P01 Física Matemática 02

Q1. Seja $\mathbb{H}(2,\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes 2×2, com entradas nos complexos, tais que se $A \in \mathbb{H}(2,\mathbb{C})$, $A = A^\dagger$, ou seja

$$(A^\dagger)^j_i = \overline{A^i_j}.$$

(a) Verifique que $\mathbb{H}(2,\mathbb{C})$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ mas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Considere o conjunto $B = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ onde

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que B é uma base de $\mathbb{H}(2,\mathbb{C})$.

(c) Encontre os autovalores α_1, α_2 de σ_1 e os respectivos projetores espectrais E_1, E_2.

(d) Verifique que, de fato, a decomposição espectral para σ_1 é válida.

(e) Calcule

$$R(\theta) = e^{i\theta\sigma_1},$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.

Q2. Considere o espaço de Hilbert $l_2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ de sequências em $\mathbb{C}$ com a base canônica $B = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$, ou seja

$$e_1 = (1,0,0,...),\ e_2 = (0,1,0,...),\ e_3 = (0,0,1,0,...),\ etc,$$

e produto interno $\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl}$. Considere também o espaço vetorial $S(\mathbb{N},\mathbb{C})$ das sequências de números complexos. Vamos construir uma função linear $A : l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to S(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Inicialmente definimos A nos elementos da base B de $l_2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ por

$$A(e_n) = \sqrt{(n-1)}\ e_{n-1} \text{ para } n > 1,$$

$$A(e_1) = 0.$$

Por extensão linear, A estará definida para todo o $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. A função linear A pode ser pensada como uma matriz infinita e costuma ser chamada de operador linear. Usaremos então a notação Av para significar $A(v)$, $v \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

(a) Mostre que a imagem de A não está contida em $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. (Dica: Tome uma sequência de quadrado somável da forma $a_n = 1/n^{\alpha}$, α real, e escolha α tal que que sua imágem não seja de quadrado somável.)

(b) Podemos definir o operador adjunto $A^{\dagger}$ de maneira similar, definido primeiramente sua ação na base B através da equação

$$\left\langle A^{\dagger} e_n, e_m \right\rangle = \left\langle e_n, A e_m \right\rangle .$$

Determine $A^{\dagger} e_n$.

(c) Calcule

$$(AA^{\dagger} - A^{\dagger}A)e_n.$$

(d) Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, encontre as sequências $v(\lambda) = (v_1, v_2, v_3, ...) \in S(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, tais que

$$Av(\lambda) = \lambda v(\lambda).$$

Para que valores de λ temos $v(\lambda) \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$? Normalize $v(\lambda)$ tal que $||v|| = 1$. Em outras palavras, $v(\lambda)$ são autovetores de A

(e) Mostre que $A^{\dagger}$ não possui nenhum autovetor complexo! Isto seria possível para matrizes finitas com entradas em $\mathbb{C}$?

Q3. Neste exercício vamos considerar um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ genérico. Em outras palavras, algumas das propriedades de $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, vistas em sala de aula, podem não ser válidas.

(a) Seja $F = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ um conjunto ortonormal finito em $\mathcal{H}$ e $a_1, a_2, ..., a_n$ números complexos. Mostre que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

(b) Considere um conjunto infinito $B = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ ortonormal contável em $\mathcal{H}$. (Note que B não precisa ser uma base de $\mathcal{H}$.). Dado uma sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, ...)$ de números complexos, podemos definir um vetor

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_1, s_2, s_3, ...)$ converge em $\mathcal{H}$ se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

(Dica: defina as somas parciais $r_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$. Suponha que $(s_1, s_2, s_3, ...)$ converge e portanto é de Cauchy. Mostre a partir disto que a sequência $(r_1, r_2, r_3, ...)$ é de Cauchy.)