FLUIDOS : AULA 2

Lembrete : eq. de Euler (fluido perfeito)

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla}p + \vec{f}_V}{\rho}}$$

Obs : quando ligaremos $\eta \neq 0$ (viscosidade) um novo termo aparecerá na direita

A eq. de Euler é uma
- eq. dif. às derivadas parciais
- não linear (há um termo quadrático na incognita $\vec{v}$)

$\Rightarrow$ extremamente complicata, resolução em geral é numérica e não analítica.

O que faremos nessas aulas : estudo de alguma situação simples

1. Estática de fluidos ($\vec{v} = 0$)

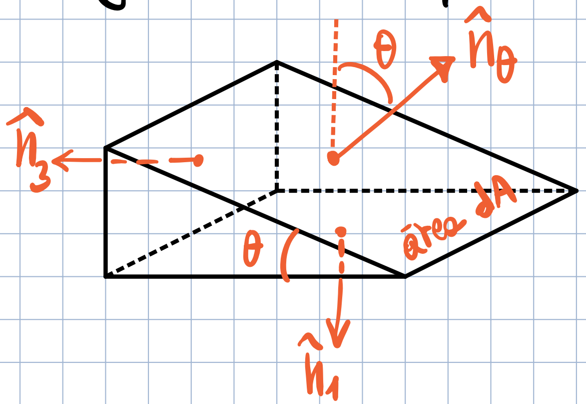
No caso $\vec{v} = 0$ a eq. de Euler vira

$$\boxed{\vec{f}_V = \vec{\nabla}p}$$

Vamos começar vendo um resultado importante para a pressão :

1.1 - Em equilíbrio, p depende apenas da posição e não da direção

Imaginamos uma porção de fluido



$$\hat{n}_\theta = -\cos\theta\,\hat{n}_1 - \sin\theta\,\hat{n}_3$$

Força superficial total :

$$\begin{cases} d\vec{F}^{(1)} = -p(\vec{r}_1, \hat{n}_1)\, dA \cos\theta\, \hat{n}_1 \\ d\vec{F}^{(3)} = -p(\vec{r}_3, \hat{n}_3)\, dA \sin\theta\, \hat{n}_3 \\ d\vec{F}^{(\theta)} = -p(\vec{r}_\theta, \hat{n}_\theta)\, dA\, \hat{n}_\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ somando,

$$d\vec{F}_S = d\vec{F}^{(1)} + d\vec{F}^{(3)} + d\vec{F}^{(\theta)} = \left[p_\theta - p_1\right] \cos\theta\, dA\, \hat{n}_1 + \left[p_\theta - p_3\right] \sin\theta\, dA\, \hat{n}_3$$

Lembrando da força Volumétrica :

$$d\vec{F}_S = d\vec{F}_V \Rightarrow \left[p_\theta - p_1\right] C_\theta\, dA\, \hat{n}_1 + \left[p_\theta - p_3\right] S_\theta\, dA\, \hat{n}_3 = \vec{f}_V\, dV$$

$\mathcal{O}(dA\, d\ell)$

$\Downarrow$

muito menor de que dA

$\Downarrow$

$\simeq 0$

p não depende da direção! $\Leftarrow$ $\boxed{p_\theta = p_1 = p_3}$ $\Leftarrow$

1.2 - Equilíbrio para forças conservativas

Para forças conservativas, $\vec{f}_V = -\vec{\nabla} u$

u ← en. potencial por unidade de volume

Equilíbrio : $\vec{\nabla} p - \vec{f}_V = 0$

$$\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} u = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(p+u) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p + u = \text{const}}$$

superfícies equipotenciais são também superfícies isobáricas

Caso particular : fluido incompressível ($\rho = \text{const}$) sob a ação da gravidade (no laboratório)

$$\vec{f}_V = \rho \vec{g} \Rightarrow u = \rho g z$$

$$\Downarrow$$

equilíbrio : $p = \text{const} - \rho g z$

para fixar, digamos que $p = p_0$ @ $z = z_0$:

