

CAMPO REPRESENTADO POR HARMÔNICOS ESFÉRICOS

Gauss utilizou este método pela primeira vez e concluiu que a origem do campo era toda interna e que o campo externo não existia. Sabemos hoje que o campo externo é da ordem de algumas dezenas de nT em dias calmos e muitas vezes isto durante tempestades magnéticas.

Em primeira aproximação, podemos desprezar o campo externo, supondo que C_n^m e S_n^m

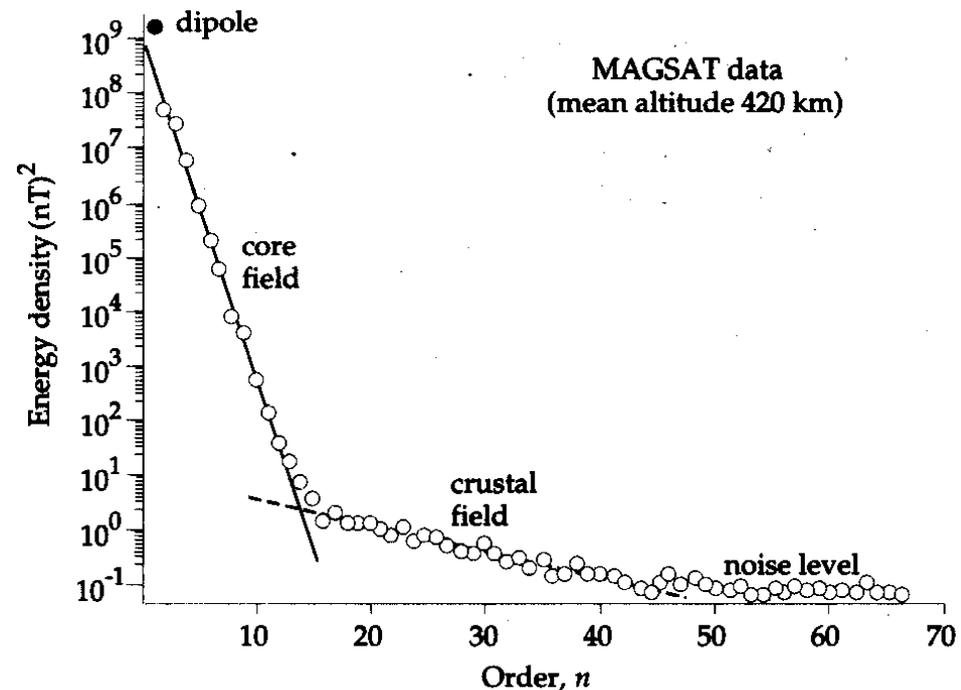
são muito menores do que 1, o que simplifica a expressão do potencial:

$$V = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \text{sen} m\lambda] \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$$

g_n^m h_n^m são chamados coeficientes de Gauss e têm dimensões de campo magnético.

Representação por harmônicos esféricos

- g^1_0 → dipolo centrado e axial, cerca de 5 vezes maior que os outros coeficientes;
- g^1_1, h^1_1 → dipolo centrado com inclinação de cerca $11,5^\circ$ com respeito ao eixo de rotação. Somado ao g^1_0 , corresponde a 90% do campo;
- $g^0_2, g^1_2, g^2_2, h^1_2, h^2_2$ → dipolo excêntrico, dipolo deslocado do centro da Terra.



CMT – representação dipolar

Yara Marangoni

2020

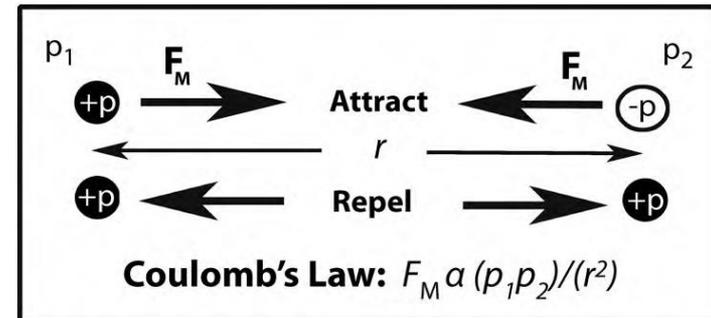
DIPOLO

Força e campo de força de polos

- força entre polos magnéticos de intensidade p_1 e p_2 separados r entre si:

$$F(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_1 p_2}{r^2}$$

μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.



- Campo de força magnético do polo na direção r é dado pelo gradiente do potencial ($-\text{grad} W$). No SI o campo é a densidade de fluxo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\text{grad} W = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p}{r^2} \hat{r}$$

- A unidade de \mathbf{B} no SI: Tesla (T). Como o campo magnético da Terra é pequeno, em Geofísica usa-se um submúltiplo do Tesla, $\text{nT} = 10^{-9} \text{ T}$.

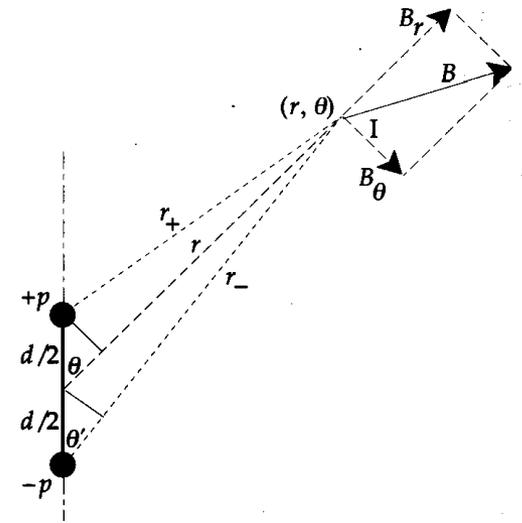
Potencial magnético escalar

- potencial magnético de polo em P é dado por:

$$W = \frac{\mu_0 p}{4\pi r}$$

Potencial magnético de um dipolo: a linha que liga polos positivos e negativos define um eixo onde o campo magnético tem simetria rotacional.

