

Desenvolvimento do potencial geomagnético em harmônicos esféricos

AGG0669 – 2022

IAG-USP

Representação por harmônicos esféricos

modelo de campo interno

- Motivação: criar um modelo para o campo interno que consiga reproduzir as observações em superfície e como elas variam com o tempo
- Hipóteses utilizadas:
 - geometria esférica;
 - equação de Laplace é válida, na superfície da Terra ou próxima a ela não existem fontes magnéticas
- $\nabla^2 V = 0$

Escrevendo o laplaciano em coordenadas esféricas (r, θ, λ) , onde λ é a longitude e θ é a colatitude (latitude: $\varphi = \pi/2 - \theta$), temos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0$$

Conhecendo-se a variação desta função potencial V com as coordenadas r, θ, λ , pode-se determinar as componentes do campo, sobre ou acima da superfície da Terra, tomando-se os gradientes nas direções correspondentes. Para resolver a equação de Laplace, tenta-se uma separação de variáveis, isto é, considera-se

$$V(r, \theta, \lambda) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Lambda(\lambda)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \Theta \Lambda \frac{dR}{dr} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = R \Theta \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = R \Lambda \frac{d\Theta}{d\theta}$$

Substituindo, dividindo por $R(r)\Theta(\theta)\Lambda(\lambda)$ e multiplicando por $\sin^2 \theta$:

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = - \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}$$

Isto só é possível se ambos os membros forem iguais a uma constante, que nomeamos aqui m^2 :

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = -m^2$$

(1)

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = m^2$$

Tomando o primeiro membro, dividindo por $\sin^2 \theta$ e redistribuindo os termos da equação com a constante (m^2), tem-se, com a introdução do fator constante $n(n+1)$, sendo n inteiro :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = n(n+1)$$

O desenvolvimento do trecho do retângulo amarelo resulta em:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (2)$$

A terceira equação é, então:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0 \quad (3)$$

Para determinar a função potencial V , devemos, portanto, resolver as equações (1), (2) e (3). A primeira e a última são equações diferenciais comuns, com soluções bem conhecidas, mas a equação (2) necessita de método mais complexo para sua solução.

A equação (1) admite soluções do tipo:

$$\Lambda = A \cos m\lambda \quad \text{ou} \quad \Lambda = B \sin m\lambda$$

onde A e B são constantes de integração e m deve ser um número inteiro, para que as funções sejam unívocas.

A equação (3) admite soluções do tipo

$$R = C r^n$$

ou

$$R = D r^{-(n+1)}$$

onde C e D também são constantes de integração e n deve ser inteiro.

A equação (2) é chamada de equação de Legendre associada e sua solução é dada pelos polinômios de Legendre associados.

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

$$\Theta = P_{nm}(u), \text{ sendo } \cos \theta = u;$$

Para $m=0$, a equação chama-se equação de Legendre e as soluções são os **polinômios de Legendre**:

$$P_n^0(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} [(u^2 - 1)^n]$$

sendo $\frac{1}{2^n n!}$ um fator de normalização, para que se tenha $P_n^0(1) = 1$

Para $m=0$, a dependência com a longitude é eliminada e as funções P_n^0 são simétricas em torno do eixo polar (harmônicas zonais). Calculando-se alguns destes polinômios:

$$P_0^0(u) = 1$$

$$P_1^0(u) = u = \cos \theta$$

$$P_2^0(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos^2 \theta + 1)$$

$$P_3^0(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u) = \frac{1}{8}(5 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta)$$

A fim de visualizar a interpretação física dos potenciais correspondentes, vamos considerar inicialmente só as soluções da parte radial do tipo

$$R = Dr^{-(n+1)}$$

que correspondem à origem do campo no centro da esfera, com $R \rightarrow 0$ para um ponto à distância r , $r \rightarrow \infty$.

