Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

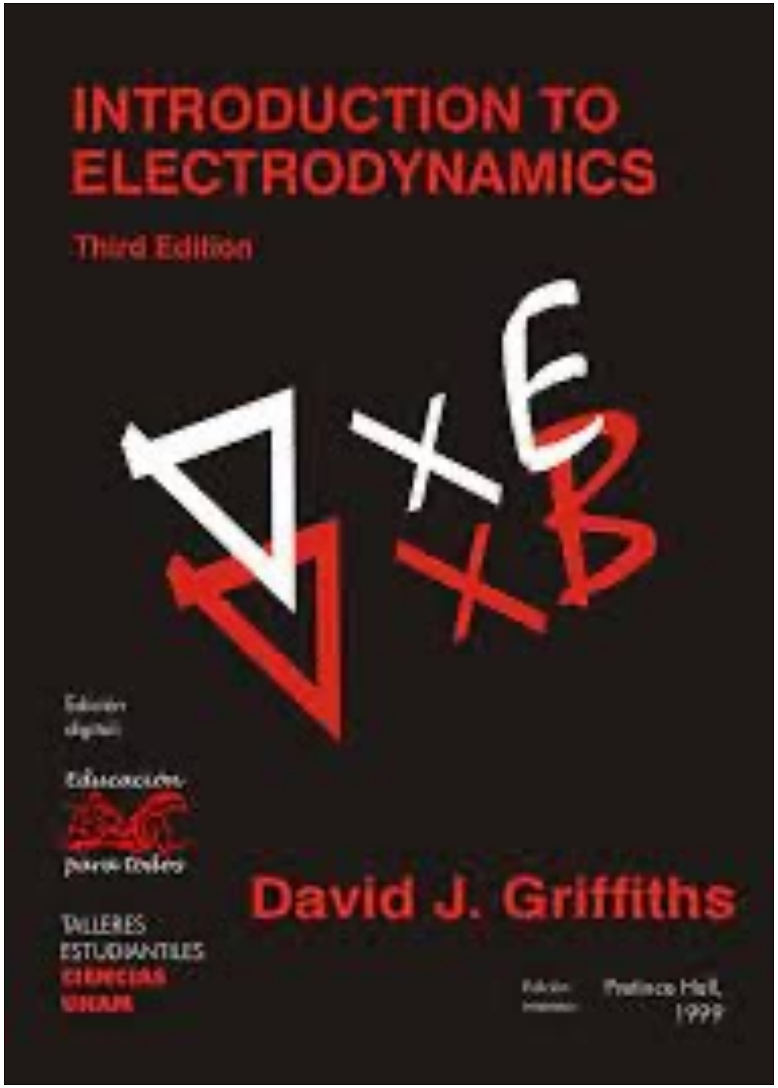
guilherme.germano@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

Plano do Curso

16/08	13/09	11/10	08/11
19/08	16/09	14/10	11/11
23/08	20/09 P1	18/10	15/11
26/08	23/09	21/10 P2	18/11
30/08	27/09	25/10	22/11
02/09	30/09	28/10	25/11 P3
06/09	04/10	01/11	29/11 correção
09/09	07/10	04/11	02/12 S1
			06/12 revisão
			09/12 S2

Bibliografia



Capítulo 2 : eletrostática

Capítulo 5 : magnetostática

Capítulo 7 : eletrodinâmica

Capítulo 8 : leis de conservação

Capítulo 9 : ondas eletromagnéticas

Capítulo 10 : campos e potenciais

Capítulo 11 : radiação

Aula 19

Campos e Potenciais

Griffiths - Capítulo 10

Antes : tudo parado !

Depois: campos variando no tempo !

A partir de agora: cargas e correntes em movimento !

Potenciais V e A vão ganhar importância !

Equações de Maxwell

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

densidade de carga

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

densidade de corrente

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \mu_0\,\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

O grande projeto da eletrostática e magnetostática:

Conhecendo as densidades ("fontes"), encontrar os campos !

$$\rho \rightarrow \text{Coulomb ou Gauss} \rightarrow \vec{E}$$

$$\vec{J} \rightarrow \text{Biot-Savart ou Ampère} \rightarrow \vec{B}$$

E quando as fontes
variam com o tempo ?