Para calcular o potencial de um dipolo vamos somar os potenciais de um polo positivo e de um polo negativo e depois transformar esse dipolo em dipolo elementar.



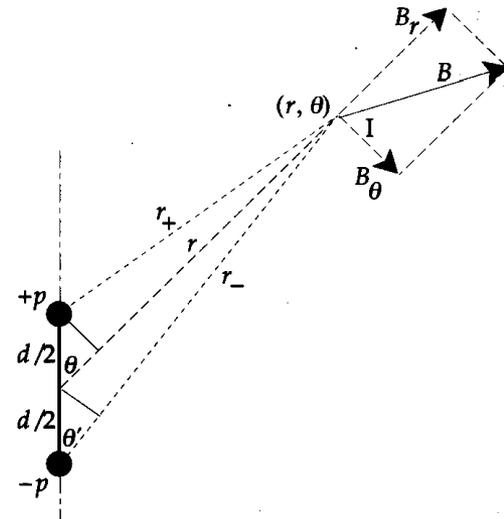
Potencial de dipolo

- Sejam dois polos magnéticos de intensidade p e distantes d , sendo a distância d definida de $-p$ a $+p$. O potencial a uma distância r do ponto central, na direção do ângulo θ com respeito ao eixo, é a soma do potencial dos polos positivo e negativo :

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} p \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} p \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$$

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dp)}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} \cos \theta$$

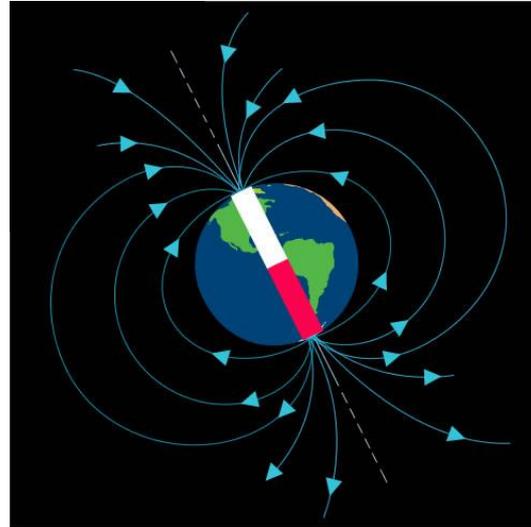
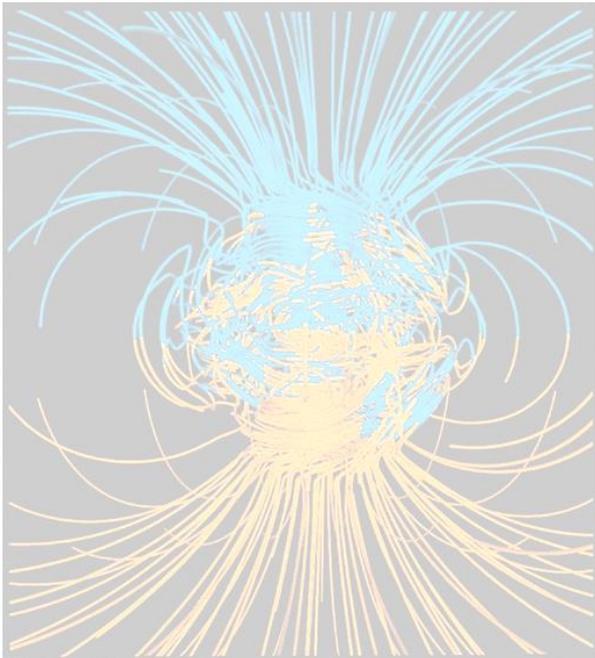
$m (= dp)$ é o momento magnético do dipolo