Para $n=0$ $V = R\Theta$ é proporcional a $\frac{1}{r}$, potencial de monopolo na origem

$n=1$ $V = R\Theta$ é proporcional a $\frac{1}{r^2} \cos \theta$, potencial de dipolo axial, na origem

$n=3$ $V = R\Theta$ é proporcional a $\frac{3 \cos 2\theta + 1}{4r^3}$, potencial de quadrupolo

Para $m \neq 0$, há variação com a longitude e a equação chama-se equação de Legendre associada e as soluções são os **polinômios de Legendre associados**, que se relacionam com os polinômios de Legendre através da relação:

$$P_n^m = \sin^m \theta \frac{d^m P_n^0(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}$$

$$P_n^m = \frac{(1-u^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{(m+n)}}{du^{(m+n)}} [(u^2 - 1)^n] ; \quad u = \cos \theta$$

Observe-se que a derivada será nula para $(m+n) > 2n$ e, portanto, deveremos ter $m \leq n$.

Para o caso particular de $m = n$, os harmônicos correspondentes chamam-se harmônicos setoriais por serem definidos num setor esférico. Os mais simples são:

$$P_1^1(u) = (1 - u^2)^{1/2} = \text{sen}\theta$$

$$P_2^2(u) = 3(1 - u^2) = 3(1 - \cos^2 \theta)$$

$$P_3^3(u) = 15u(1 - u^2)^{3/2} = 15\text{sen}^3\theta$$

No caso geral de $m \neq n$, com $m \neq 0$, as soluções são os harmônicos tesserais, definidos numa tessera, que é a intersecção entre um setor e uma zona esférica.

$$P_2^1(u) = 3u(1 - u^2)^{1/2} = 3\text{sen}\theta \cos 2\theta$$

$$P_3^1(u) = \frac{3}{2}(1 - u^2)^{1/2}(5u^2 - 1)$$

$$P_3^2(u) = 15u(1 - u^2)$$

As soluções da parte radial R do tipo $r^{-(n+1)}$ correspondem a fontes na origem. As soluções do tipo r^n correspondem a fontes no infinito, com $V \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow \infty$, portanto fontes externas à Terra.

A solução geral da equação de Laplace fica, então:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [C_n^m r^n + D_n^m r^{-(n+1)}] P_n^m [A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \text{sen}m\lambda]$$

É conveniente relacionar r com o raio da Terra a , para que os coeficientes sejam dimensionalmente uniformes. Se c e s forem as frações de $P_n^m \cos m\lambda$ e $P_n^m \text{sen}m\lambda$ devidas à origem externa:

$$V = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m \left\{ \left[c_n^m \left(\frac{r}{a}\right)^n + (1 - c_n^m) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] A_n^m \cos m\lambda + \left[s_n^m \left(\frac{r}{a}\right)^n + (1 - s_n^m) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] B_n^m \text{sen}m\lambda \right\}$$

V não é diretamente observável, mas sim as componentes do campo, como X, Y e Z, que são medidas sobre a superfície da Terra ($r=a$)

$$X = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{r=a} \quad Y = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)_{r=a} \quad Z = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a}$$

$$X = \sum \sum \frac{dP_n^m}{d\theta} [A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda]$$

$$Y = \frac{1}{\sin \theta} \sum \sum P_n^m [mA_n^m \sin m\lambda - mB_n^m \cos m\lambda]$$

$$Z = \sum \sum P_n^m \{ [nc_n^m - (1 - c_n^m)(n+1)]A_n^m \cos m\lambda + [ns_n^m - (1 - s_n^m)(n+1)]B_n^m \sin m\lambda \}$$

Ajustando-se as expressões de X e Y aos valores observados, obtém-se os coeficientes A_n^m e B_n^m

Usa-se então a expressão de Z para determinar os c_n^m e s_n^m , ou seja, as frações de cada harmônico correspondentes à origem externa.

Gauss utilizou este método pela primeira vez e concluiu que a origem do campo era toda interna e que o campo externo não existia. Sabemos hoje que o campo externo é da ordem de algumas dezenas de nT em dias calmos e muitas vezes isto durante tempestades magnéticas.