Fontes variando no tempo

Estratégia: primeiro encontrar os potenciais e depois os campos !

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) \rightarrow V(\vec{r},t) \rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{J}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) \end{cases}$$

$V(\vec{r},t)$ = potencial escalar

$\vec{A}(\vec{r},t)$ = potencial vetor

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Lembrando que : $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}(-V)\right) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \boxed{\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

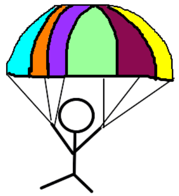
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} + \mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial V}{\partial t}\right)}_{=\,0} = -\,\mu_0\,\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} = -\mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\,\mu_0\,\vec{J}}$$

gauge de Lorentz



$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} . \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{A} = -\mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V - \mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \, \vec{J} \end{array} \right.$$

$$\mu_0 \, \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \, \vec{J} \end{array} \right.$$

Equações de onda com fonte !

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square^2$$

d ' Alembertiano

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{l} \square^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \\ \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \, \vec{J} \end{array}}}$$

Encontrando os potenciais

Caso estático: as fontes estão em repouso

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\[2ex] \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

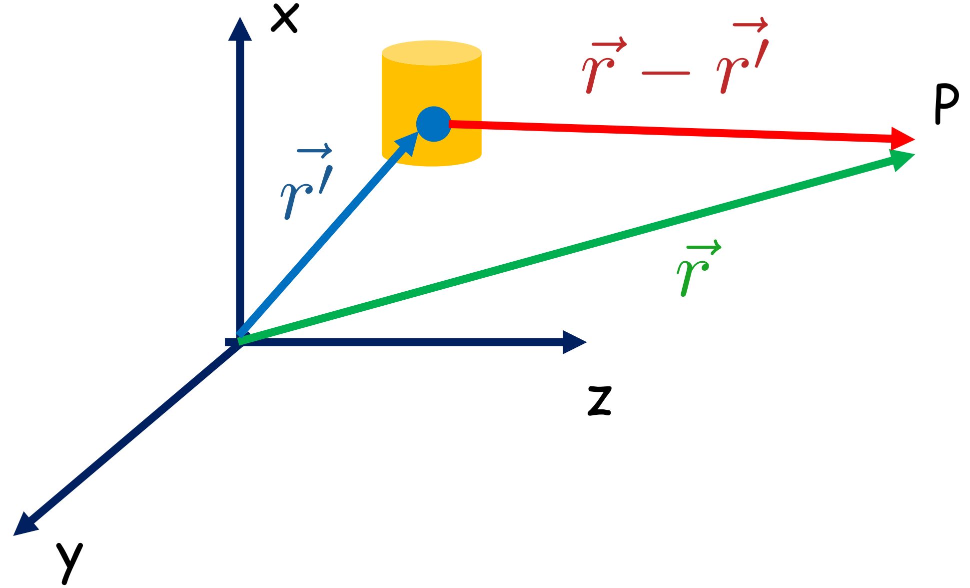
$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \;\rightarrow\; \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \;\rightarrow\; \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Solução:

