Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

guilherme.germano@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

Plano do Curso

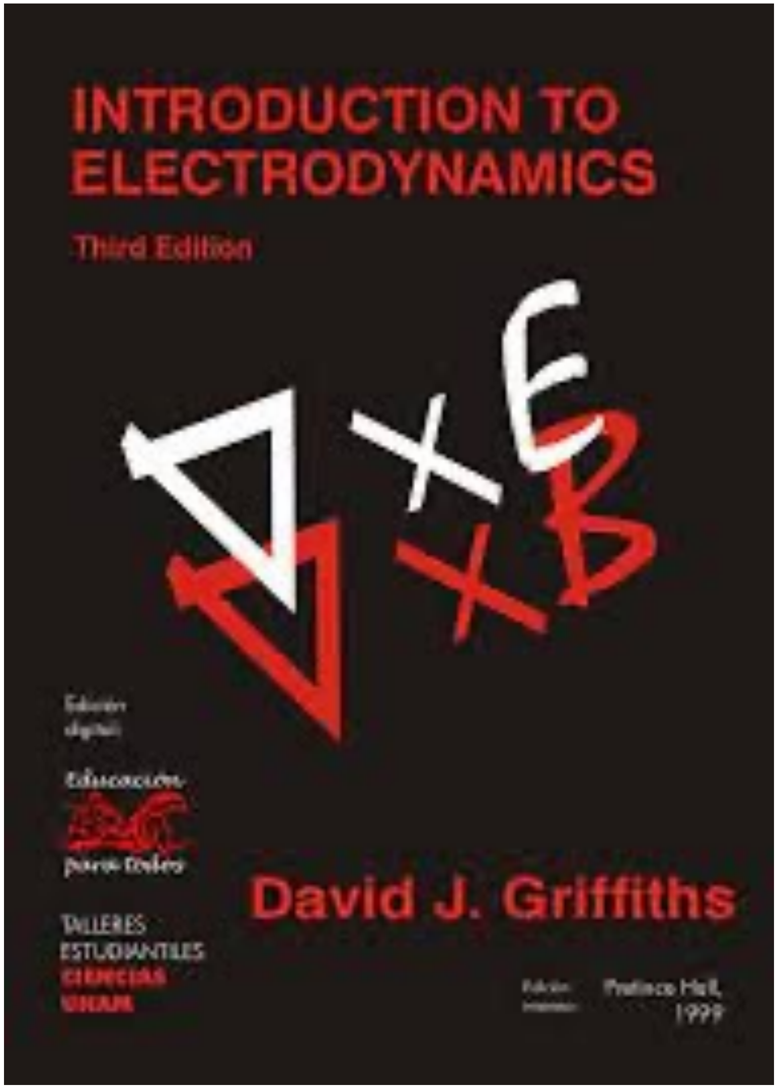
16/08
19/08
23/08
26/08
30/08
02/09
06/09
09/09

13/09
16/09
20/09 P1
23/09
27/09
30/09
04/10
07/10

11/10
14/10
18/10
21/10 P2
25/10
28/10
01/11
04/11

08/11
11/11
15/11
18/11
22/11
25/11 P3
29/11 correção
02/12 S1
06/12 revisão
09/12 S2

Bibliografia



Capítulo 2 : eletrostática

Capítulo 5 : magnetostática

Capítulo 7 : eletrodinâmica

Capítulo 8 : leis de conservação

Capítulo 9 : ondas eletromagnéticas

Capítulo 10 : campos e potenciais

Capítulo 11 : radiação

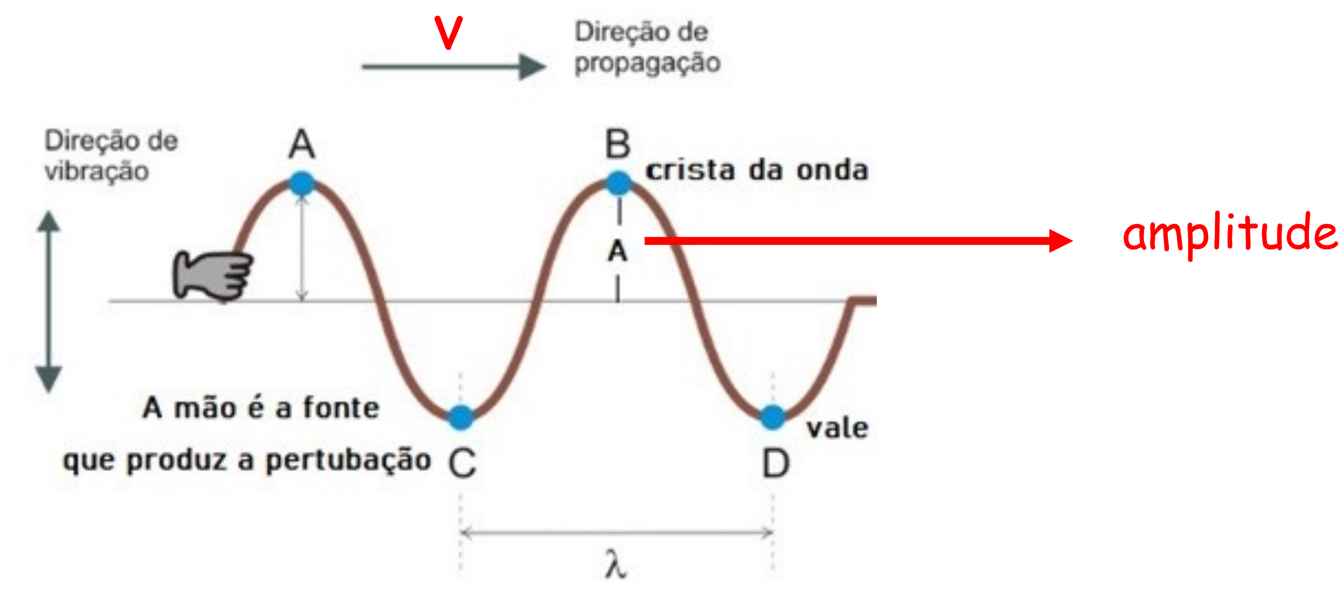
Aula 17

Ondas Eletromagnéticas

Griffiths - Capítulo 9

Ondas

Onda: perturbação em meio contínuo que se propaga com forma fixa e velocidade constante



Perfil da onda: é o "desenho" que vemos e que se move;
é representado por uma função

Exemplo: $$y(x,t) = A\,cos\,(x - vt)$$

Ondas

Funções matemáticas que descrevem ondas satisfazem a equação de onda

Em uma dimensão:

$$f = f(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Em três dimensões:

$$f = f(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplaciano

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

Verificação

A função y(x,t) satisfaz a equação de onda ?

