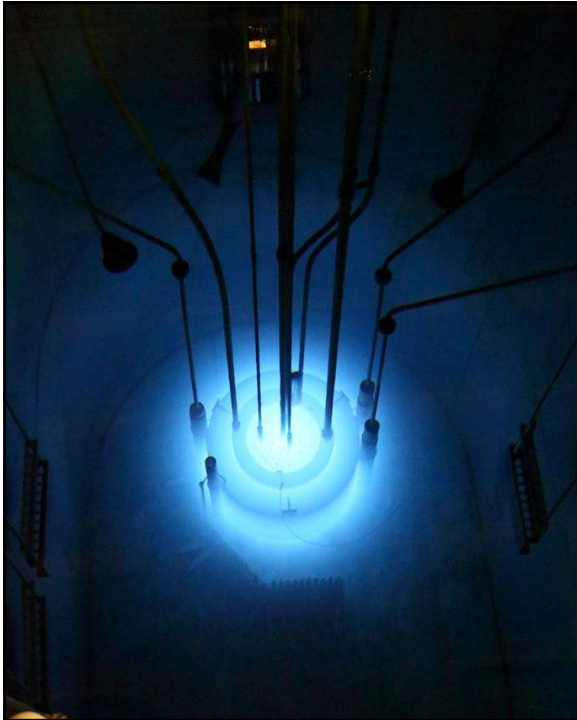




13

Radiação de Cherenkov 2

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. *Ricardo A. Terini*

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

13

14

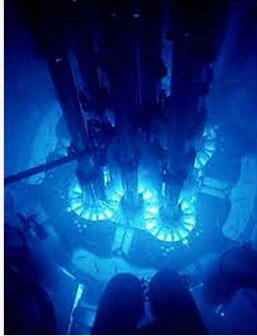
- ♦ 1ª. Parte: Novos comentários sobre a questão 1 da Prova P2
- ♦ 2ª. Parte: Radiação de Cherenkov 2

14

Radiação de Cherenkov. O que é

Recordando

15



- Radiação de Cherenkov num reator de piscina.

The Nobel Prize in Physics 1958



Photo from the Nobel Foundation archive.
Pavel Alekseyevich Cherenkov



Photo from the Nobel Foundation archive.
Il'ja Mikhailovich Frank



Photo from the Nobel Foundation archive.
Igor Yevgenyevich Tamm

- Cherenkov observou a **luminescência azul anisotrópica** de soluções de uranila, excitadas por raios gama.
- Verificou-se que a radiação era **polarizada na direção do feixe de raios gama** usado na excitação, e que era **produzida pelos elétrons liberados pelos raios gama**.

15

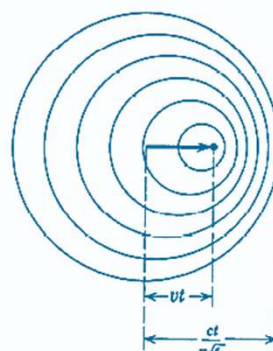
Radiação de Cherenkov. Análise teórica

Recordando

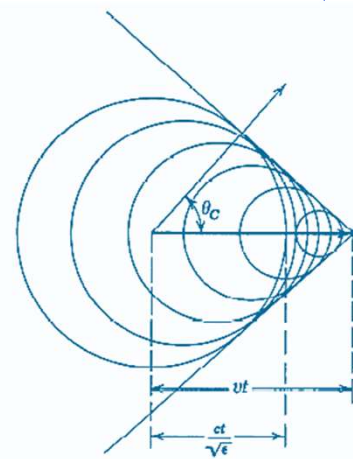
16

- Se $v < c/n = c/\sqrt{\epsilon_r}$,
as frentes de onda radiadas não se superpõem e viajam mais rápido que a partícula.
- Se $v > c/n = c/\sqrt{\epsilon_r}$,
a partícula ultrapassa a frente de onda radiada, e deixa para trás uma sucessão de ondas esféricas que, por interferência construtiva, formam um contorno cônico (onda de choque).

No movimento de um elétron no meio dielétrico:



$$v < c/\sqrt{\epsilon}$$



$$v > c/\sqrt{\epsilon}$$

16

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

Recordando

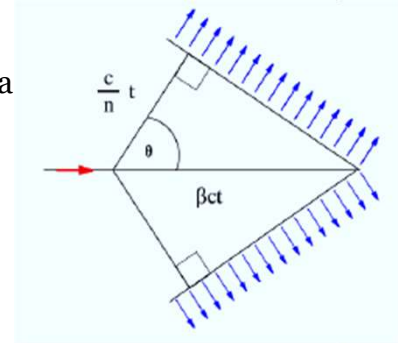
- $P/ v > c/n = c/\sqrt{\epsilon_r}$, essas frentes de ondas cônicas se propagam num ângulo θ_C com a direção do movimento da partícula.