REPRESENTAÇÃO DIPOLAR

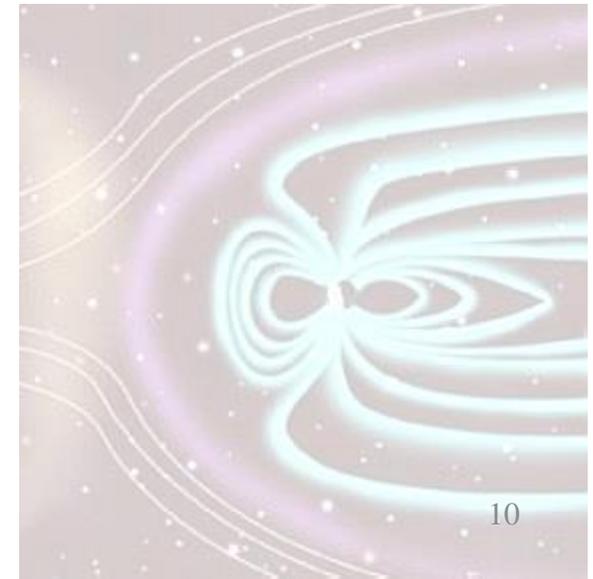
Configurações do campo magnético

Na interface manto-núcleo,
sem características dipolar



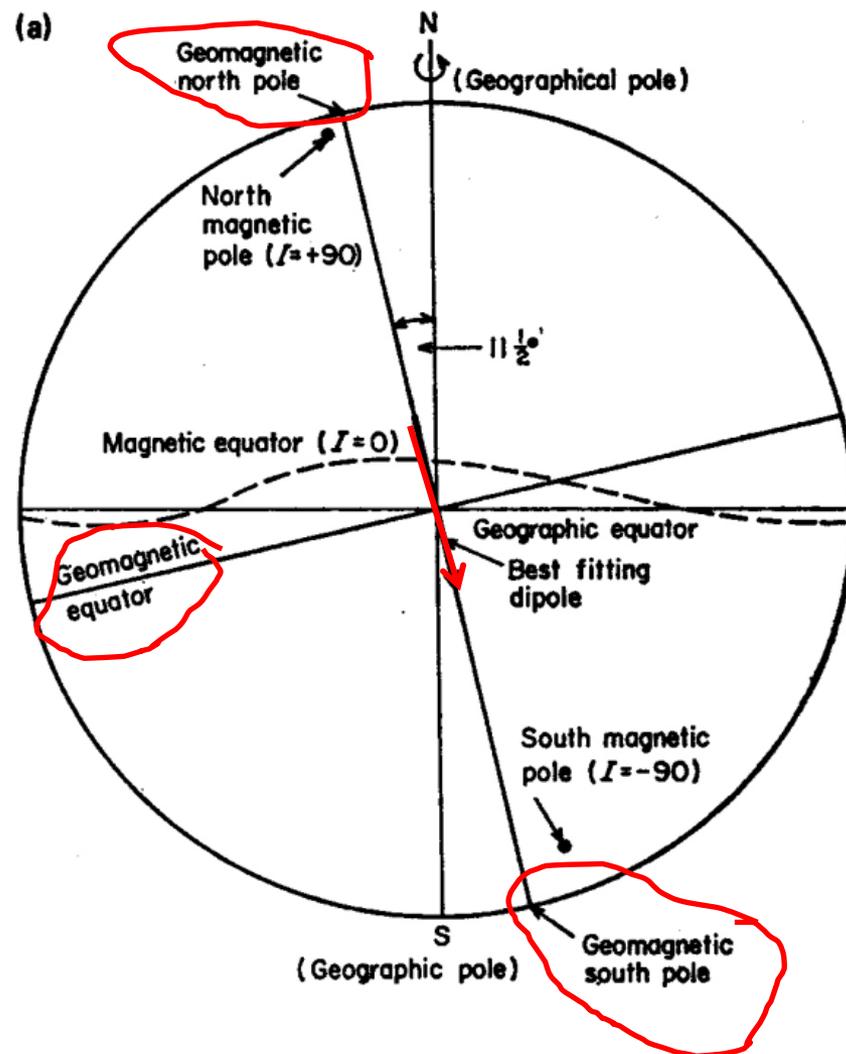
Aproximadamente dipolar
na superfície da Terra

Campo externo:
interação do campo
magnético interno
com o vento solar



Representação dipolar do CMT

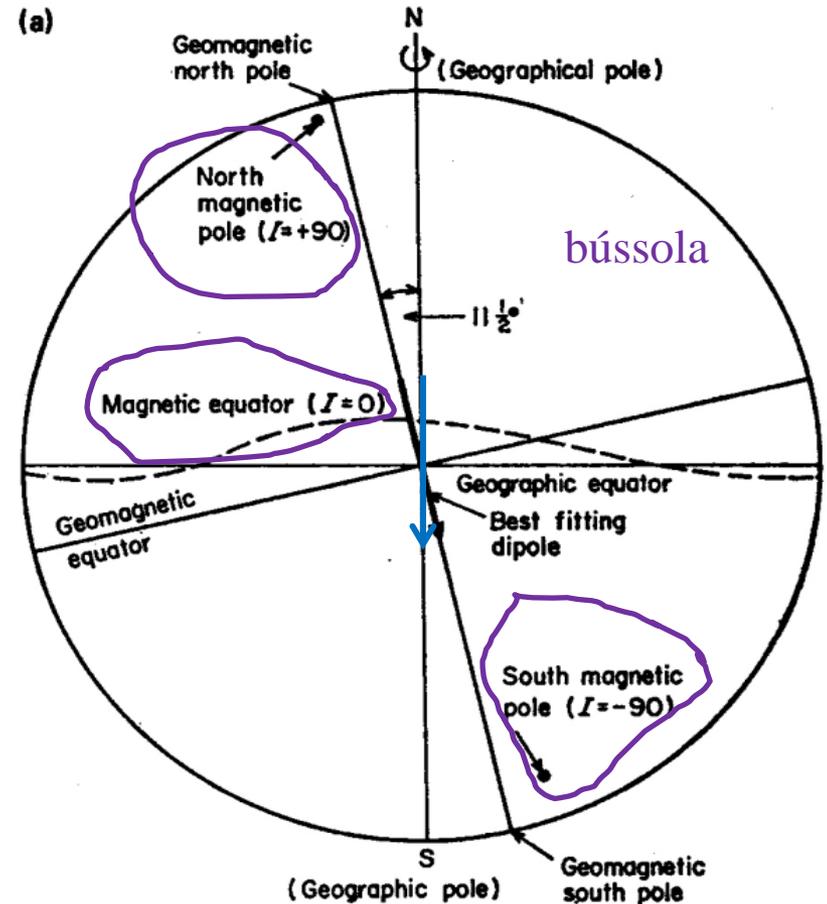
- O CMT na superfície pode ser representado por um dipolo.
- O melhor dipolo não é axial nem está localizado no centro da Terra. Dipolo excêntrico.
- Para facilitar fazemos algumas aproximações:
- **Aproximação 1:**
- **Dipolo centrado e não axial.** O eixo do dipolo forma um ângulo de $11,5^\circ$ com o eixo de rotação da Terra. O equador geomagnético fica a 90° do eixo do dipolo. O centro do dipolo fica no centro da Terra. **Não tem relação direta entre coordenadas geomagnéticas e geográficas.**



