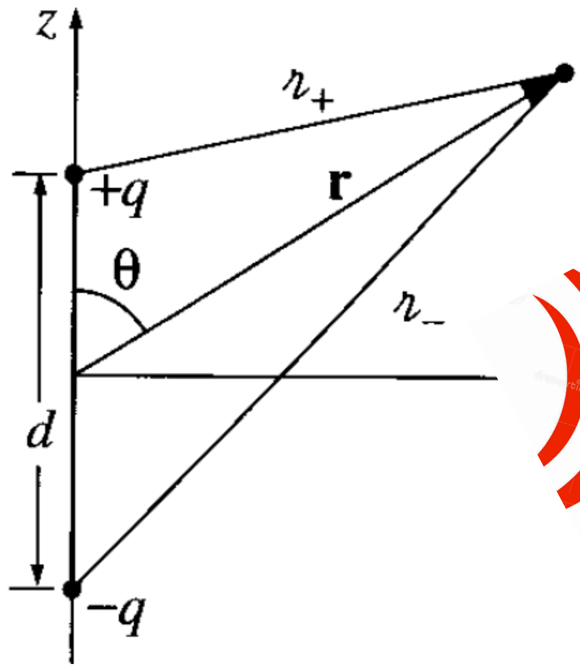
Potência Radiada é o limite de P quando o raio r vai ao infinito

$$P_{rad} = \lim_{r\to\infty} P(r)$$

$$\begin{cases} P_{rad} = 0 & \text{Fonte não irradia} \\ P_{rad} \neq 0 & \text{Fonte irradia} \end{cases}$$

Uma antena simples: o dipolo elétrico

$$q_+(t) = +\, q_0\, cos(\omega t)$$



$$q_-(t) = -\, q_0\, cos(\omega t)$$

$$< \vec{S} >= \frac{\mu_0\, q_0^2\, d^2 \omega^4}{32\, \pi^2\, c}\, \frac{sen^2\theta}{r^2}\, \hat{r}$$

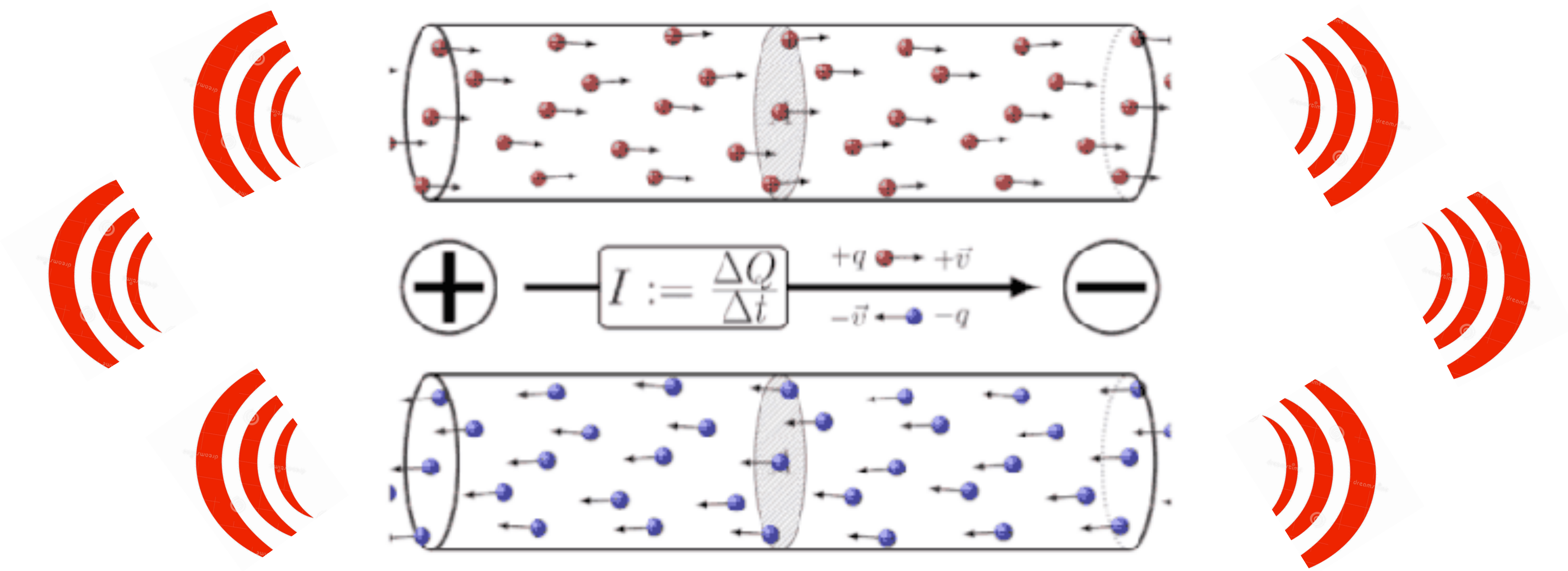
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0\, q_0\, d^2\, \omega^4}{12\, \pi\, c}$$