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ?$$

$$y(x,t) = A\, cos\,(x - vt)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -A\, sen\,(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\, cos\,(x - vt)$$

$$y(x,t) = A\, cos\,(x - vt)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (-A)\,(-v)\, sen\,(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (A\, v)(-v)\, cos\,(x - vt)$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\, cos\,(x - vt)$$

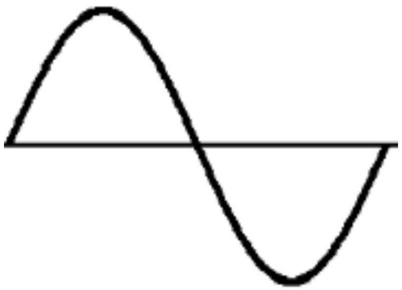
Lindo !!!

Roy Lichtenstein

y(x,t) é onda !!!

O cosseno (ou seno) que anda !

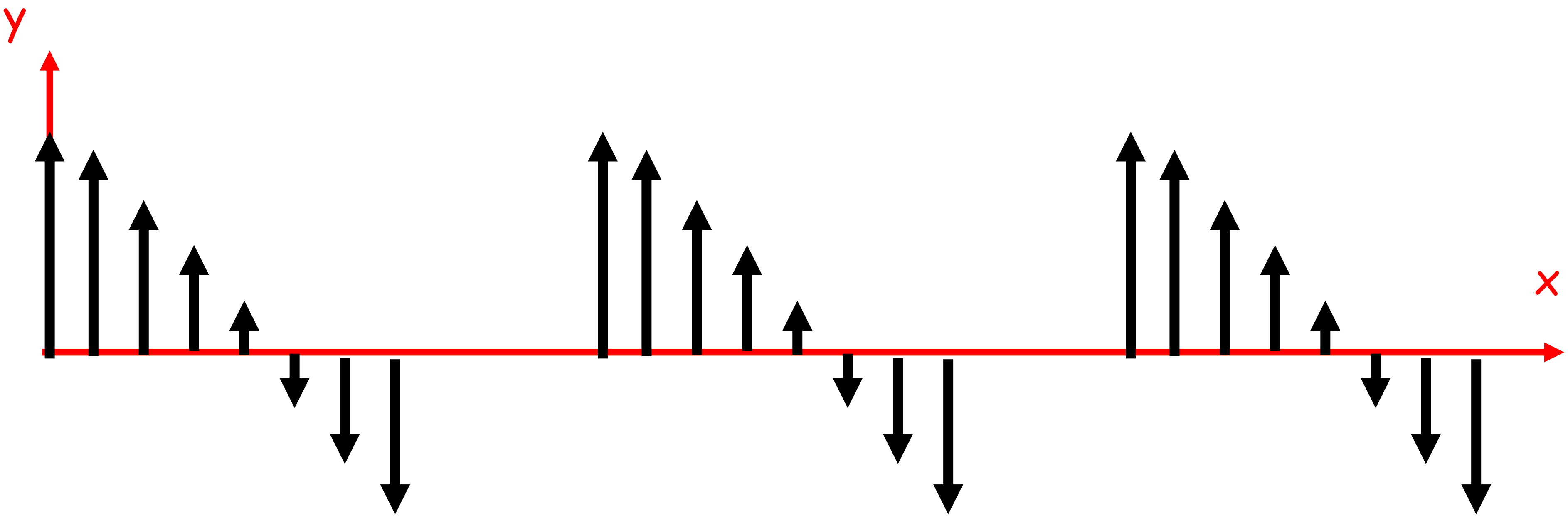
$$y(x,t) = A\,cos\,(x - vt)$$



Onda de vetor

$$f = f(x,t) \longrightarrow \vec{f} = \vec{f}(x,t) \qquad \vec{f} = \vec{f}_0 \, cos\,(x - vt)$$

$$\vec{f} = f_0 \, cos\,(x - vt)\ \hat{y}$$

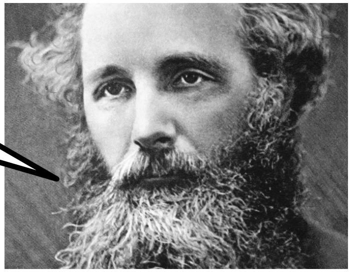


Ondas Eletromagnéticas

A gente não pode ver...

Como descobrir ondas eletromagnéticas ?

Encontre a equação diferencial para os campos E e B !!!



J. Maxwell

Equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \, . \, \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \, . \, \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \mu_0 \, \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

No vácuo não há cargas nem correntes: $\rho = 0 \qquad \vec{J} = 0$

$$\vec{\nabla} \, . \, \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \, . \, \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vamos tomar o rotacional dos dois lados:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

0

$$-\nabla^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad = -\frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad = -\mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{E}$$

É onda !!!