Em primeira aproximação, podemos desprezar o campo externo, supondo que C_n^m e S_n^m são muito menores do que 1, o que simplifica a expressão do potencial:

$$V = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \text{sen}m\lambda] \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$$

g_n^m h_n^m são chamados coeficientes de Gauss e têm dimensões de campo magnético.

Cálculo de alguns potenciais

O potencial produzido por um dipolo axial (eixo z) é

$$V = M_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$$

com $1/r$ correspondendo ao monopolo. De modo geral, para um multipolo de ordem n e na direção z vale:

$$V = M_z \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Calculando as derivadas parciais para alguns multipolos temos:

- Potenciais de dipolos:

axial:
$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \cos \theta = \frac{P_1^0}{r^2}$$

na direção x:
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\text{sen} \theta \cos \lambda}{r^2} = \frac{P_1^1 \cos \lambda}{r^2}$$

na direção y:
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \lambda}{r^2} = \frac{P_1^1 \text{sen} \lambda}{r^2}$$

- Potenciais de quadrupolos:

axial:
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{(3 \cos 2\theta + 1)}{4r^3} = \frac{P_2^0}{r^3}$$

transverso no plano xz:
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3 \operatorname{sen} 2\theta \cos \lambda}{2r^3} = \frac{P_2^1 \cos \lambda}{r^3}$$

transverso no plano yz:
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3 \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \lambda}{2r^3} = \frac{P_2^1 \operatorname{sen} \lambda}{r^3}$$

transverso no plano xy:
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3 \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\lambda}{r^3} = \frac{P_2^2 \cos 2\lambda}{r^3}$$

Como

$$V = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \text{sen} m\lambda] \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$$

Aplicando esta expressão aos casos dos dipolos que calculamos, obtemos:

na direção z: $V = \frac{M_z}{r^2} P_1^0 = a \left(\frac{a}{r}\right)^2 g_1^0 P_1^0$, donde $M_z = g_1^0 a^3$

na direção x: $V = \frac{M_x}{r^2} P_1^1 \cos \lambda = a \left(\frac{a}{r}\right)^2 [g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \text{sen} \lambda] P_1^1$, donde $M_x = g_1^1 a^3$

na direção y: $V = \frac{M_y}{r^2} P_1^1 \text{sen} \lambda = a \left(\frac{a}{r}\right)^2 [g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \text{sen} \lambda] P_1^1$, donde $M_y = h_1^1 a^3$

Se o dipolo tiver uma orientação qualquer,

$$M = a^3 [(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2]^{1/2}$$

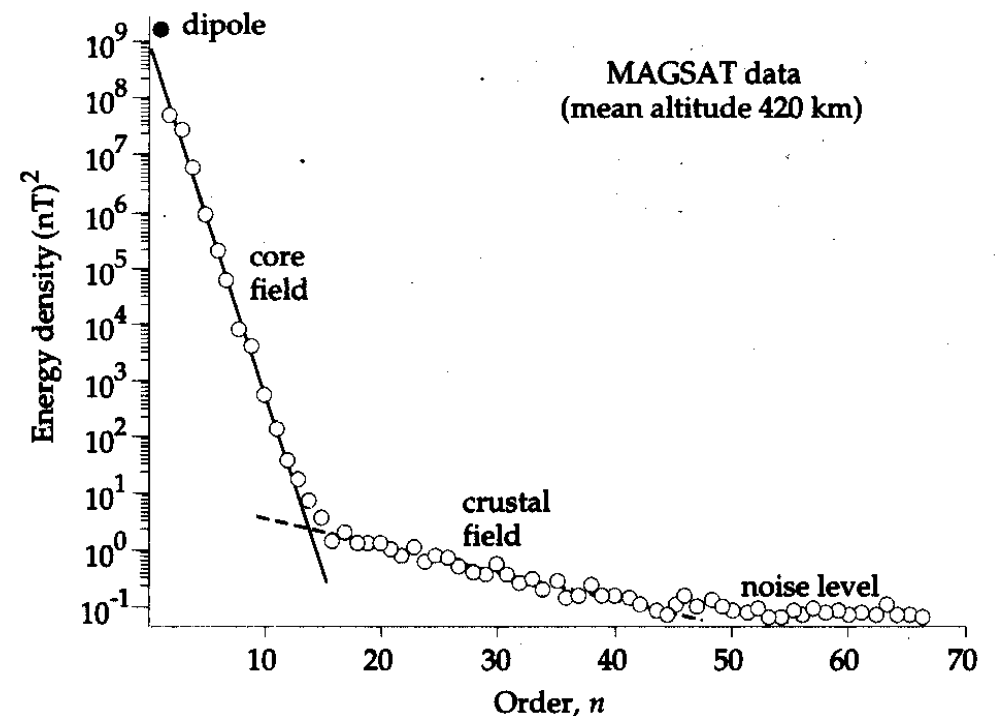
(M é o momento magnético do dipolo)