CMT como Dipolo centrado e axial

- Aproximação 2:
- Dipolo centrado e axial. O CMT pode ser representado por um dipolo situado no centro da Terra e alinhado com o eixo de rotação.
- Vantagem desta aproximação: **polos do dipolo coincidem com os polos geográficos.**
- Campo de forças do dipolo

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}W(\vec{r})$$



Representação dipolar

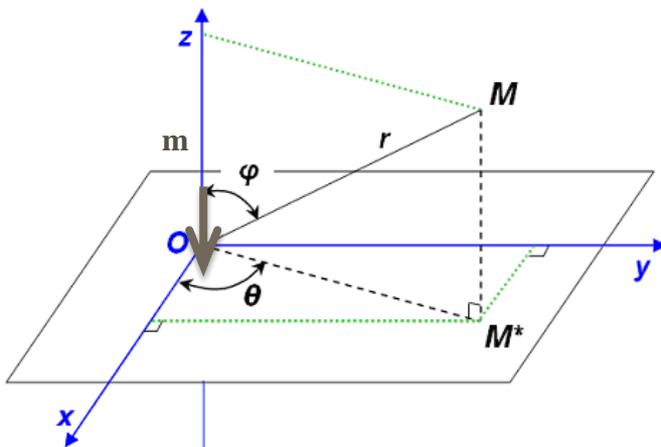
(dipolo centrado e axial)

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}W(\vec{r})$$

$$W(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{m} \cdot \vec{r} = -\frac{\mu_0 m r \cos\varphi}{4\pi r^3} = -\frac{\mu_0 m \cos\varphi}{4\pi r^2}$$

Potencial magnético

$$\nabla W(r) = \left(\frac{\partial W}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{1}{r \sin\varphi} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \text{ Em coordenadas esféricas polares}$$



M distante **r** do centro da esfera
φ co-latitude (= 90° – latitude)
 φ = 0° no pólo norte, 90° no equador e
 180° no pólo sul
θ longitude
 θ = 0° no meridiano de Greenwich
m momento magnético do dipolo alinhado na
 direção negativa de Z

Representação dipolar (dipolo centrado e axial)

$$W(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{m} \cdot \vec{r} = -\frac{\mu_0 m r \cos\varphi}{4\pi r^3} = -\frac{\mu_0 m \cos\varphi}{4\pi r^2}$$

$$\nabla W(r) = \left(\frac{\partial W}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{1}{r \sin\varphi} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)$$

$$B_r(r, \varphi, \theta) = -\mu_0 \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\mu_0 m \cos\varphi}{4\pi} \left(\frac{\partial 1/r^2}{\partial r} \right) = -\frac{2\mu_0 m \cos\varphi}{4\pi r^3}$$

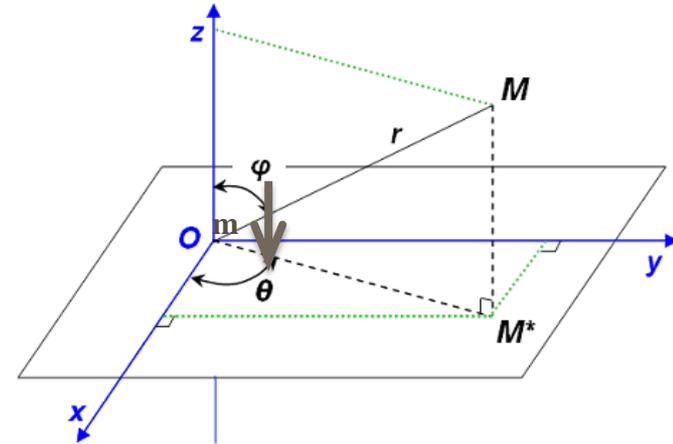
$$B_\varphi(r, \varphi, \theta) = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \cos\varphi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{\mu_0 m \sin\varphi}{4\pi r^3}$$

$$B_\theta(r, \varphi, \theta) = -\mu_0 \frac{1}{r \sin\varphi} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{r \sin\varphi} \left(\frac{\partial m \cos\varphi / 4\pi r^2}{\partial \theta} \right) = 0$$

Componente radial

Componente na colatitude

Componente longitudinal



Representação dipolar (dipolo centrado e axial)

- polo norte geomagnético $\Rightarrow \varphi = 0^\circ$

$$B_r(r, 0, \theta) = -\frac{2\mu_0 m \cos 0}{4\pi r^3} = -\frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}$$

$$B_\varphi(r, 0, \theta) = -\frac{\mu_0 m \operatorname{sen} 0}{4\pi r^3} = 0$$

- polo sul geomagnético $\Rightarrow \varphi = 180^\circ$

$$B_r(r, 180, \theta) = -\frac{2\mu_0 m \cos 180}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}$$

$$B_\varphi(r, 180, \theta) = -\frac{\mu_0 m \operatorname{sen} 180}{4\pi r^3} = 0$$

- equador geomagnético $\Rightarrow \varphi = 90^\circ$

$$B_r(r, 90, \theta) = -\frac{2\mu_0 m \cos 90}{4\pi r^3} = 0$$

$$B_\varphi(r, 90, \theta) = -\frac{\mu_0 m \operatorname{sen} 90}{4\pi r^3} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}$$

$$B_r(r, 90, \theta) = -\frac{2\mu_0 m \cos 90}{4\pi r^3} = 0$$

Representação dipolar (dipolo centrado e axial)

$$B_r(r, \varphi, \theta) = -\mu_0 \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\mu_0 m \cos \varphi}{4\pi} \left(\frac{\partial 1/r^2}{\partial r} \right) = -\frac{2\mu_0 m \cos \varphi}{4\pi r^3}$$