- Assim, o ângulo θ_C entre a normal às frentes de onda e a velocidade da partícula é definido por

$$\cos \theta_C = c/nv = 1/\beta_n, \text{ sendo } \beta_n = nv/c$$

... que só é real se $v > c/n$.

- Em alguns casos, o ângulo θ_C pode ser **medido**, permitindo a *identificação de partículas* a partir da determinação da *velocidade* e do *momento*.



Questão: As eqs. de Maxwell não demonstram que cargas com velocidade constante *não irradiam* no vácuo?

17

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- Vimos que partículas movendo-se **no vácuo** com velocidade constante **não irradiam**...
- O campo B e o vetor de Poynting diminuem rapidamente com a distância r e não contribuem com o fluxo a grandes distâncias.
- A situação será diferente se a partícula estiver se movendo num **meio dielétrico** tal que $\epsilon > \epsilon_0$ ($\epsilon_r > 1$).
- Por simplicidade, vamos supor que esse meio tenha $\mu \cong \mu_0$.
- Aplicando o **operador D'Alembertiano** nas equações de onda inhomogêneas no *calibre de Lorentz*, para esse caso, teremos, por exemplo:

$$\therefore \square \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

...já que $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{n}$ é a velocidade da radiação no meio, de *índice de refração* n .

18

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

19

- Então, para esse meio material,
- $$\therefore \square \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_f, \quad \text{sendo } v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$$
- e $\square V = \nabla^2 V - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho_f / \epsilon$
- ρ_f e $\mathbf{J}_f$ são produzidas por uma partícula carregada atravessando o meio rapidamente.
 - As soluções possíveis deverão ser as mesmas obtidas para o vácuo, apenas substituindo os valores de v e n para o meio e a radiação, e considerando o tempo retardado como $t_r = t - r^n/c$.
 - Elas devem ser compatíveis com os potenciais de Liénard-Wiechert, no calibre de Lorentz.

19

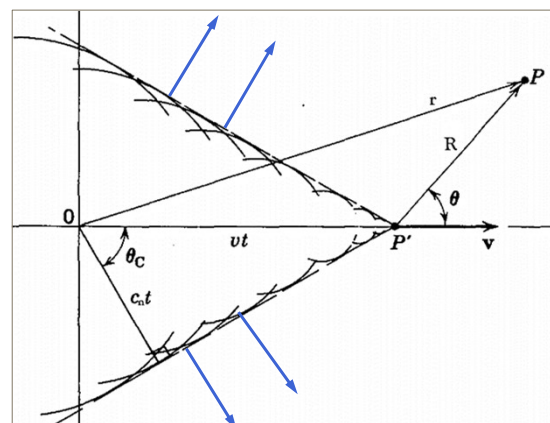
Radiação de Cherenkov. Análise teórica

20

- A fig. representa as ondas produzidas pela partícula e as frentes de onda da radiação de Cherenkov. Sejam:
- $\mathbf{r}$... Vetor da posição retardada (em t_r) até P.
- $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_r)$... Vetor da posição presente (em t) até P (p/ $\mathbf{v}$ constante).
- Os potenciais que seriam produzidos em P, no instante t são :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q}{R - \beta_n \cdot \mathbf{R}} \right]$$

e
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{R - \beta_n \cdot \mathbf{R}} \right]$$



20

21

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- O tempo retardado (t_{ret} ou t_r) pode ser obtido por:

$$t_{ret} - t = \frac{R(t_{ret})}{c_n}, = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_r)}{c_n}$$

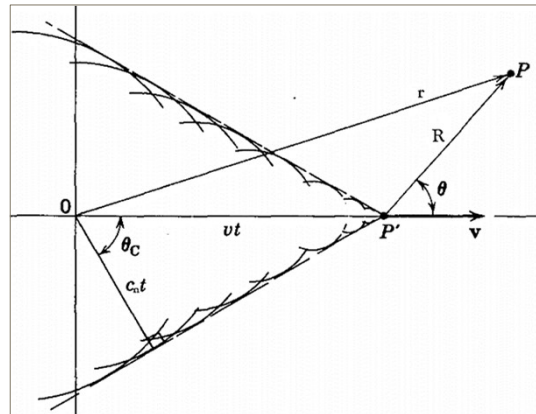
- Elevando ao quadrado e calculando t_r :

$$t - t_r = \frac{-\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \pm \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2 - (v^2 - c_n^2)R^2}}{v^2 - c_n^2} \geq 0$$

- Se $v > c_n$ (Cherenkov), as soluções são reais e positivas somente se:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} < 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2 > (v^2 - c_n^2)R^2.$$

- Isso só ocorre caso $\theta > \frac{\pi}{2}$ e se $\cos^2 \theta > 1 - 1/\beta_n^2 \rightarrow \cos \theta > -\left(1 - 1/\beta_n^2\right)^{1/2}$