Representação por harmônicos esféricos

- - g^1_0 → dipolo centrado e axial, cerca de 5 vezes maior que os outros coeficientes;
- - g^1_1, h^1_1 → dipolo centrado com inclinação de cerca $11,5^\circ$ com respeito ao eixo de rotação. Somado ao g^1_0 , corresponde a 90% do campo;
- - $g^2_0, g^2_1, g^2_2, h^2_1, h^2_2$ → dipolo excêntrico, dipolo deslocado do centro da Terra, ou quadrupolo

Dados do Magsat:

- Altitude foi normalizada.
- Órbita entre 325 e 550 km, começa com órbita de 550 km, e devido ao atrito com a atmosfera essa órbita vai diminuindo até que o satélite entra em combustão. A missão foi de 6 meses entre 1979 e 1980. O ângulo de inclinação orbital foi de 97° .
- Os magnetômetros foram tipo fluxgate e de bombeamento ótico. A precisão obtida de 3 nT.
- Satélite era americano e o uso principal dos dados foi para determinar o campo crustal, o campo interno e o campo ionosférico.



Desta forma, o momento magnético do dipolo e a posição dos polos podem ser calculados a partir dos coeficientes de Gauss. Os coeficientes de Gauss de grau maior do que 1 correspondem ao campo não dipolar.

Ajustando-se as expressões das componentes do campo a dados experimentais correspondentes a vários lugares de observação (vários θ e λ), pode-se determinar os valores numéricos dos coeficientes de Gauss. Para o modelo do *International Geomagnetic Reference Field* (IGRF) 2000.0, por exemplo, temos:

Para o modelo do International Geomagnetic Reference Field (IGRF) 2000.0: |

$$g_1^0 = -29615,0 \quad \text{nT (dipolo axial)}$$

$$g_1^1 = -1728,0 \quad \text{nT (dipolo equatorial na direção x)}$$

$$h_1^1 = +5186 \quad \text{nT (dipolo equatorial na direção y)}$$

$$g_2^0 = -2267 \quad \text{nT (quadrupolo axial)}$$

Sobre a superfície da Terra ($r = a$), as componentes X, Y e Z do campo geomagnético podem ser escritas, em termos dos coeficientes de Gauss, como:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{dP_n^m}{d\theta} [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda]$$

$$Y = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m [mg_n^m \sin m\lambda - mh_n^m \cos m\lambda]$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m \{ [nc_n^m - (n+1)(1-c_n^m)]g_n^m \cos m\lambda + [ns_n^m - (n+1)(1-s_n^m)]h_n^m \sin m\lambda \}$$

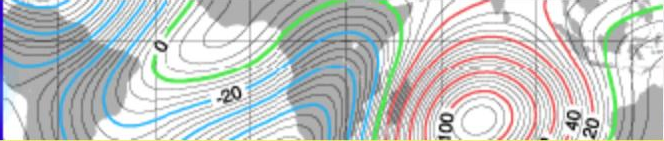
Os coeficientes g_n^m, h_n^m são obtidos com as equações de X e Y e os c_n^m, s_n^m com a equação de Z.

Vários modelos do campo vêm sendo propostos, desde a época de Gauss. Dependendo de hipóteses fundamentais e do grau e ordem da análise por harmônicos esféricos, obtém-se diferentes valores para os coeficientes de Gauss.