Componente radial

$$B_\varphi(r, \varphi, \theta) = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{\mu_0 m \sin \varphi}{4\pi r^3}$$

Componente na colatitude

Na superfície da Terra, raio $r=R$, definimos B_0

$$B_r(R, \varphi, \theta) = -2B_0 \cos \varphi$$

Componente na direção do eixo do dipolo

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}$$

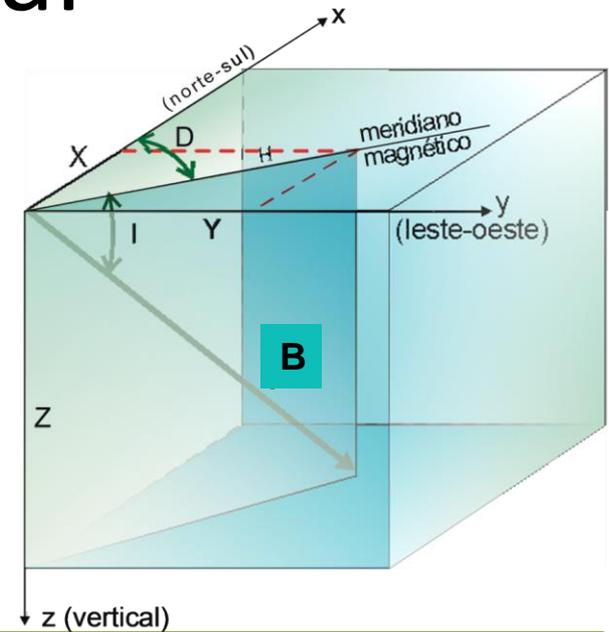
$$B_\varphi(R, \varphi, \theta) = -B_0 \sin \varphi$$

Componente na direção do plano perpendicular ao eixo do dipolo

Representação dipolar (dipolo centrado e axial)

$$\tan D = \frac{Y}{X} \quad \tan I = \frac{Z}{H}$$

$$|B| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad |H| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$



Única componente nos polos e está ao longo do eixo do dipolo – componente vertical

$$B_r(R, \varphi, \theta) = -2B_0 \cos\varphi = -Z(R, \varphi, \theta)$$

Única componente no equador e está ao longo plano perpendicular do eixo do dipolo – componente horizontal

$$|B_\theta(R, \varphi, \theta)| = |-B_0 \operatorname{sen}\varphi| = H(R, \varphi, \theta)$$

Representação dipolar (dipolo centrado e axial)

$$\tan D = \frac{Y}{X} \quad \tan I = \frac{Z}{H}$$

$$|B| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad |H| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$|B(R, \varphi, \theta)| = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

Módulo do campo total

Inclinação do campo

$$\tan I = 2 \cot\varphi = 2 \tan\lambda$$

φ co-latitude (= $90^\circ - \text{latitude } (\lambda)$)

$$|B_\theta(R, \varphi, \theta)| = |-B_0 \sin\varphi| = H(R, \varphi, \theta)$$

$$B_r(R, \varphi, \theta) = -2B_0 \cos\varphi = -Z(R, \varphi, \theta)$$

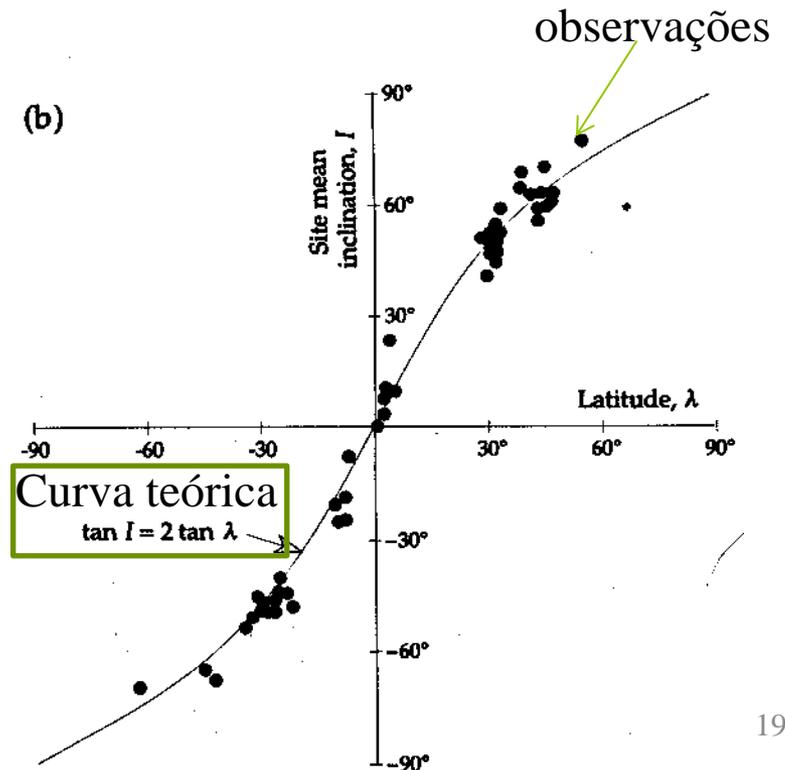
Importância da representação dipolar (dipolo centrado e axial)

- Relacionar um parâmetro do CMT, a inclinação, com a posição geográfica, latitude