$$p_0 = \text{const} - \rho g z_0$$

$$\Downarrow$$

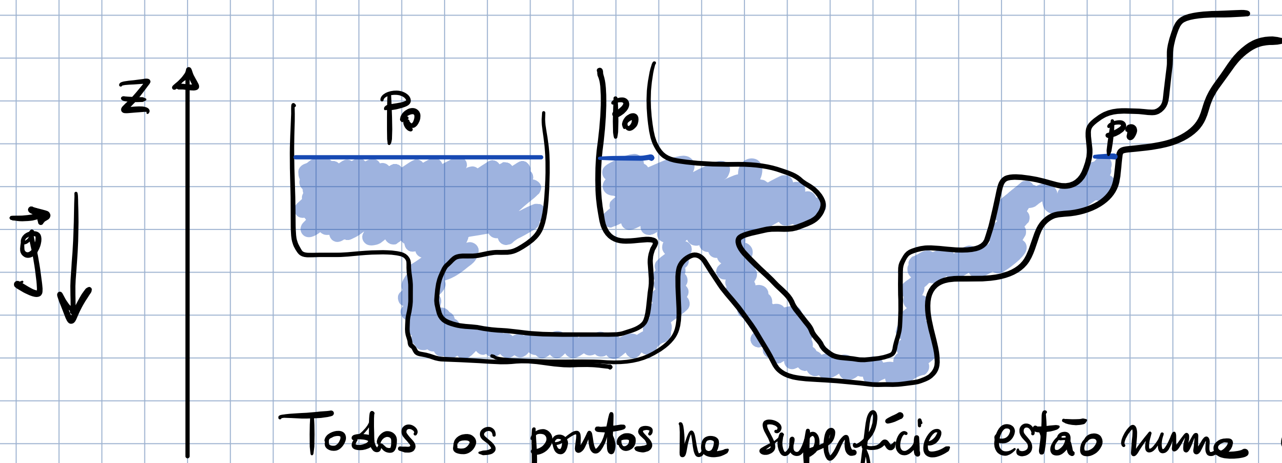
$$\text{const} = p_0 + \rho g z$$

$$\boxed{p = p_0 - \rho g (z - z_0)}$$

Logo: para um fluido ideal em eq. a pressão (1) não depende da dir dentro do fluido, (2) é sempre $\perp$ às paredes, (3) depende da altura

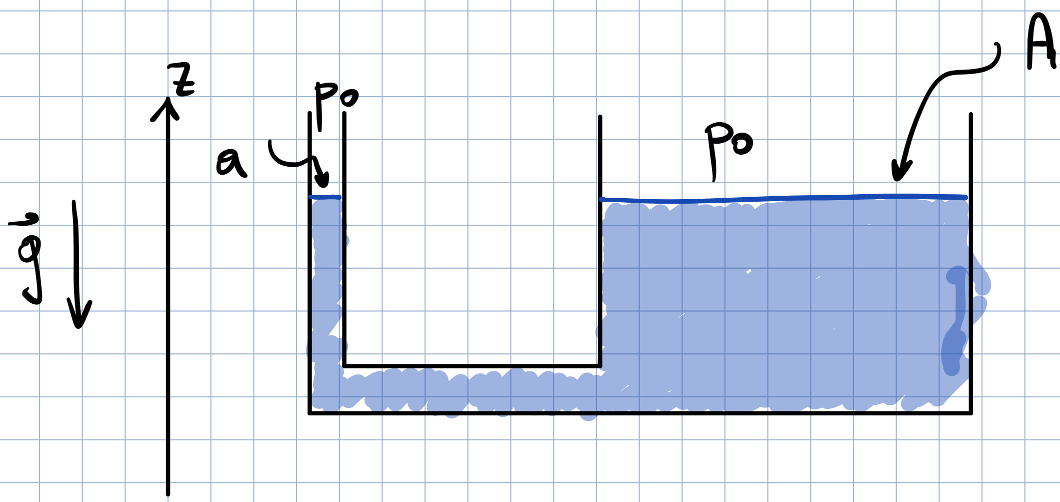
APLICAÇÕES:

(1) Vasos Comunicantes



Todos os pontos na superfície estão numa equipot.