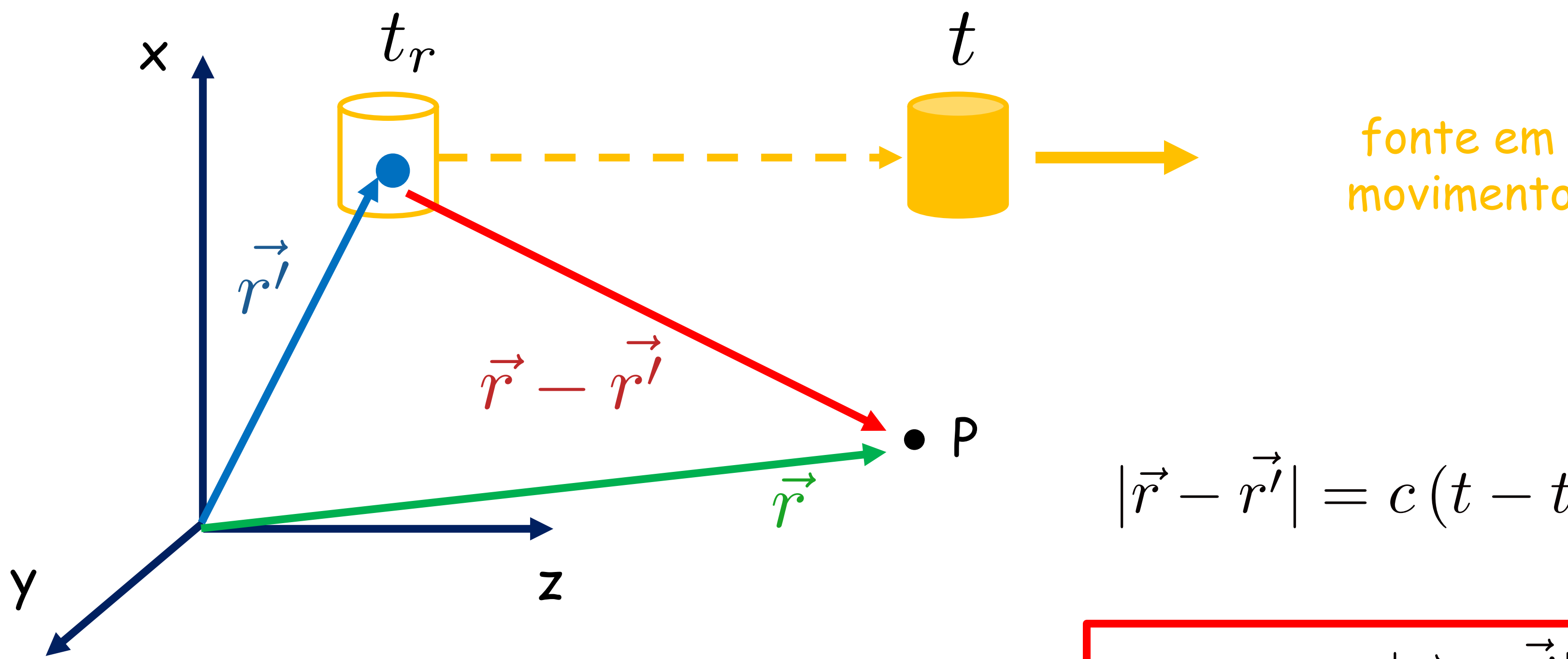
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3r'$$



Caso dinâmico: as fontes estão em movimento

Quando há movimento da fonte, a informação da mudança de posição se propaga com a velocidade da luz (e não instantaneamente)



$$|\vec{r}-\vec{r}'| = c\,(t-t_r)$$

$$\boxed{t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}$$

O ponto P não sente o campo criado pela carga agora e sim o campo criado no passado, no tempo "retardado", t_r , quando a "mensagem saiu"

A luz das estrelas vem do passado...

Levando em conta o tempo de propagação da informação, os potenciais gerados por fontes em movimento são:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d^3r' \quad \rightarrow \quad \boxed{V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'},t_r)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d^3r'}$$

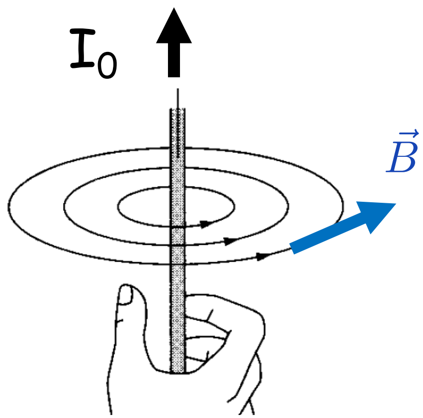
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d^3r' \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'},t_r)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d^3r'}$$

Potenciais Retardados !

Exemplo 10.2

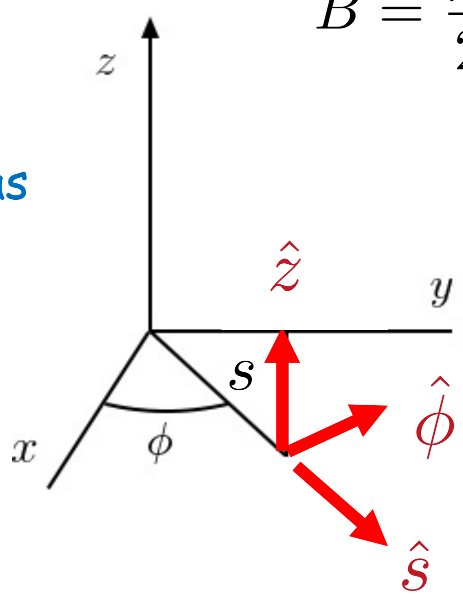
Quais são os campos assim que a gente "liga" a corrente no fio infinito ?