21

22

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- Assim, haverá 2 soluções possíveis se:

$$\cos^{-1} \left[-\left(1 - \frac{1}{\beta_n^2}\right)^{1/2} \right] < \theta < \pi$$

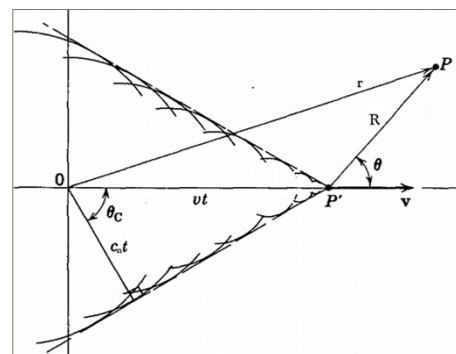
- Essa condição define o **cone de Cherenkov**.
- Nessas condições, os potenciais de Liénard-Wiechert, *dentro do cone*, serão:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{q}{R(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{2\pi\epsilon} \frac{q\mathbf{v}}{R(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

- Esses potenciais são válidos dentro do cone de Cherenkov, mas tornam-se uma singularidade na superfície do cone ($1 - \cos^2 \theta = 1/\beta_n^2$) e não existem fora dele.
- Representam uma onda viajando na direção de θ_c com velocidade c/n .



22

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- Com os potenciais, pode-se, então, determinar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e calcular o vetor de Poynting e a potência irradiada...

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- No interior do cone de Cherenkov, os campos serão:

$$\therefore \mathbf{E} = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{(\beta_n^2 - 1)\hat{\mathbf{R}}}{R^2(1 - \beta_n^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c_n^2} \sin \theta (-\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}).$$

- As expressões dos campos apresentam descontinuidade quando $\theta = \theta_c$.
- Essa singularidade pode ser suavizada se se leva em conta que, num dielétrico dispersivo, $\epsilon = \epsilon(\omega)$ e $\therefore n = n(\omega)$.
- Nesse caso, é melhor fazer a análise no *espaço de Fourier*.

23

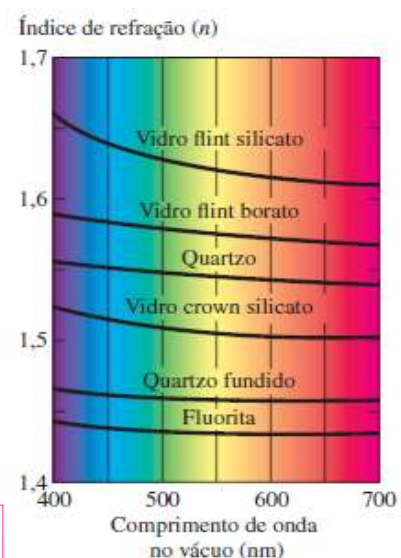
Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- Sabe-se que

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

- No caso do dielétrico considerado, $n \cong \sqrt{\epsilon_r}$ que, além do meio, é também uma função de λ .
- Assim, a permissividade ϵ e a permeabilidade μ do meio e $\therefore$ a velocidade $\mathbf{v} = c/n$ da onda no meio dependem da frequência.
- Isso torna o meio **dispersivo**. Ex.: vidro, água.
- A **dispersão** depende de como ϵ_r e, $\therefore$, n variam com o comprimento de onda.
- Na radiação de Cherenkov, então, o ângulo θ_c também dependerá da frequência:

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\beta n} \right)$$

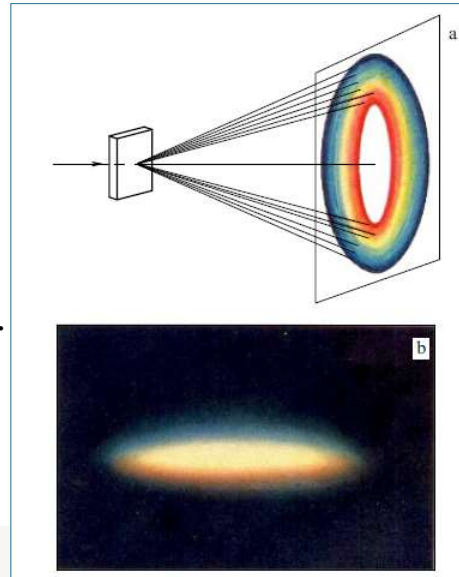


24

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

25

- A fig. (a) representa a montagem (~1950) de um experimento realizado por V. P. Zrelov.
- Um feixe de prótons de 660 MeV incide numa placa transparente perpendicular, produzindo radiação ao passar pela placa.
- A velocidade do próton, na placa, é maior do que a velocidade de fase c/n das ondas radiadas.
- Todos os ângulos das frentes de radiação estão confinados entre duas superfícies cônicas.
- A fig. (b) representa uma foto da base dos cones, com um filme colorido.