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\,\epsilon_0} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}$$

velocidade de propagação da onda

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Vamos tomar o rotacional dos dois lados:

0 $\quad \vec{\nabla} \, . \, \vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \, (\vec{\nabla} \, . \, \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \, \epsilon_0 \, \vec{\nabla} \times (\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \;\; = \mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial}{\partial t} \, (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \;\; = -\mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial}{\partial t} \, (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \, \epsilon_0 \, \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

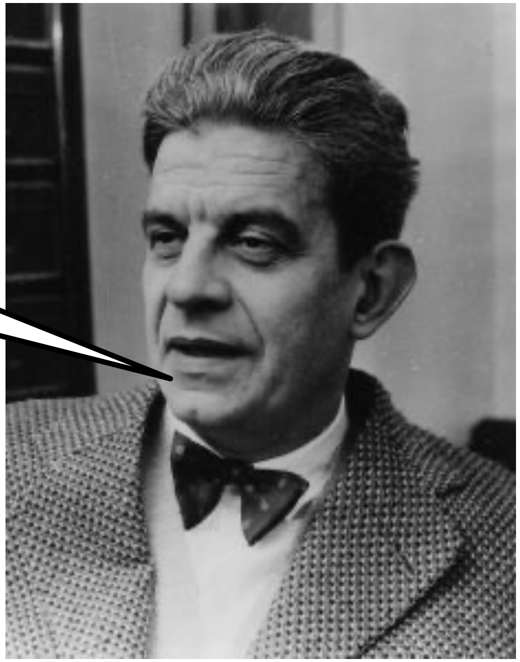
$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \, \vec{B}} \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \, \epsilon_0} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \, \epsilon_0}}$$

É onda !!!

velocidade de propagação da onda

SENTIMENTO GRANDIOSO...

Descoberta é hora de PAUSA !!!



Jacques Lacan

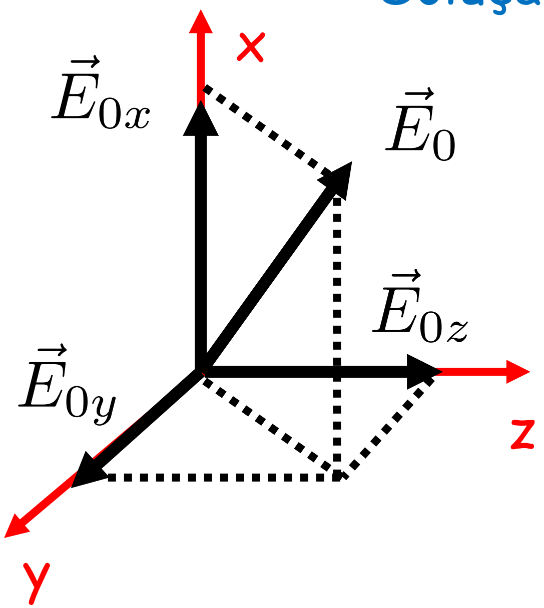
$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

É uma equação vetorial !

Uma para cada componente !

$$\nabla^2 E_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x \qquad \nabla^2 E_y = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y \qquad \nabla^2 E_z = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z$$

Solução de onda plana: onda se propaga na direção z



$$\vec{E} = \vec{E}_0\, cos\,(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} + E_{0z}\hat{z}$$

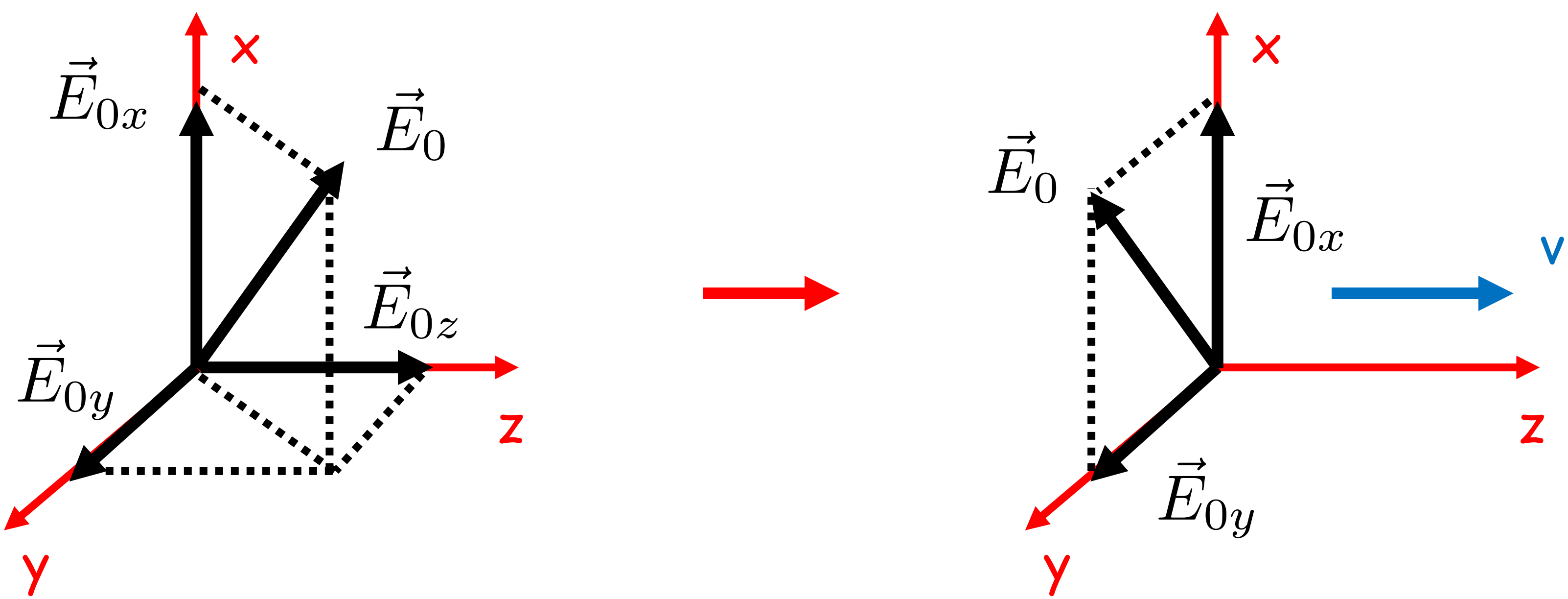
$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = 0$$

$$\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\,.\,(E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} + E_{0z}\hat{z})\, cos\,(kz - \omega t) = 0$$

$$\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) . \left(E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} + E_{0z}\hat{z}\right) cos\left(kz - \omega t\right) = 0$$

$$\left(\cancelto{0}{E_{0x}}\frac{\partial}{\partial x} + \cancelto{0}{E_{0y}}\frac{\partial}{\partial y} + E_{0z}\frac{\partial}{\partial z}\right) cos\left(kz - \omega t\right) = 0$$

$$-E_{0z}\, k\, sen\left(kz - \omega t\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad E_{0z} = 0$$