Corrente estacionária num fio retilíneo gera campo magnético



$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s}$$

Coordenadas cilíndricas



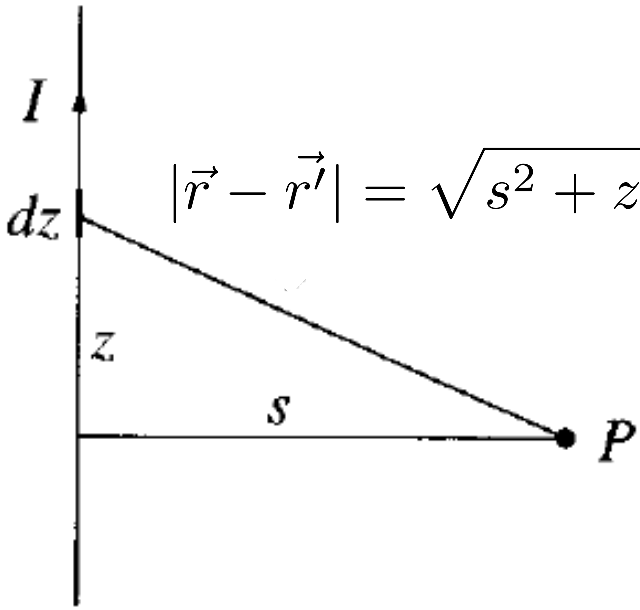
O acontece quando ela "começa"?

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

A lei de Ampère não vale porque a corrente está variando no tempo

Temos que levar em conta a velocidade de propagação da informação ("retardamento")

Calculamos primeiro os potenciais !



$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{s^2 + z^2}$$

O fio não tem carga: $\rho = 0$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3r'$$

$$V = 0$$

O fio tem corrente: $\vec{J}(t) = I(t)\,\hat{z}$

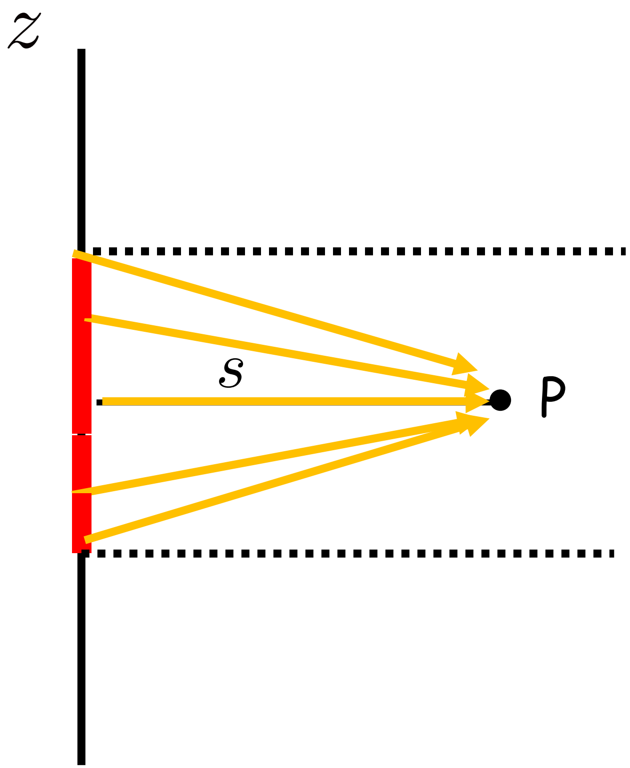
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3r'$$

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\hat{z} \int_{\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, dz \qquad t_r = t\, - \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c} \; = t\, - \frac{\sqrt{s^2 + z^2}}{c}$$