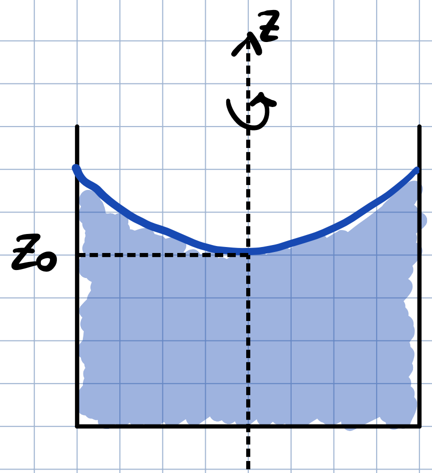
(2) Macacão hidráulico (Pascal)



Ao aplicarmos uma força, para garantir a igualdade da pressão:

$$\frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{A} \Rightarrow f_2 = \underbrace{\frac{A}{a}}_{>1} f_1$$

(3) Fluido incompressível em rotação



No referencial girante o fluido está parado em equilíbrio.

Forças volumétricas:

$$\begin{cases} \vec{f}_g = -\rho g \hat{n}_z = -\vec{\nabla}(\rho g z) \\ \vec{f}_\omega = \rho \omega^2 r \hat{e}_r = -\vec{\nabla}\left(-\frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2\right) \end{cases}$$

força não-inercial (centrífuga)

Eq:

$$p + u_g + u_\omega = \text{Const}$$

$$p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 = \text{Const}$$

Superfície isobárica: $g z - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = c$

@ $r=0$: $c = g z_0$

$$\Rightarrow \boxed{z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2}$$

paraboloide de rotação

USADO PARA ESPELHOS DE TELESCÓPIOS

(4) Modelo de atmosfera isotérmica

Eq. de estado : $pV = nRT$

n° mol

Em termos da densidade:

$$\rho = \frac{M_{TOT}}{V} = \frac{M_{mol}\, n}{\underbrace{V}_{}} = \frac{M_{mol}}{R} \frac{P}{T} \Rightarrow \boxed{p = \rho r T}$$

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT} \qquad \frac{M_{mol}}{R} \equiv 1/r$$

Logo: $\vec{\nabla} p = \vec{f_V} = \rho \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \partial p / \partial x = 0 \\ \partial p/\partial y = 0 \\ \partial p / \partial z = -\rho g = -\frac{P g}{r T} \end{cases}$

Como $\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow p(x,y,z) = p(z)$

Resolvendo a eq. dif: $\frac{p'(z)}{p(z)} = -\frac{g}{rT}$

$$\Downarrow$$

$$\log(p(z)) = -\frac{g}{rT} z + C$$

C fixada impondo $p_0 = p(z_0)$

$$\Downarrow$$

$$C = \log p_0 + \frac{g}{rT} z_0$$

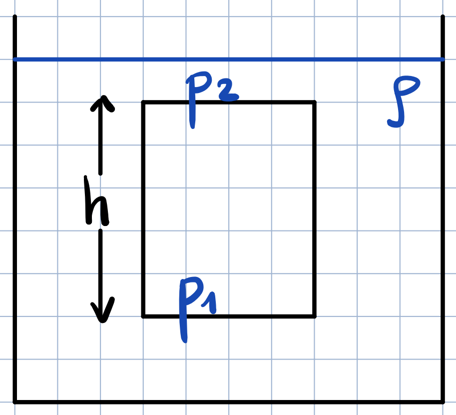
$$p(z) = e^{C} e^{-\frac{g}{rT} z} = p_0 e^{-\frac{g}{rT}(z - z_0)}$$

Obs: $\left[\frac{rT}{g}\right]$ = comprimento → escala de decréscimo (exponencial) da atmosfera isoterma