Radiação emitida
principalmente
a 90 graus !

Emissão de radiação eletromagnética por cargas aceleradas

Dipolo elétrico : $$\langle P \rangle = \frac{\mu_0\, q_0^2\, d^2\, \omega^4}{12\,\pi\, c}$$

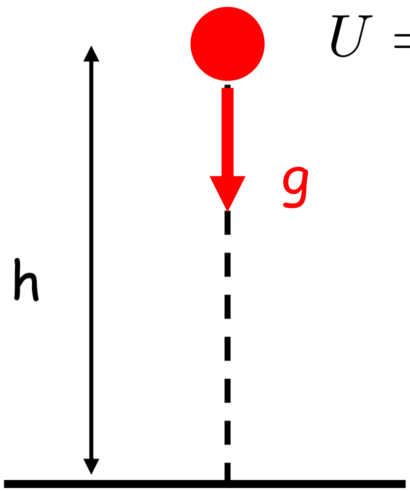
Carga acelerada : $$\langle P \rangle = \frac{\mu_0\, q^2\, a^2}{6\,\pi\, c}$$ Fórmula de Larmor



As cargas colidem, se desaceleram e irradiam !

Exercícios

1) Um elétron é abandonado em repouso e cai sob a ação da gravidade. Em 2 centímetros de queda, que fração da energia potencial foi irradiada ?



$$U = m\,g\,h$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0\, q^2\, a^2}{6\,\pi\, c} \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\mu_0\, q^2\, a^2}{6\,\pi\, c}$$

$$\Delta E = \frac{\mu_0\, q^2\, g^2}{6\,\pi\, c}\,\Delta t$$

$$\Delta E = \frac{\mu_0\, q^2\, g^2}{6\,\pi\, c}\sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

$$y = y_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

$$y = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$t = \Delta t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

$$\frac{\Delta E}{U} = \frac{\mu_0\, q^2\, g^2}{6\,\pi\, c}\sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,\frac{1}{m\,g\,h} = \boxed{\frac{\mu_0 e^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2g}{h}}.}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(1.6 \times 10^{-19})^2}{6\pi(9.11 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)}\sqrt{\frac{(2)(9.8)}{(0.02)}}$$

$$= \boxed{2.76 \times 10^{-22}.}$$

2) Numa onda eletromagnética o campo elétrico é dado pela expressão:

$$\vec{E} = E_0 \, cos(kx - \omega t) \, \hat{y}$$

a) Encontre o campo magnético, o vetor de Poynting, a intensidade e a pressão.

b) Encontre, em função da amplitude de campo elétrico, a aceleração que esta onda pode produzir numa vela solar de área A e massa m.