Podemos repetir tudo isso para a equação do campo magnético

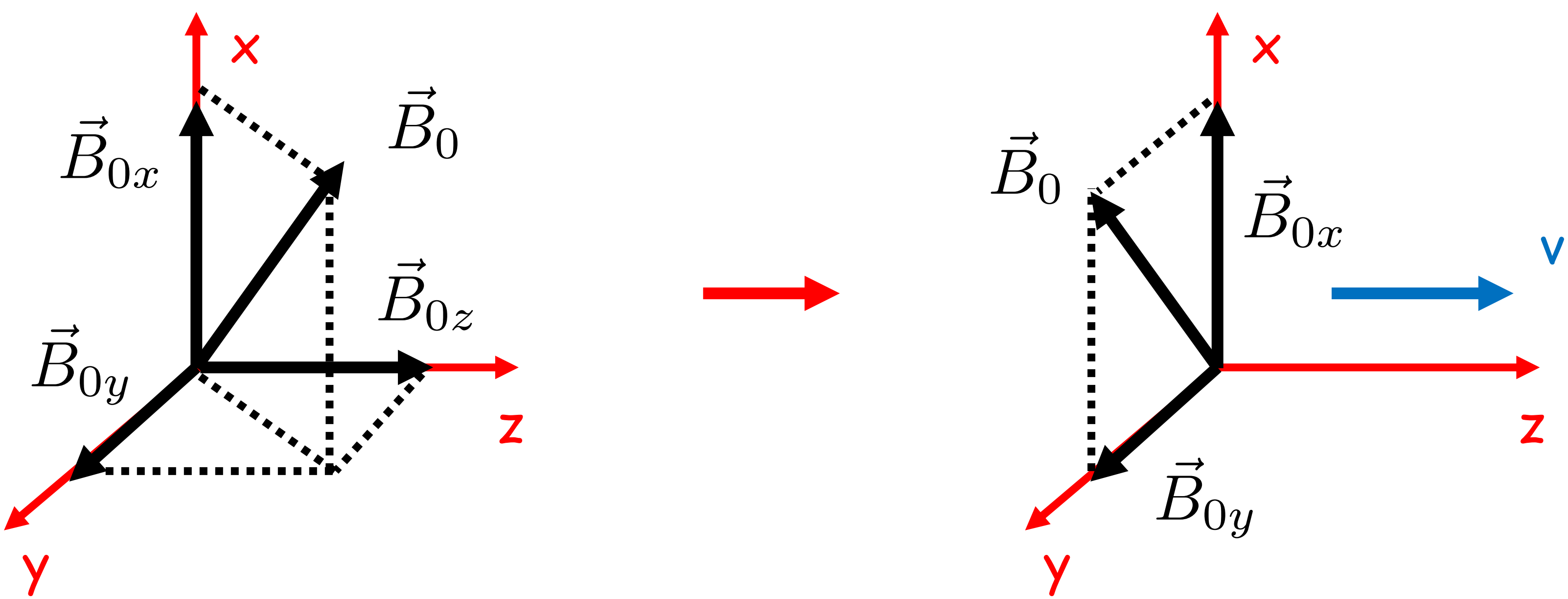
$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, cos\,(kz - \omega t)$$

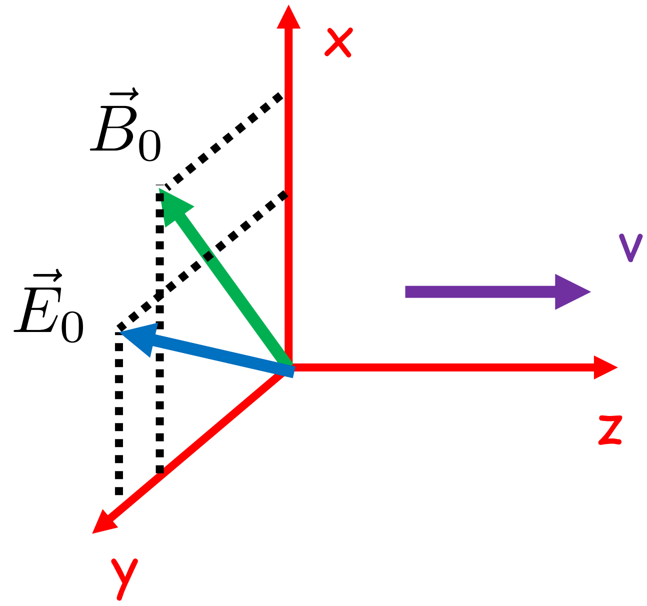
$$\vec{B}_0 = B_{0x}\hat{x} \, + \, B_{0y}\hat{y} \, + \, B_{0z}\,\hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{B} = 0$$

$$-B_{0z}\, k\, sen\,(kz - \omega t) = 0 \quad \longrightarrow \quad B_{0z} = 0$$



Ondas em são transversais à direção de propagação !



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, cos\,(kz - \omega t)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, cos\,(kz - \omega t)$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{B}_0\, \omega\, sen\,(kz - \omega t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x}\, cos\,(kz - \omega t) & E_{0y}\, cos\,(kz - \omega t) & E_{0z}\, cos\,(kz - \omega t) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{y}\, \frac{\partial}{\partial z}\, E_{0x}\, cos\,(kz - \omega t) - \hat{x}\, \frac{\partial}{\partial z}\, E_{0y}\, cos\,(kz - \omega t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -k\, sen\,(kz - \omega t)\,(\hat{y}\, E_{0x} - \hat{x}\, E_{0y})$$