A IAGA (Associação Internacional de Geomagnetismo e Aeronomia) propôs o IGRF, que é um modelo global, calculado para cada período de cinco anos. É o modelo utilizado em prospecção geofísica, levantamentos e pesquisa.

Outro modelo é o WMM (*World Magnetic Model*), dos Departamentos de Defesa dos Estados Unidos e da Grã Bretanha. É utilizado em navegação e em aplicações que envolvam curso e altitude. É o modelo utilizado nos receptores GPS.

Utilizamos a função potencial $V(r, \theta, \lambda)$ mas, na realidade, a função é $V(r, \theta, \lambda, t)$ pois o campo geomagnético, e portanto os coeficientes de Gauss, variam com o tempo.



International Geomagnetic Reference Field

IGRF-13 is released. Download the latest IGRF model here : IGRF-13 coefficients ([text file](#), [excel spreadsheet](#))

[Fortran program](#) and [Python 3.7 package](#) with IGRF-13 coefficients integrated into the source code, provided by BGS.

The updated IGRF13.COF required by many users is now available along with the Geomag 7.0 software. ([Windows version](#), [Linux tar file](#)). [License and copyright information](#) for the geomag 7.0 software.

The International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA) has released the 13th Generation International Geomagnetic Reference Field — the latest version of a standard mathematical description of the Earth's main magnetic field that is used widely in studies of the Earth's deep interior, its crust and its ionosphere and magnetosphere. The coefficients for this degree and order 13 main field model were finalized by a task force of IAGA in December 2019. The IGRF is the product of a collaborative effort between magnetic field modellers and the institutes involved in collecting and disseminating magnetic field data from satellites and from observatories and surveys around the world.

The IGRF is a series of mathematical models of the Earth's main field and its annual rate of change (secular variation). In source-free regions at the Earth's surface and above, the main field, with sources internal to the Earth, is the negative gradient of a scalar potential V which can be represented by a truncated series expansion:

$$V(r, \theta, \phi, t) = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [g_n^m(t) \cos(m\phi) + h_n^m(t) \sin(m\phi)] P_n^m(\cos \theta)$$