- $\tan I = 2 \cot \varphi = 2 \tan \lambda$

- Hipótese:

O CMT pode ser representado por um dipolo situado no centro da Terra (dipolo centrado ou dipolo geocêntrico) e axial: Dipolo centrado axial



Relação entre campo dipolo centrado e Axial e o IGRF

COORDENADAS DO DIPOLO CENTRADO

- Componentes do campo na superfície:**

$$Z(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=R} \quad \text{a componente vertical é a própria componente radial}$$

$$X(\theta, \phi) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{r=R}$$

componentes horizontais do campo

$$Y(\theta, \phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)_{r=R}$$

- $n = m = 0 \Rightarrow g_0^0 = 0 \Rightarrow$ monopolo independente, que não existe no caso magnético
- $n = 1, m = 0, 1 \Rightarrow$ coeficientes do dipolo centrado

$$W = R \left[P_1^0(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^2 (g_1^0 \cos \theta + h_1^0 \sin \theta) + P_1^1(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^2 (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi) \right]$$

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta \quad P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$$

$$W = \frac{R^3}{r^2} [g_1^0 \cos \theta + \sin \theta (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi)]$$

componentes na superfície ($r = R$)

$$Z(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=R} = -2 \frac{R^3}{R^3} [g_1^0 \cos \theta + \text{sen } \theta (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \text{sen } \phi)]$$

$$Z(\theta, \phi) = -2g_1^0 \cos \theta - 2 \text{sen } \theta (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \text{sen } \phi)$$

$$X(\theta, \phi) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{r=R} = \frac{1}{R} \frac{R^3}{R^2} [g_1^0 (-\text{sen } \theta) + \cos \theta (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \text{sen } \phi)]$$

$$X(\theta, \phi) = -g_1^0 \text{sen } \theta + \cos \theta (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \text{sen } \phi)$$

$$Y(\theta, \phi) = \frac{1}{r \text{sen } \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)_{r=R} = \frac{1}{R \text{sen } \theta} \frac{R^3}{R^2} [\text{sen } \theta (-g_1^1 \text{sen } \phi + h_1^1 \cos \phi)]$$

$$Y(\theta, \phi) = -g_1^1 \text{sen } \phi + h_1^1 \cos \phi$$

No polo norte magnético, com coordenadas $(\theta_N, \phi_N)_r$, o campo é só vertical ($F = Z = 2B_0$, $X = Y = 0$)

$$Y(\theta, \phi) = -g_1^1 \text{sen } \phi_N + h_1^1 \cos \phi_N = 0 \Rightarrow g_1^1 \text{sen } \phi_N = h_1^1 \cos \phi_N \Rightarrow \frac{\text{sen } \phi_N}{\cos \phi_N} = \frac{h_1^1}{g_1^1}$$

$$\tan \phi_N = \frac{h_1^1}{g_1^1}$$

longitude do dipolo centrado

$$Z = 2B_0 \Rightarrow B_0 = Z/2 \Rightarrow B_0 = -g_1^0 \cos \theta_N - \text{sen} \theta_N (g_1^1 \cos \phi_N + h_1^1 \text{sen} \phi_N)$$

$$X = 0 \quad 0 = -g_1^0 \text{sen} \theta_N + \cos \theta_N (g_1^1 \cos \phi_N + h_1^1 \text{sen} \phi_N)$$

Multiplicando B_0 por $\cos \theta_N$ e X por $\text{sen} \theta_N$

$$B_0 \cos \theta_N = -g_1^0 \cos^2 \theta_N - \text{sen} \theta_N \cos \theta_N (g_1^1 \cos \phi_N + h_1^1 \text{sen} \phi_N)$$

$$0 = -g_1^0 \text{sen}^2 \theta_N + \text{sen} \theta_N \cos \theta_N (g_1^1 \cos \phi_N + h_1^1 \text{sen} \phi_N)$$

Somando as duas expressões

$$B_0 \cos \theta_N = -g_1^0 (\cos^2 \theta_N + \text{sen}^2 \theta_N) = -g_1^0$$

$$\cos \theta_N = \frac{-g_1^0}{B_0}$$

co-latitude do dipolo centrado: $\theta_N = \cos^{-1} \frac{-g_1^0}{B_0}$	latitude do dipolo: $\lambda_N = 90 - \theta_N$
---	---

Relação entre campo dipolo centrado e Axial e o IGRF

MOMENTO DO DIPOLO CENTRADO

No equador geográfico (considerando dipolo centrado e sem inclinação com respeito ao eixo de rotação da Terra, equador geográfico \equiv equador geomagnético) $\theta = 90^\circ$

$$Z^2 = (-2g_1^0 \cos 90 - 2 \sin 90 (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi))^2$$

$$Z^2 = (-2g_1^1 \cos \phi - 2h_1^1 \sin \phi)^2 = 4(g_1^1)^2 \cos^2 \phi + 4(h_1^1)^2 \sin^2 \phi + 8g_1^1 h_1^1 \cos \phi \sin \phi$$

$$X^2 = (-g_1^0 \sin 90 + \cos 90 (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi))^2$$

$$X^2 = (-g_1^0)^2 = (g_1^0)^2$$

$$Y^2 = (-g_1^1 \sin \phi + h_1^1 \cos \phi)^2$$

$$Y^2 = (g_1^1)^2 \sin^2 \phi + (h_1^1)^2 \cos^2 \phi - 2g_1^1 h_1^1 \sin \phi \cos \phi$$