$$(\hat{y}\, E_{0x} - \hat{x}\, E_{0y})\; k = \vec{B}_0\, \omega$$

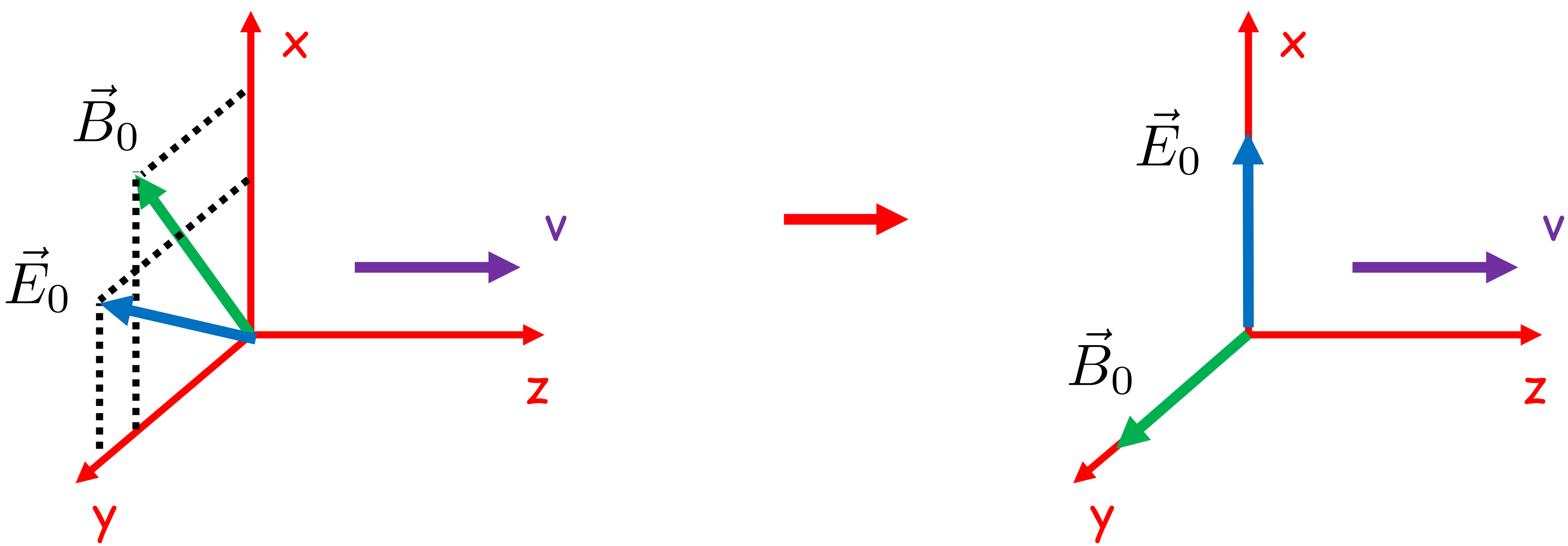
$$\hat{z} \times \vec{E}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} = (\hat{y}\, E_{0x} - \hat{x}\, E_{0y})$$

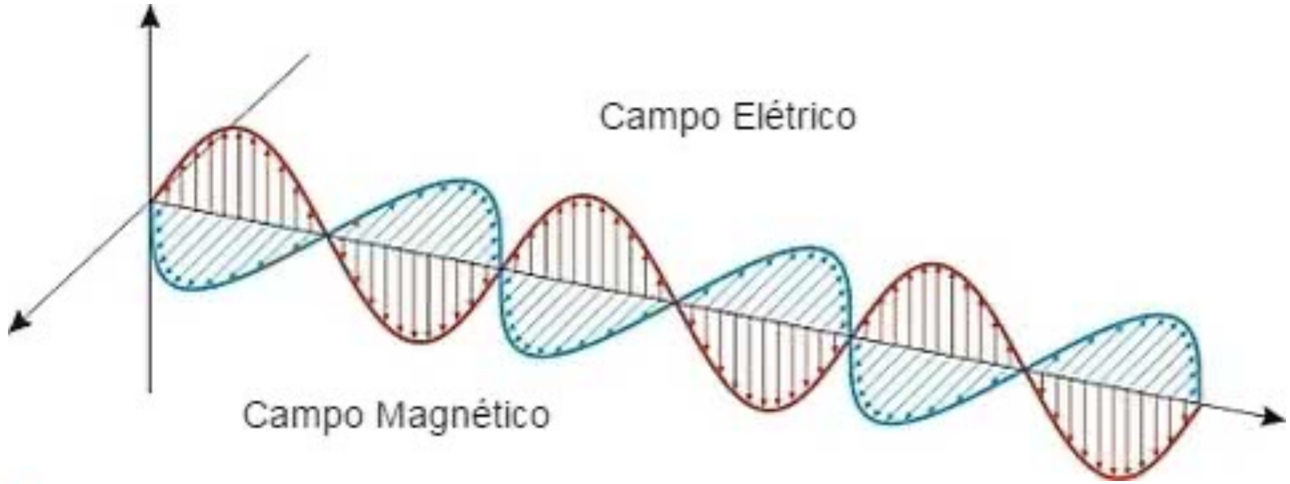
mas $(\hat{y}\, E_{0x} - \hat{x}\, E_{0y})\, k = \vec{B}_0\, \omega$

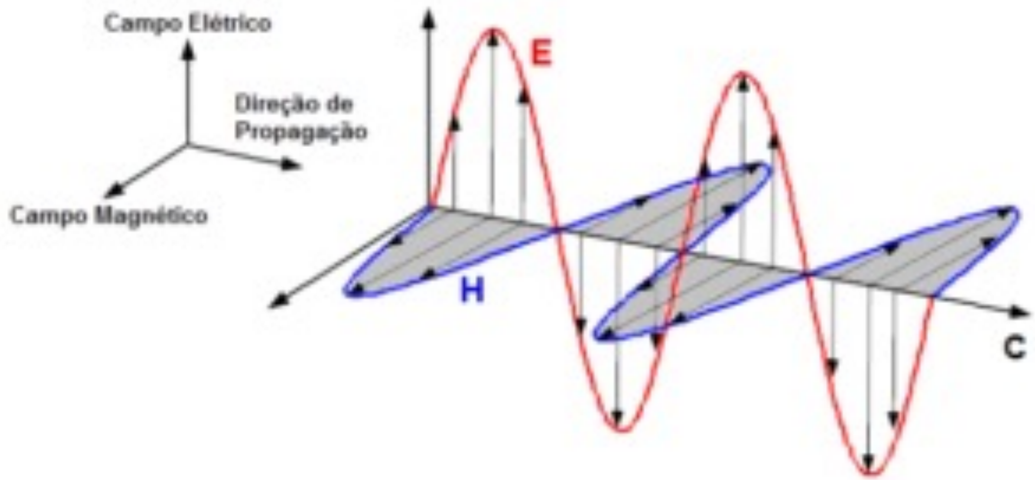
$$\hat{z} \times \vec{E}_0 = \vec{B}_0 \frac{\omega}{k}$$