25

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

26

- A descontinuidade abrupta do sinal eletromagnético na borda do cone de Mach, indica uma ampla faixa de **largura espectral** $\Delta\omega$ de frequências.
- Para obter a transformada de Fourier, usa-se a regra usual (e sua inversa):

$$\text{Ex.:} \quad F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega F(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$$

- **Resumo:** Aplicando-se a transformada de Fourier, as *equações de onda* e os respectivos *potenciais* Φ e $\mathbf{A}$ obtidos serão:

$$\therefore \begin{cases} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \rho(\mathbf{k}, \omega) \longrightarrow \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2ze}{\epsilon(\omega)} \cdot \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \frac{\mathbf{v}}{c} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \end{cases}$$

- $\mathbf{k}, \omega$: ...da onda irradiada; $z, \mathbf{v}$: ...da partícula com vel. constante

26

27

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- Das definições dos potenciais, obtemos a transf. de Fourier dos campos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i \left[\frac{\omega \epsilon(\omega)}{c} \frac{\mathbf{v}}{c} - \mathbf{k} \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = i \epsilon(\omega) \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \Phi(\mathbf{k}, \omega)$$

- A transformada de Fourier de $\mathbf{E}$ no tempo, por exemplo, será:

$$\therefore \mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}}$$

- $\mathbf{E}(\omega)$, após ser determinado, será útil para achar o *espectro da radiação*.
- Então, a energia irradiada por unidade de área e tempo ($\mathbf{S}$) será:

$$\frac{d^2 U_{rad}}{d\omega dA} = \frac{\epsilon c n}{\pi} |\hat{\mathbf{E}}(\omega)|^2$$

27

28

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

- Em geral, se analisa a *distribuição espectral por unidade de comprimento*:

$$\therefore \frac{d^2 U_{rad}}{d\omega d\ell} = \frac{\mu(\omega) q^2}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right) \omega.$$

- ...que é fisicamente significativa se o parênteses for > 0 . Para isso, $v > c/n(\omega)$.
- Assim, a radiação de Cherenkov aparece *azulada* porque a *energia irradiada cresce com a frequência ω* .
- Integrando a energia irradiada em todas as frequências, tem-se:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{rad} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > (1/\beta^2)} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right) d\omega$$

- Esse resultado foi publicada por Frank e Tamm em 1937.

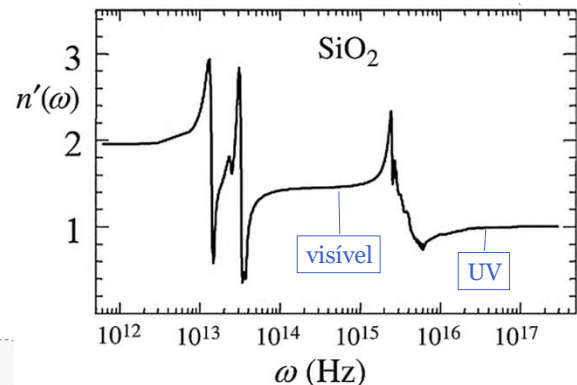
28

Radiação de Cherenkov. Análise teórica

29

- A maioria dos dielétricos transparentes possuem um *índice de refração que não varia muito com a frequência na parte visível do espectro*, por isso pode-se afirmar que a luz emitida é *azul*.
- Confirma-se isso vendo o gráfico da figura, que mostra um exemplo de dielétrico transparente (SiO₂).
- Muito além dessa frequência, na faixa do UV, não há emissão de radiação, pois $n < 1$ e assim, nessa faixa, não existe θ_c real que satisfaz a equação.

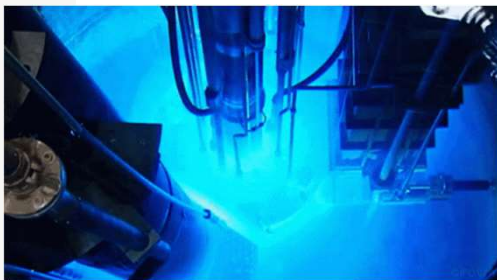
$$\frac{d^2 U_{\text{rad}}}{d\omega d\ell} = \frac{\mu(\omega)q^2}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right) \omega$$



29

Radiação de Cherenkov. Referências

30



- Jackson, J. D., *Classical Eletrodynamics*, 3rd. Ed., item 13.4, John Wiley and Sons, NY, 1999.
- Zangwill, A., *Modern Eletrodynamics*, item 23.7, Cambridge Univ. Press, 2012.
- Bolotovskii, B.D., Vavilov-Cherenkov radiation: its discovery and application, *Physics - Uspekhi* 52 (11) 1099 – 1110, Russian Academy of Sciences, 2009.

30