$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{4} = (g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 \sin^2 \phi + (h_1^1)^2 \cos^2 \phi - 2g_1^1 h_1^1 \sin \phi \cos \phi + (g_1^1)^2 \cos^2 \phi + (h_1^1)^2 \sin^2 \phi +$$

$$2g_1^1 h_1^1 \sin \phi \cos \phi = (g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2$$

No equador $Z = 0$ e $\theta = 90^\circ$

$$|\vec{B}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{H^2 + Z^2}$$

usando as componentes do dipolo apresentadas anteriormente:

$$Z = 2B_0 \cos \theta \quad H = -B_0 \sin \theta$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{H^2} = \sqrt{|-B_0 \sin 90|}^2 = \sqrt{B_0^2}$$

$$X^2 + Y^2 + \left(\frac{Z}{2}\right)^2 = B_0^2 \sin^2 \theta + \frac{4B_0^2 \cos^2 \theta}{4} = B_0^2 \sin^2 \theta + B_0^2 \cos^2 \theta = B_0^2$$

Mas B_0 foi definido como sendo: $B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}$ e o momento como: $m = \frac{4\pi R^3 B_0}{\mu_0}$

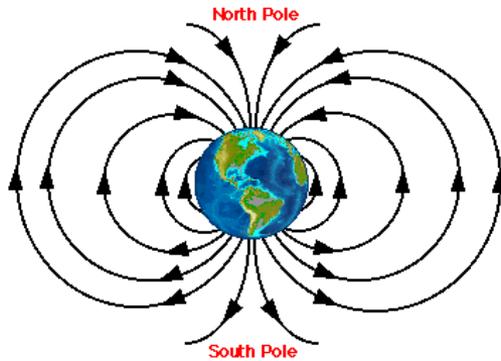
$$m = \frac{4\pi R^3 B_0}{\mu_0} = \frac{4\pi R^3}{\mu_0} \left[(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2 \right]^{1/2} \quad \text{momento do dipolo centrado}$$

Relação entre campo dipolo centrado e Axial e o IGRF

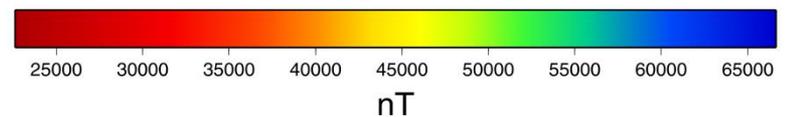
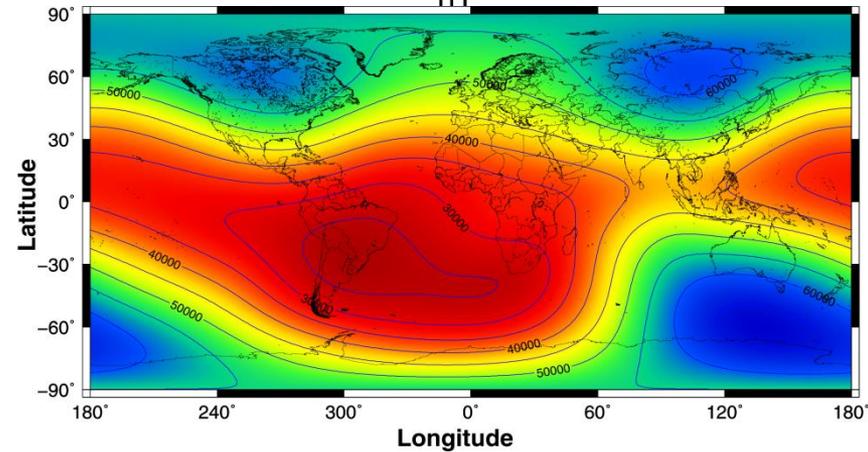
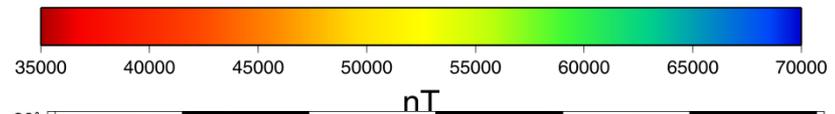
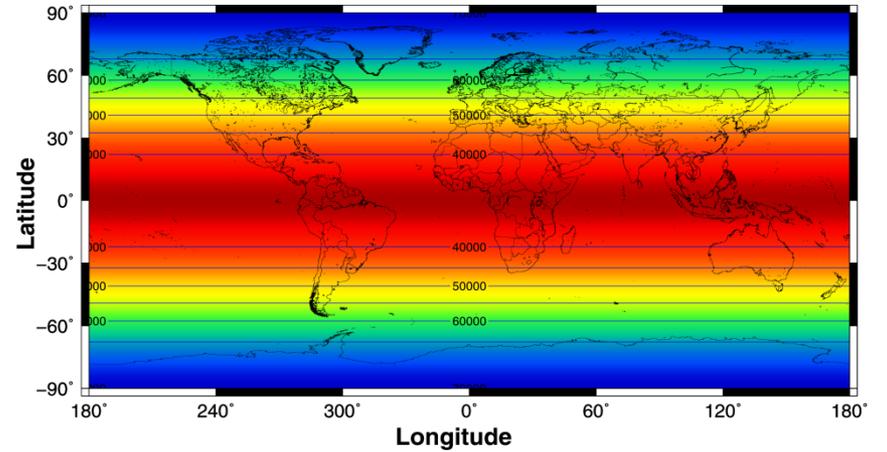
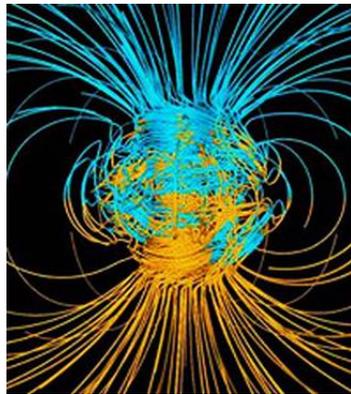
VISUALIZANDO EM MAPAS