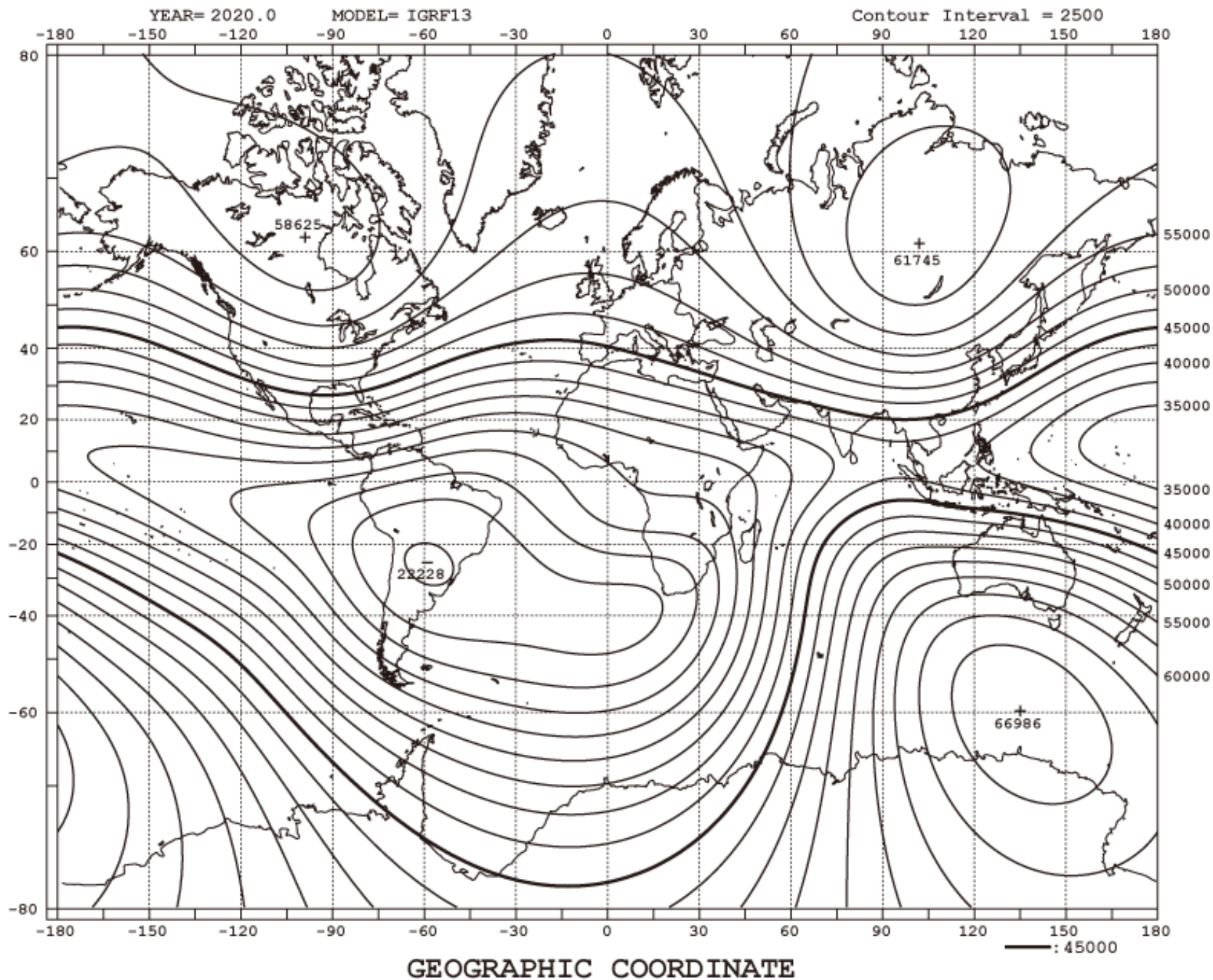
Here, $a = 6371.2$ km and the degree of truncation is $N = 13$. The 13th Generation IGRF coefficients were computed from candidate sets of coefficients produced by the participating members of IAGA Working Group V-MOD. Their institutes and the many organisations involved in operating magnetic survey satellites, observatories, magnetic survey programmes and World Data Centers are to be thanked for their continuing support of the IGRF project.

Before using the IGRF please look at the "[Health Warning](#)".

Older versions of the IGRF models may be downloaded from this page. If you are looking for a model of the geomagnetic field since 1900, you should use the latest IGRF-13 model which is updated retrospectively. However, older versions of the IGRF may be required in special cases. For example, if a magnetic survey was conducted in 1983, the appropriate predictive IGRF-3 (available at that time) would have been subtracted to make an anomaly map. If the original data are no longer available to update the MAP, one has to add the IGRF-3 to the anomaly map and then subtract IGRF-13 which includes the required definitive DGRF model for the period 1980-1985.