Numericamente: $M_{mol} = 30\,g$, $T \simeq 300K \Rightarrow \frac{rT}{g} \simeq 8.3\,km$

(5) Princípio de Arquimedes

Vamos analizar um caso muito simples:
cilindro mergulhando em um fluido incompressível ($\rho = \text{const}$)
sob a ação da gravidade



Forças atuando:

(1) seu peso $\quad -Mg\,\hat{e}_z$

(2) forças de pressão:

- fundo $\quad p_1 A\,\hat{e}_z$
- topo $\quad -p_2 A\,\hat{e}_z$
- lateral: resultante nula

Sabemos também que $\quad p_1 - p_2 = \rho g h$

Força resultante:

$$-Mg\,\hat{e}_z + (p_1 - p_2) A\,\hat{e}_z = \{-Mg + \rho g h A\}\,\hat{e}_z$$

$$= \{-Mg + \rho g V\}\,\hat{e}_z$$

$$= \{-M + M_L\}\, g\,\hat{e}_z$$

massa do volume de fluido que cabe no cilindro

$M_L g\,\hat{e}_z$ = EMPUXO (resultante das forças de pressão)

Temos 2 casos : $\begin{cases} M > M_L & \text{cilindro afunda} \\ M < M_L & \text{cilindro boia} \end{cases}$

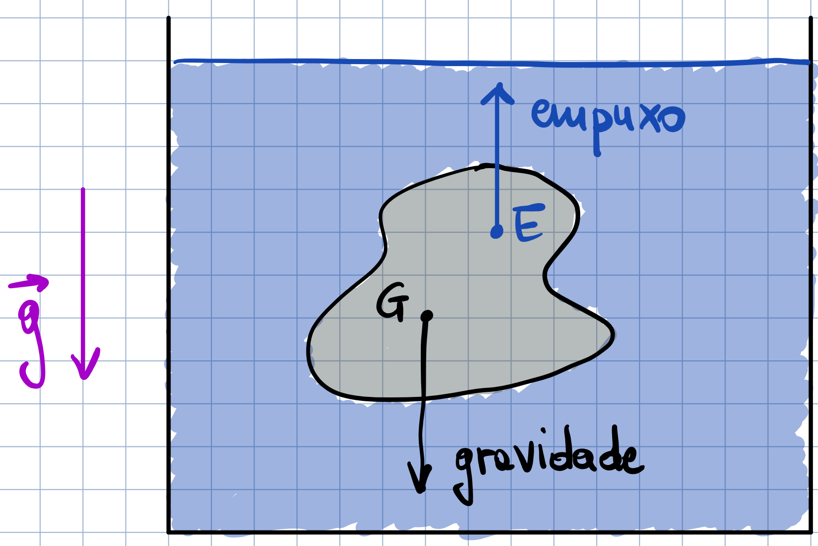
Pergunta importante : onde são aplicadas as forças?

(a) peso → CM do cilindro

(b) empuxo → CM do volume deslocado de fluido

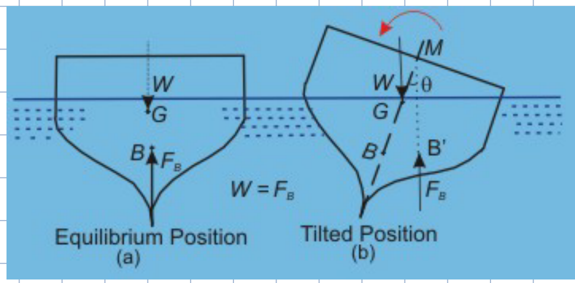
por quê? Substituindo o fluido ao cilindro em equilíbrio, o empuxo deve compensar o peso do fluido

⇒ o ponto de aplicação deve ser o mesmo



POSSÍVEL TORQUE

Aplicação importante: barcos



M = metacentro

G = gravidade

B = empuxo

Enquanto G estiver abaixo de M o equilibrio é ESTÁVEL