Intensidade do campo magnético

- Se fosse dipolar

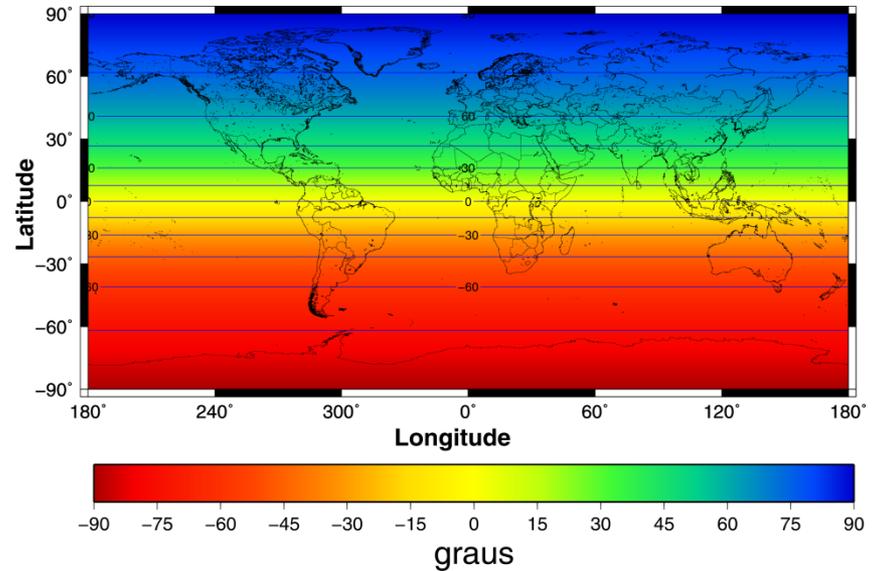
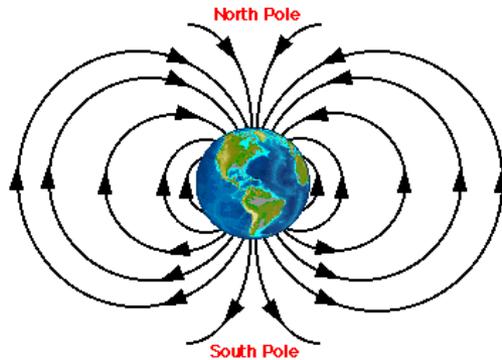


- CMT

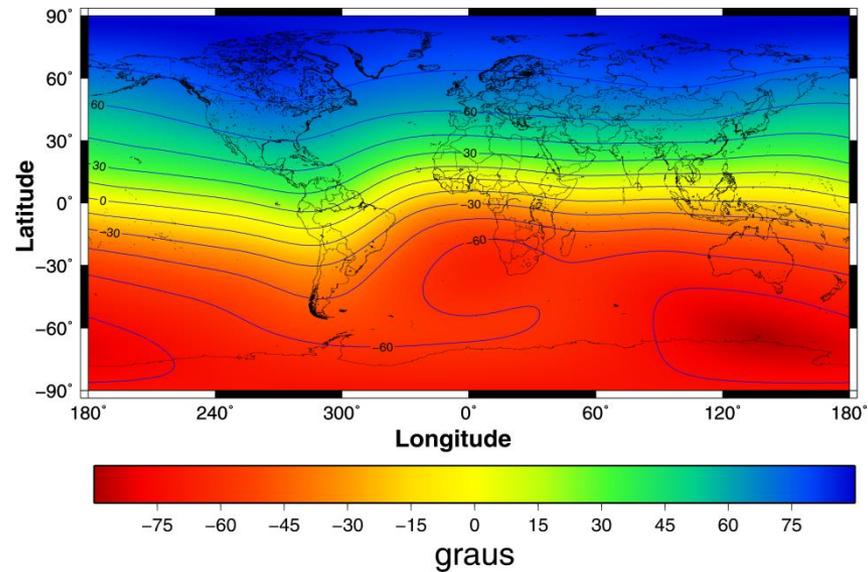
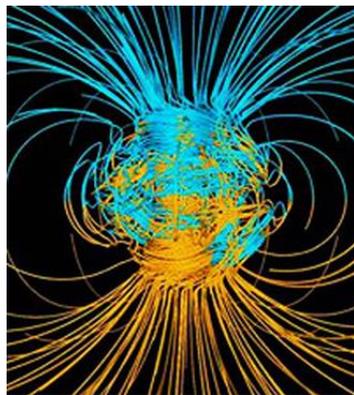


Inclinação do campo magnético

- Se fosse dipolar

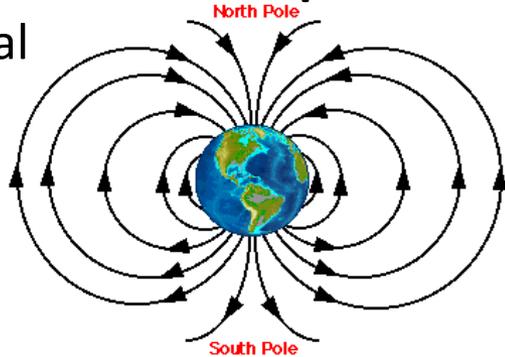


- CMT



Declinação do campo magnético

- Se fosse dipolar axial



considerando um dipolo geocêntrico e

não tem variação na declinação

- CMT