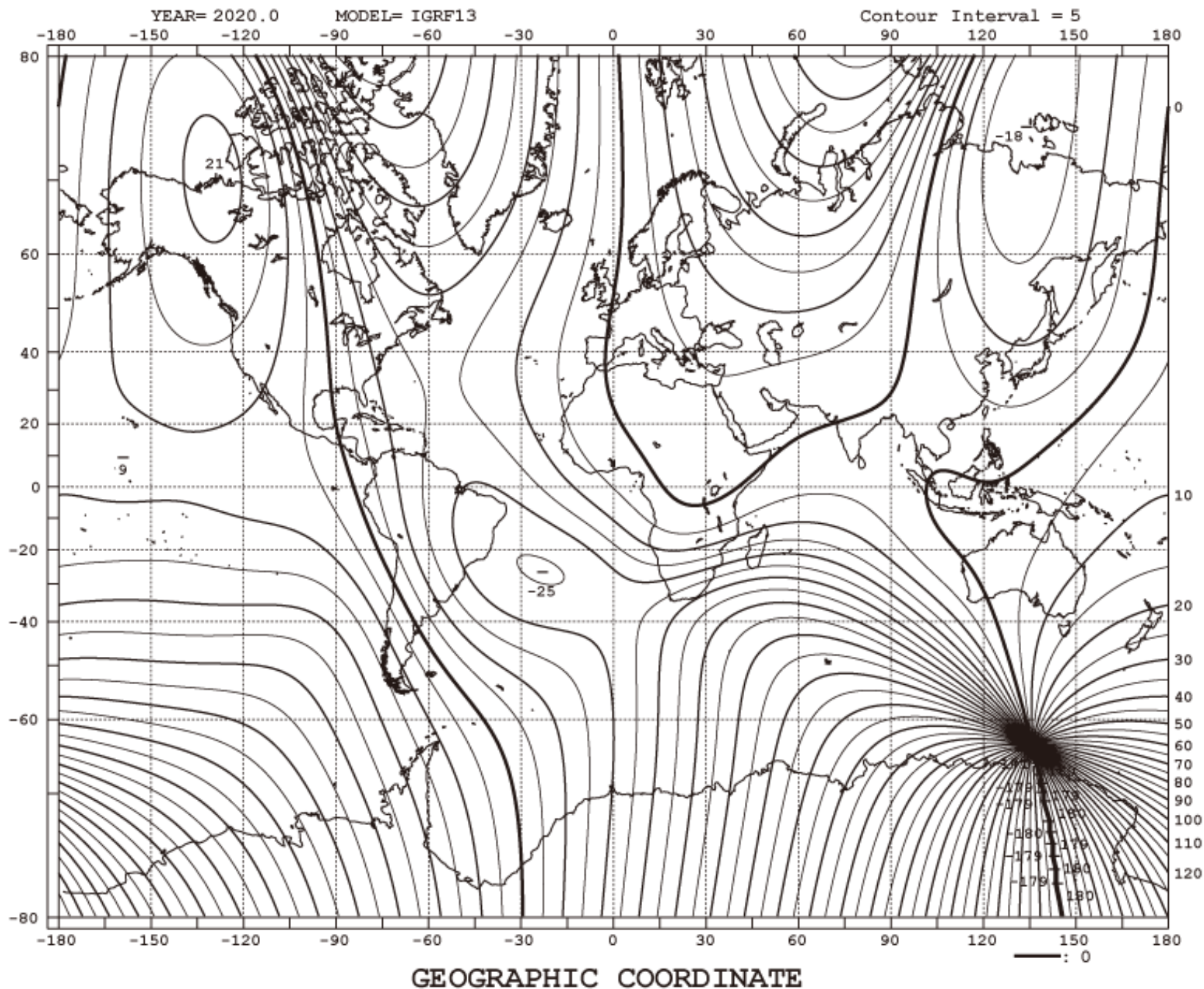
Model	Main Field	Secular Variation	Release Year
IGRF-1	1965.0	1975.0-1980.0	1965
IGRF-2	1965.0-1975.0	1980.0-1985.0	1975
IGRF-3	1965.0-1980.0	1980.0-1985.0	1980
IGRF-4	1945.0-1985.0	1985.0-1990.0	1985
IGRF-5	1945.0-1985.0	1985.0-1990.0	1987
IGRF-6	1945.0-1990.0	1990.0-1995.0	1991
IGRF-7	1900.0-1995.0	1995.0-2000.0	1995
IGRF-8	1900.0-2000.0	2000.0-2005.0	2000
IGRF-9	1900.0-2000.0	2000.0-2005.0	2003
IGRF-10	1900.0-2005.0	2005.0-2010.0	2005
IGRF-11	1900.0-2010.0	2010.0-2015.0	2010
IGRF-12	1900.0-2015.0	2015.0-2020.0	2015
IGRF-13	1900.0-2020.0	2020.0-2025.0	2020

TOTAL INTENSITY (NT)