As ondas eletromagnéticas satisfazem sempre as equações de Maxwell. Vamos começar impondo que a onda satisfaça a lei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vamos calcular o rotacional de $\vec{E} = E_0\, cos(kx - \omega t)\,\hat{y}$ $\qquad \dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{c}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0\, cos(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = -E_0\, k\, sen(kx - \omega t)\,\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0\, k\, sen(kx - \omega t)\,\hat{z} \quad \rightarrow \quad B = \int E_0\, k\, sen(kx - \omega t)\, dt$$

$$B = E_0\, k\,(-)\, cos(kx - \omega t)\,(\frac{1}{-\omega}) + C \quad = \frac{E_0}{c}\, cos(kx - \omega t) + C$$

0

O vácuo é vazio !

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c}\, cos(kx - \omega t)\,\hat{z}}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B} \;=\frac{1}{\mu_0}\,E_0\,cos(kx-\omega t)\,\hat{y} \times \frac{E_0}{c}\,cos(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0\,c}\,cos^2(kx-\omega t)\,\hat{x}$$

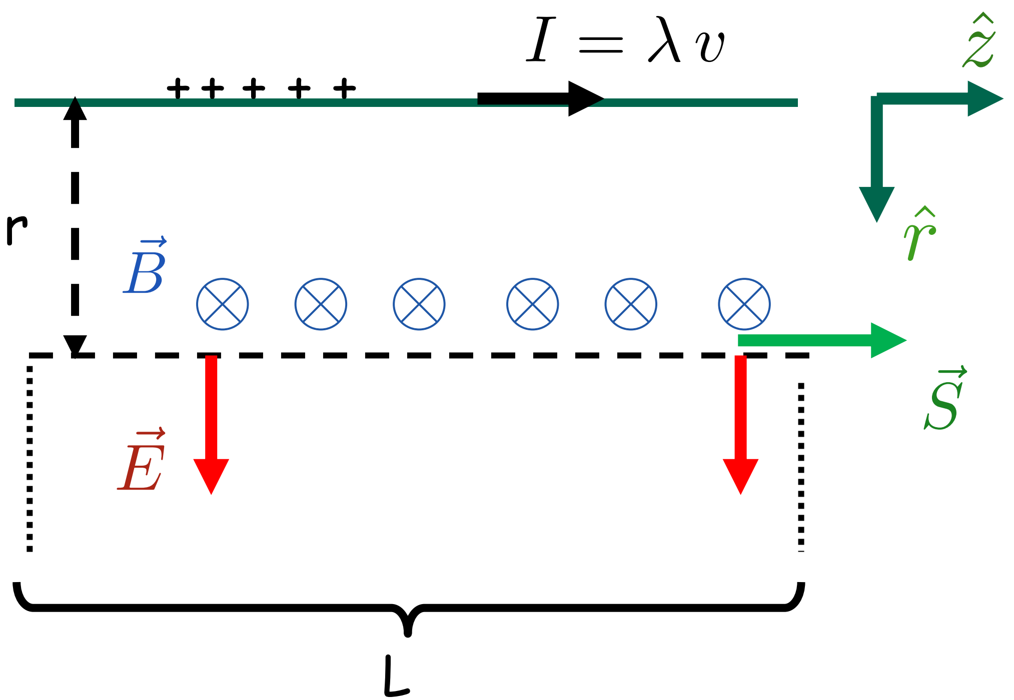
$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0\,c}\,\underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_0^T cos^2(kx-\omega t)\,dt\right]}_{1/2}\,\hat{x} \;= \frac{E_0^2}{2\,\mu_0\,c}\,\hat{x}$$

$$I = |\langle\vec{S}\rangle| \qquad \boxed{I = \frac{E_0^2}{2\,\mu_0\,c}}$$

$$P = \frac{I}{c} \;= \frac{E_0^2}{2\,\mu_0\,c^2} \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0\,\epsilon_0} \;\rightarrow\; \frac{1}{\mu_0\,c^2} = \epsilon_0$$