Para um t fixo existe um z especial, para o qual $t_r = 0$

$$t\, - \frac{\sqrt{s^2 + z^2}}{c} = 0 \qquad z = \sqrt{c^2 t^2\, - \, s^2}$$

Para z maior, a informação ainda não chegou e a corrente ainda é zero !



$$z = \sqrt{c^2t^2 \; - \; s^2}$$

$$z = -\sqrt{c^2t^2 \; - \; s^2}$$

O ponto P demora
para sentir o fio todo

No instante t ele só vê
a parte vermelha do fio

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{I(t_r)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,dz \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{I_0}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,dz$$

$$= \frac{\mu_0\, I_0}{4\pi}\hat{z}\,2\int_{0}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,dz \;=\; \frac{\mu_0\, I_0}{2\pi}\hat{z}\int_{0}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz$$

$$A(s,t) = \frac{\mu_0\, I_0}{2\,\pi} \int_0^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + z^2}}\, dz$$

$$= \frac{\mu_0\, I_0}{2\,\pi}\, ln \left[\sqrt{s^2 + z^2} + z\right]_0^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}$$

$$\boxed{\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\, I_0}{2\,\pi}\, ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - s^2}}{s}\right] \hat{z}}$$

Agora podemos calcular os campos $\qquad \vec{E} = -\cancelto{0}{\vec{\nabla} V} - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

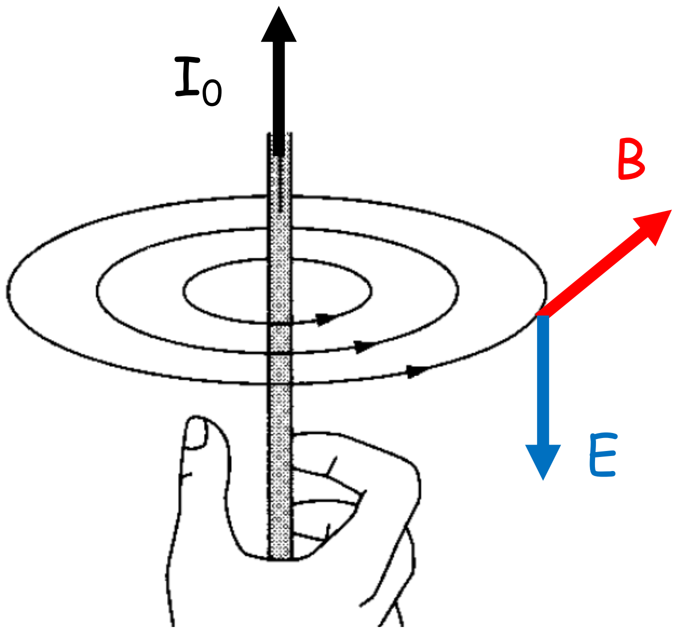
$$\boxed{\vec{E}(s,t) = -\frac{\mu_0\, I_0\, c}{2\,\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}\, \hat{z}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{A} = \cancelto{0}{A_s}\,\hat{s} + \cancelto{0}{A_\phi}\,\hat{\phi} + A_z\,\hat{z} \qquad A_z = A_z(s,t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{s}\cancelto{0}{\frac{\partial A_z}{\partial \phi}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_\phi}{\partial z}}\right)\hat{s} + \left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial z}} - \frac{\partial A_z}{\partial s}\right)\hat{\phi} + \left(\frac{1}{s}\cancelto{0}{\frac{\partial (s\,A_\phi)}{\partial s}} - \frac{1}{s}\cancelto{0}{\frac{\partial A_s}{\partial \phi}}\right)\hat{z}$$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,I_0}{2\,\pi}\,ln\left[\frac{ct\;+\sqrt{c^2t^2 - s^2}}{s}\right]\;\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0\,I_0}{2\,\pi\,s}\,\frac{c\,t}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}\,\hat{\phi}}$$



$$\boxed{\vec{E}(s,t) = -\frac{\mu_0\, I_0\, c}{2\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}\,\hat{z}} \qquad t \to \infty \qquad \vec{E} \to 0$$

$$\boxed{\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0\, I_0}{2\,\pi\, s}\,\frac{c\,t}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}\,\hat{\phi}} \qquad t \to \infty \qquad \vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0\, I_0}{2\,\pi\, s}\,\hat{\phi}$$