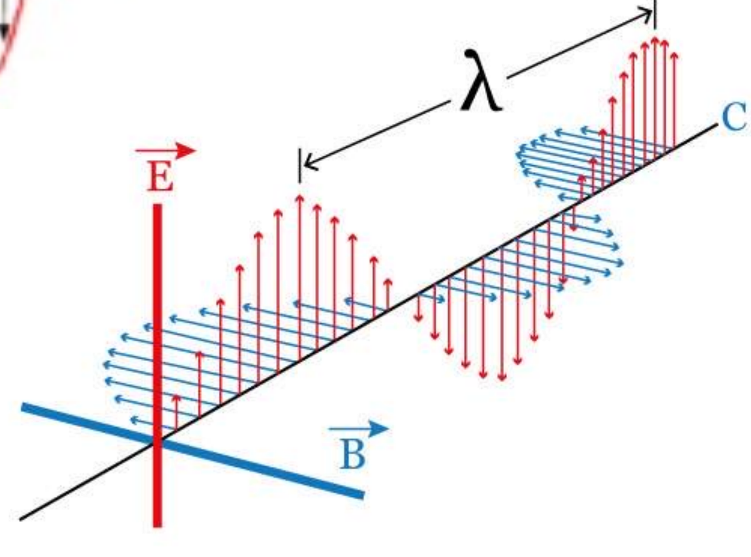
E_0 e B_0 são perpendiculares entre si !

E_0 e B_0 são perpendiculares à direção z !



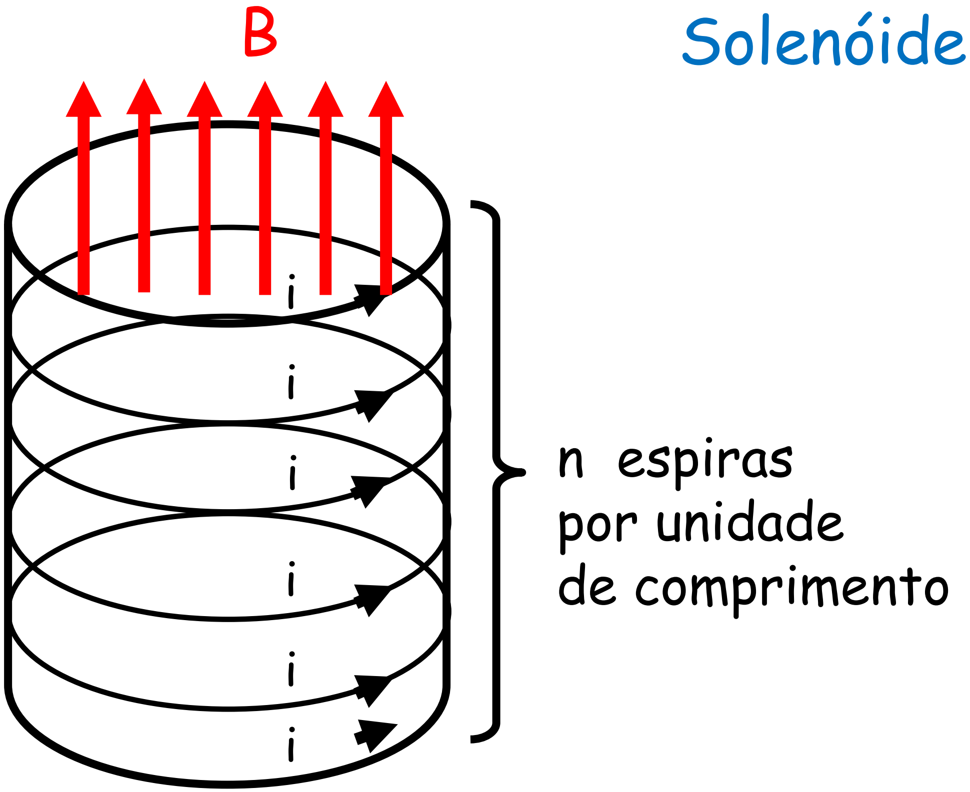

Campo Elétrico
Campo Magnético

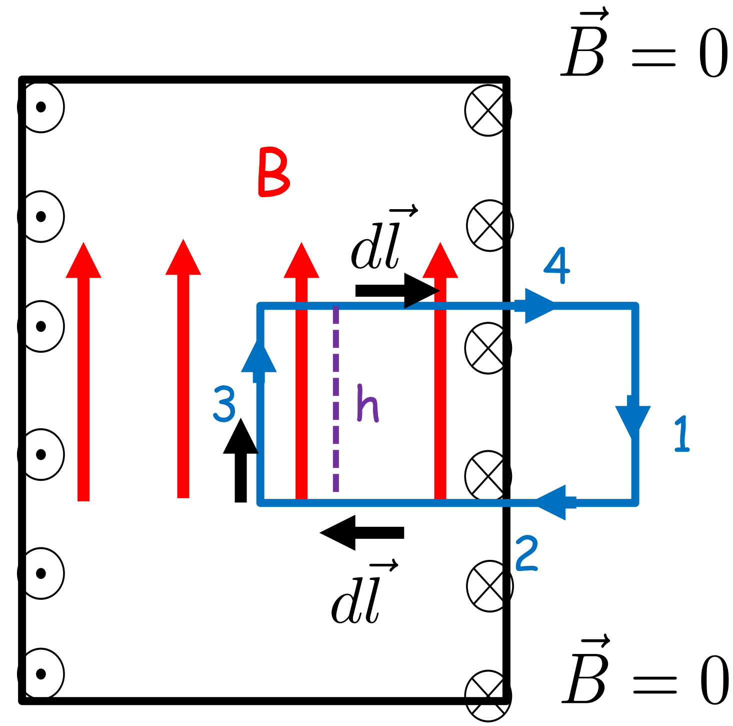

Campo Elétrico
Direção de Propagação
Campo Magnético
E
H
C


λ
C
E
B

Sobre a 2ª Prova

Solenóide





$$\oint_C \vec{B} \,.\, d\vec{l} = \mu_0 \, I_{in}$$

$$\oint_C \vec{B} \,.\, d\vec{l} = \int_1 \cancelto{0}{\vec{B}} \,.\, d\vec{l} + \int_2 \cancelto{0}{\vec{B}} \,.\, d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \,.\, d\vec{l} + \int_4 \cancelto{0}{\vec{B}} \,.\, d\vec{l}$$