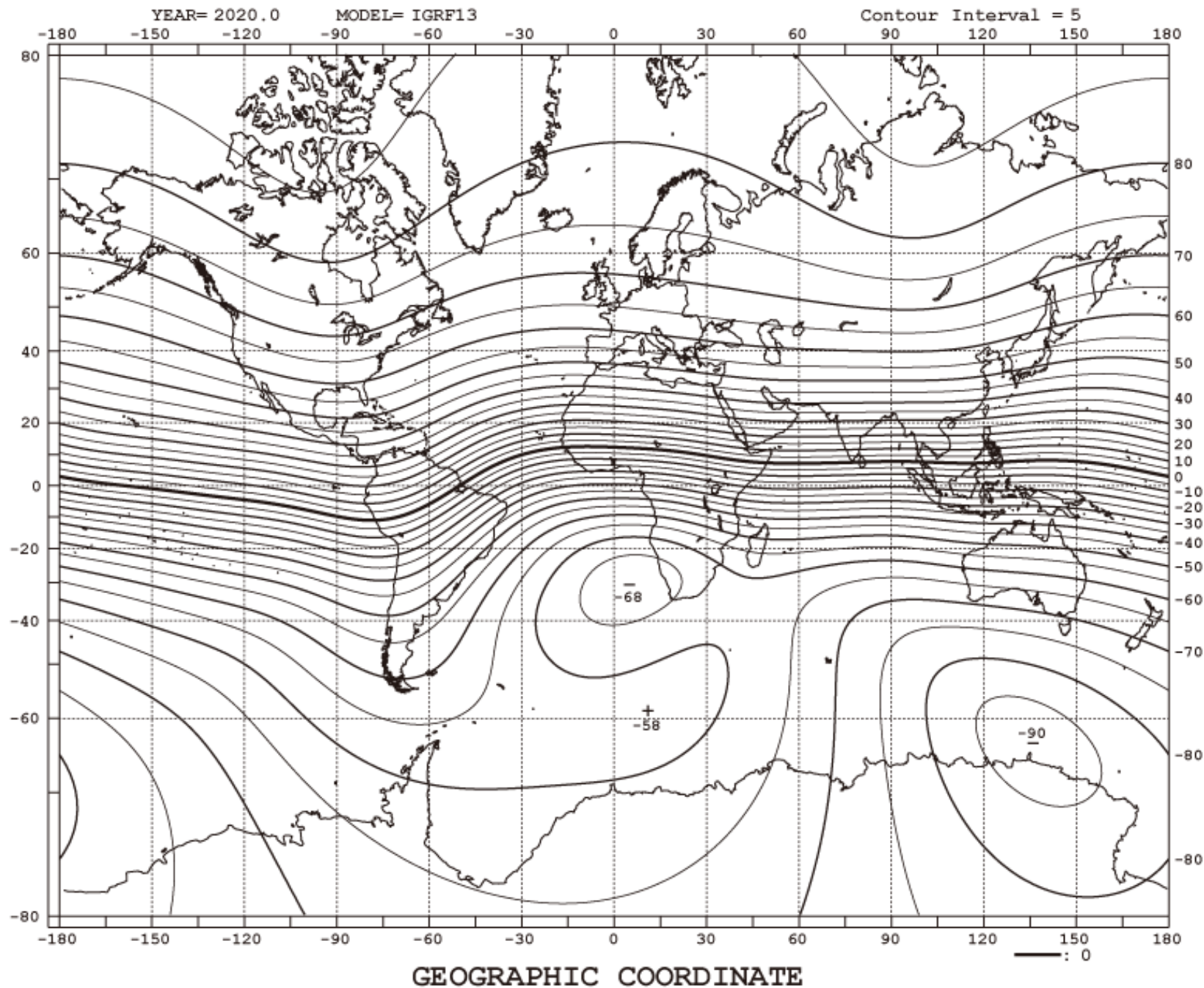


GEOGRAPHIC COORDINATE

DECLINATION (DEGREES)



INCLINATION (DEGREES)



Desenvolvimento do potencial geomagnético em harmônicos esféricos

AGG0669 – 2022

IAG-USP