Mecânica Estatística - IFUSP - 2022
sexta série de exercícios
- gases ideais quânticos - férmions -

"Why is it that particles with half-integral spin are Fermi particles whose amplitudes add with the minus sign, whereas particles with integral spin are Bose particles whose amplitude add with positive sign? We apologize for the fact that we cannot give you an elementary explanation. An explanation has been worked out by Pauli from complicated arguments of quantum field theory and relativity. He has shown that the two must necessarily go together, but we have not been able to find a way of reproducing his arguments on an elementary level ... This probably means that we do not have a complete understanding of the fundamental principle involved ..."

Feynman Lectures on Physics ...

1- Considere um gás de N elétrons livres dentro de um recipiente de volume V. Obtenha expressões para a energia interna, a pressão e a compressibilidade no estado fundamental (que também se chama estado completamente degenerado). Utilizando dados para um metal alcalino (sódio, por exemplo), obtenha valores numéricos para a densidade de elétrons livres, a temperatura de Fermi, e a compressibilidade no estado fundamental. Compare a previsão teórica desse modelo de elétrons livres com o valor experimental da compressibilidade do sódio a temperatura ambiente.

2- Mostre que o potencial químico de um gás clássico ideal de N partículas monoatômicas ocupando um volume V, a temperatura T, pode ser escrito na forma

$$\mu = k_B T \ln\left(\frac{\lambda^3}{v}\right),$$

em que $v = V/N$ é o volume específico e $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ é o comprimento de onda térmico. Esboce um gráfico de $\mu/k_B T$ contra T. Obtenha agora a primeira correção quântica deste resultado. Isto é, mostre que o potencial químico de um gás ideal quântico pode ser expandido em termos do fator λ^3/v,

$$\frac{\mu}{k_B T} - \ln\left(\frac{\lambda^3}{v}\right) = A\left(\frac{\lambda^3}{v}\right) + B\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2 + \cdots.$$

Obtenha explicitamente o prefator A para férmions e para bósons. Esboce um gráfico de μ/k_BT contra T (ou contra λ^{-2}, que é a temperatura em unidades convenientes) para férmions, bósons e partículas clássicas.

3- A baixas temperaturas, a energia interna de um sistema de elétrons livres pode ser escrita na forma de uma expansão em potências de T/T_F,

$$U = \frac{3}{5}N\epsilon_F \left\{ 1 + A\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + B\left(\frac{T}{T_F}\right)^4 + \cdots \right\}.$$

em que T_F é a temperatura de Fermi. Verifique de forma explícita a validade dessa expansão e obtenha a constante A. Para $T << T_F$, qual a forma assintótica do calor específico a volume constante?

4- Considere um gás de N elétrons livres ultra-relativísticos, dentro de uma região de volume V, a uma dada temperatura T, na presença de um campo magnético $\overrightarrow{H}$. Desprezando os efeitos magnéticos orbitais, o espectro de energia é dado por

$$\epsilon_{\overrightarrow{p},\sigma} = cp - \mu_B H\sigma,$$

em que μ_B é o magneton de Bohr e $\sigma = \pm 1$.

(a) Para campos fracos, mostre que a energia de Fermi desse sistema pode ser escrita na forma

$$\epsilon_F = A + BH^2 + O\left(H^4\right).$$

Calcule expressões para os prefatores A e B.

(b) Mostre que a magnetização no estado fundamental pode ser escrita na forma

$$M = CH + O\left(H^3\right).$$

Obtenha uma expressão para a constante C.

(c) Calcule a susceptibilidade a campo nulo no estado fundamental.

****