$$\left.\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \,.\, d\vec{l} &= B\, h \\ I_{in} &= n\, h\, i \end{aligned}\right\} \qquad B\, h = \mu_0 \, n\, h\, i$$

$$\boxed{B = \mu_0 \, n\, i}$$

Solenóide

Energia acumulada no solenóide de comprimento h :

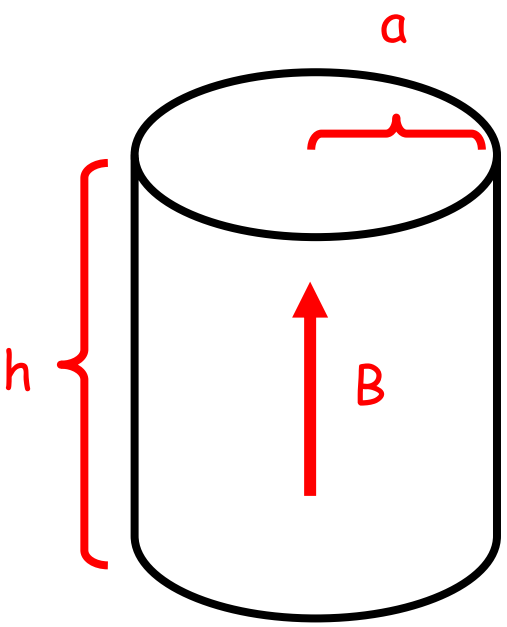
$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d^3 r$$

$$W = \frac{1}{2\,\mu_0} B^2 \int d^3 r$$

$$W = \frac{1}{2\,\mu_0} (\mu_0 \, n \, i)^2 \, \pi \, a^2 \, h$$

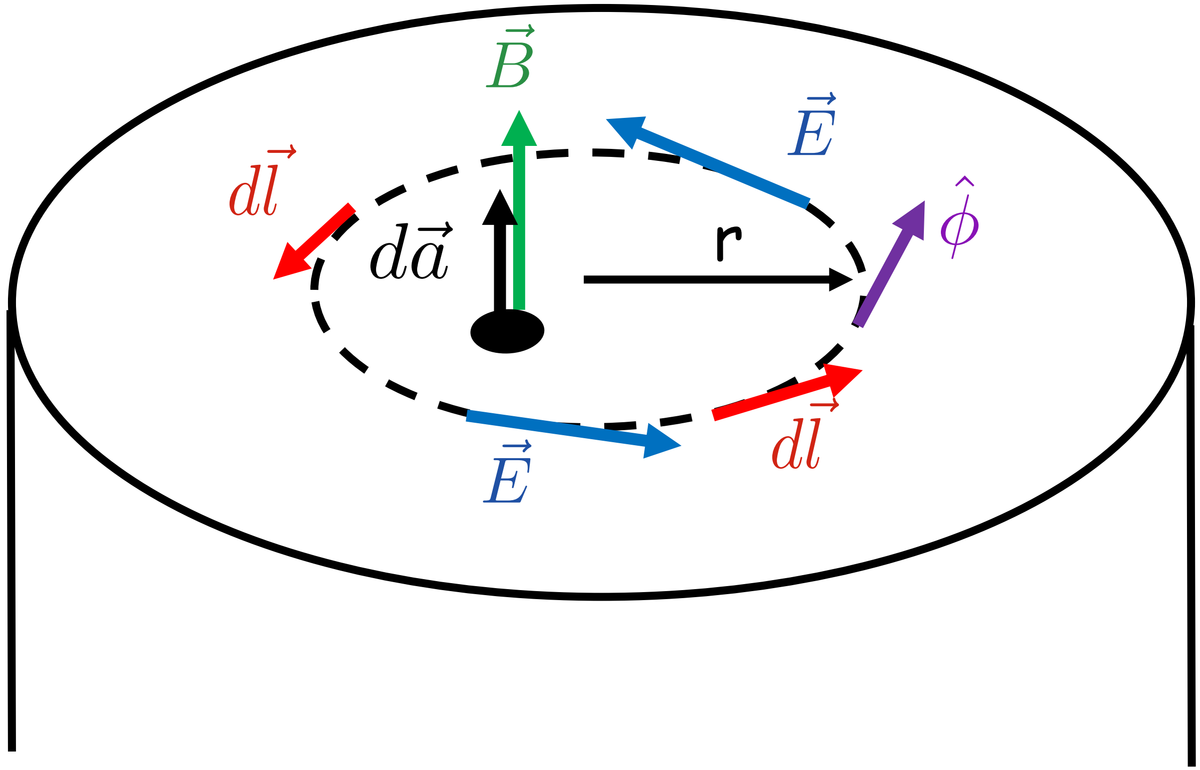
$$\boxed{W = \frac{1}{2} \pi \, \mu_0 \, n^2 \, a^2 \, h \, i^2}$$

$$W = \frac{1}{2} L \, I^2$$



$$\boxed{L = \pi \, \mu_0 \, n^2 \, a^2 \, h}$$

$$\oint_C \vec{E} \,.\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \,.\, d\vec{a}$$



