

# Radiações 3

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. Ricardo A. Terini  
E-mail: [rterini@if.usp.br](mailto:rterini@if.usp.br)

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105  
LDRFM – IF-USP

1

## Radiação de um dipolo magnético

**Recordando**

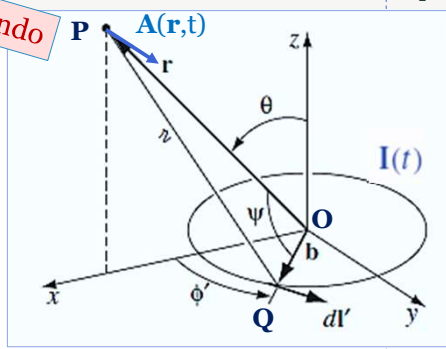
- ( $V = 0$ ), pois o fio não está carregado.

Na zona de radiação, ( $r \ll c/\omega$ ):

$$\therefore \mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}.$$

- Com  $\mathbf{A}$ , pode-se determinar  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  a grandes distâncias:

$$m_0 \equiv \pi b^2 I_0 \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}.$$


- $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  têm características ~ de ondas eletromagnéticas.
- Têm estrutura semelhantes aos dos dipolos elétricos, mas com **direções trocadas**.

2

## Radiação de um dipolo magnético

Recordando

- O fluxo de energia da radiação do dipolo magnético oscilante será:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{\mathbf{r}},$$

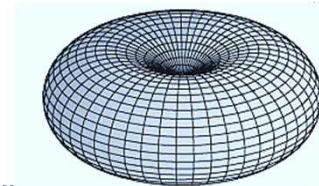
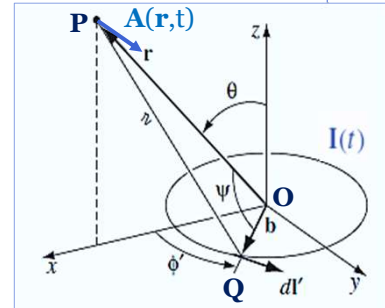
- A **intensidade** da radiação terá distribuição angular semelhante à do dipolo elétrico e será:

$$\therefore \langle S \rangle = \left( \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

- A **potência total** irradiada pelo dipolo é:

$$\rightarrow \langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}.$$

- A potência depende de  $\omega^4$  como no caso dos dipolos elétricos.



3

## Radiação de uma fonte arbitrária

Recordando

- Potenciais  $V$  e  $\mathbf{B}$  de uma fonte arbitrária:

$$V(\mathbf{r}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right].$$

$\therefore$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r}.$$

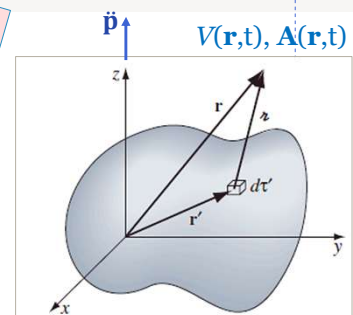
- Campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em coordenadas esféricas polares e com eixo  $z \parallel \ddot{\mathbf{p}}$ :

$$\therefore \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, t) &\cong \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \mathbf{B}(r, \theta, t) &\cong \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \right\}$$

Potência total irradiada:

$$P_{\text{rad}}(t_0) \cong \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2.$$

- $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$
- $\mathbf{E}, \mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{r}}$
- $\mathbf{E}/\mathbf{B} = c$

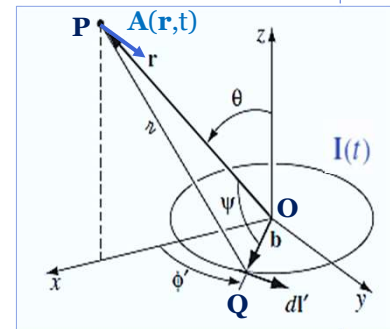


4

## Radiação de um dipolo magnético

### Exercício 3

- **(a)** Encontre a **resistência de radiação** para o dipolo magnético da figura.
- **(b)** Expresse sua resposta em termos de  $b$  e  $\lambda$  (o comprimento de onda da radiação).
- **(c)** Compare sua resposta com a resistência de radiação do dipolo elétrico e analise.