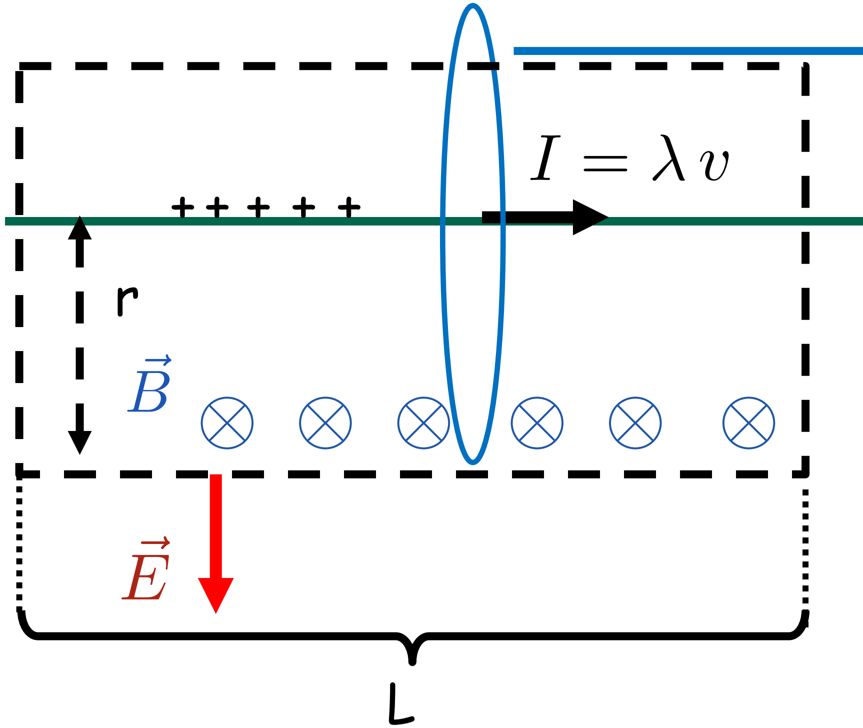
$$\boxed{P = \frac{\epsilon_0\,E_0^2}{2}} \;\rightarrow\; \begin{cases} F = P\,A \\ m\,a = P\,A \end{cases} \;\rightarrow\; \boxed{a = \frac{A}{m}\,\frac{\epsilon_0\,E_0^2}{2}}$$

3) As cargas positivas se deslocando num fio carregado com densidade linear de carga lambda produzem uma corrente I. Calcule o campo elétrico, o campo magnético e o vetor de Poynting. Este sistemas pode produzir ondas eletromagnéticas ?



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{S} = S \hat{z}$$



$$2\,\pi\,r\,B = \mu_0\,I$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}}$$

$$E\,2\,\pi\,r\,L = \frac{\lambda\,L}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r}}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\,\times\,\vec{B}$$

$$\boxed{S = \frac{\mu_0\,I\,\lambda}{4\,\pi^2\,\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}}$$

4) Encontre os campos, cargas e distribuições de corrente correspondendo aos potenciais:

$$V(\mathbf{r},t) = 0; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A} = \quad & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\cancelto{0}{A_\varphi}\sin\theta) - \cancelto{0}{\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}}\right)\hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cancelto{0}{A_\varphi})\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cancelto{0}{A_\theta}) - \cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = 0}$$

Os potênciais acima são uma escolha não usual uma carga estacionária q na origem, a escolha habitual é $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ e $\mathbf{A} = 0$.

5) Supondo $V = 0$ e $\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$), onde A_0, ω e k são constantes. Encontre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e mostre que eles satisfazem as equações de Maxuell no vácuo. Qual condição deve ser imposta sobre k e ω ?

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -A_0 \cos(kx - \omega t)(-\omega)\hat{\mathbf{y}} = \boxed{A_0 \omega \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_0\, sen(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial x}[A_0 \sin(kx - \omega t)] = \boxed{A_0 k \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}}}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \boxed{A_0 \omega \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial x}[A_0 \omega \cos(kx - \omega t)] = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}},$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}.$$

Tem que ser satisfeita !

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial x}[A_0 k \cos(kx - \omega t)] = A_0 k^2 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = A_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

Tem que ser satisfeita e é desde que :

$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$, ou, como $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$, $\omega = ck$.

Fim