$$2\,\pi\, r\, E = -\frac{d}{dt}\left(B\,\pi\, r^2\right)$$

$$E = -\frac{dB}{dt}\,\frac{r}{2}$$

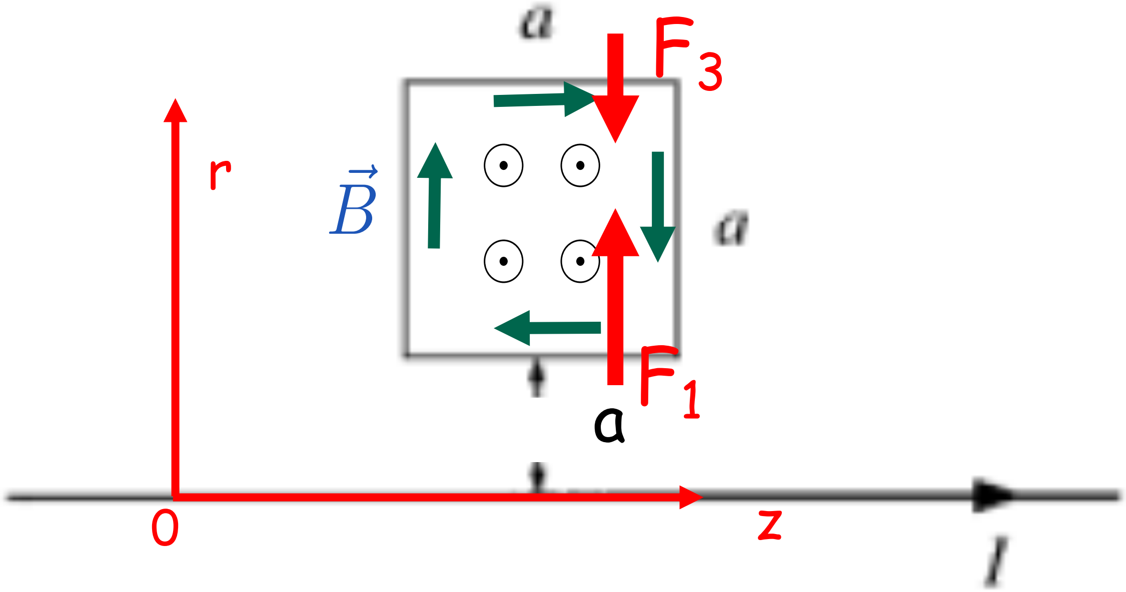
$$B = \mu_0\, n\, i$$

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0\, n\,\frac{di}{dt}$$

$$E = -\mu_0\, n\, b\,\frac{r}{2}$$

$$\frac{di}{dt} = b$$

$$\boxed{\vec{E} = -\mu_0\, n\, b\,\frac{r}{2}\,\hat{\phi}}$$



$$\epsilon = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0\, a}{2\,\pi}\, ln\, 2\, \frac{dI}{dt}$$

$$\epsilon = \frac{\mu_0\, a\, b}{2\,\pi}\, ln\, 2$$

$$\phi = \int B\, da \quad \begin{cases} da = dr\, dz \\ B = \dfrac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r} \end{cases}$$

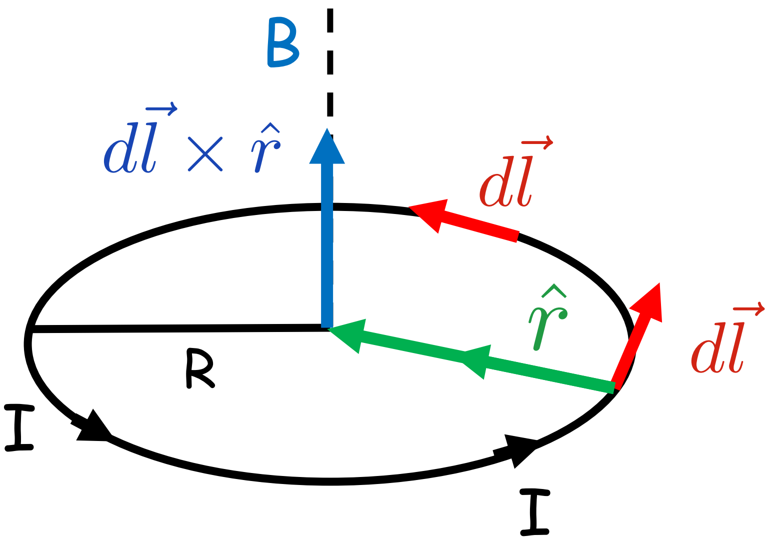
$$i = \frac{\epsilon}{R} = \frac{\mu_0\, a\, b}{2\,\pi\, R}\, ln\, 2$$

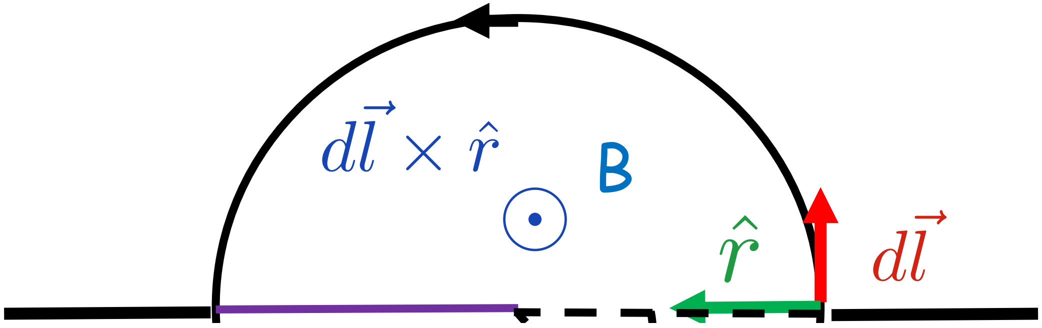
$$\phi = \int_0^a dz \int_a^{2a} dr\, \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}$$

$$F = i\, B\, L \quad \begin{cases} F_1 = i\, a\, \dfrac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, a} \\ F_3 = i\, a\, \dfrac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, 2\, a} \end{cases}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0\, I\, a}{2\,\pi}\, ln\, 2}$$

Espira vai para cima !





$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{4\,\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

O campo está na direção z

$$|d\vec{l} \times \hat{r}| = dl \qquad dl = R\, d\theta$$

$$r^2 = R^2$$

$$B = \frac{\mu_0 \, I}{4\,\pi} \int_0^{\pi} \frac{R\, d\theta}{R^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 \, I}{4\, R} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{4\, R} \, \hat{z}}$$