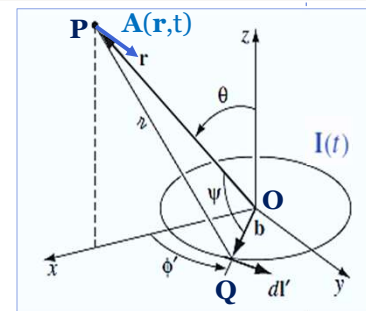


5

## Radiação de um dipolo magnético

### Exercício 3 (Resolução)

- **(a)** Encontre a **resistência de radiação** para o dipolo magnético da figura.
- **(b)** Expresse sua resposta em termos de  $b$  e  $\lambda$  (o comprimento de onda da radiação).
- **(c)** Compare sua resposta com a resistência de radiação do dipolo elétrico e analise.



• **(a), (b) e (c)**  $\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$  e  $m_0 \equiv \pi b^2 I_0$

•  $\therefore \langle P \rangle = \frac{\mu_0 \pi^2 b^4 I_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} = R_m \frac{I_0^2}{2} \rightarrow R_m = \frac{\mu_0 \pi^2 b^4 (2\pi c / \lambda)^4}{6\pi c^3} =$

•  $\therefore R_m = \frac{8\mu_0 \pi^6 c b^4}{3 \lambda^4} \cong 3,07 \cdot 10^5 \frac{b^4}{\lambda^4} (\Omega)$  e  $R_e = 790 \frac{d^2}{\lambda^2} (\Omega)$

6

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

- Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  produzidos por uma carga pontual em movimento são:

∴

Liénard-  
Wiechert

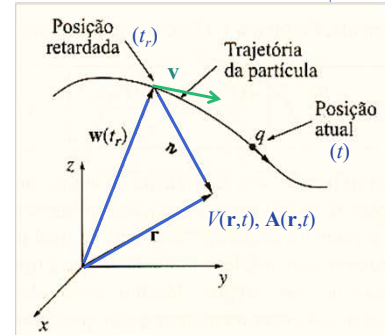


$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{z}}}{(z \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})].$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Campo de  
velocidade

Campo de  
aceleração



$$\mathbf{u} \equiv c \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{v}$$

- Para conhecer o *fluxo de energia*, vamos determinar o vetor de Poynting:

$$\therefore \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E})] = \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \hat{\mathbf{z}} - (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}]. \quad (\text{W/m}^2)$$

... lembrando que: (2)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

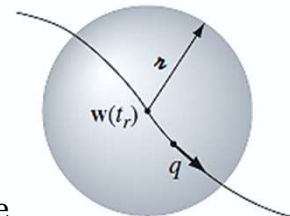
7

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

$$\therefore \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E})] = \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \hat{\mathbf{z}} - (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}]. \quad (\text{W/m}^2)$$

- Nem todo esse fluxo de energia constitui *radiação*; parte dela é apenas *energia do campo* transportado pela partícula enquanto se move.
- A energia irradiada é aquilo que, de fato, *se desprende da carga e se propaga até o infinito*.
- Para calcular a *potência total irradiada* pela partícula no instante  $t_r$ , *integramos* o vetor de Poynting sobre a superfície de uma enorme esfera de raio  $\mathcal{R}$  (Fig.), centrada na partícula (em  $t_r$ ), após um intervalo de tempo suficiente para que a radiação atinja a esfera:

$$t - t_r = \frac{\mathcal{R}}{c}$$



8

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

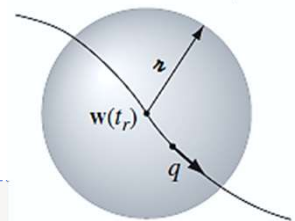
- A área da esfera é proporcional a  $r^2$ .
- Então qualquer termo em  $\mathbf{S}$  que varie com  $1/r^2$ , produzirá uma resposta finita.
- Termos que variam com  $1/r^3$  or  $1/r^4$  não contribuirão em nada no limite  $r \rightarrow \infty$ . Por isso, só *campos de aceleração* representam a radiação:

$$\longrightarrow \mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]$$

- Os campos de velocidade também transportam energia ao longo do movimento da partícula, *mas não irradiam*.

- $\mathbf{E}_{\text{rad}} \perp \hat{\mathbf{r}}$ , assim, o 2º. termo de  $\mathbf{S}$  se anula:

$$\therefore \mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{W/m}^2)$$



9

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

- No caso da partícula chegar instantaneamente ao repouso ( $\mathbf{v} = 0$  no instante  $t_r$ ), então:

$$\longrightarrow \mathbf{u} \equiv c \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v} = c \hat{\mathbf{r}}, \quad \therefore \mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a})] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{a}].$$

- Então: 
$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \right)^2 [a^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})^2] \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

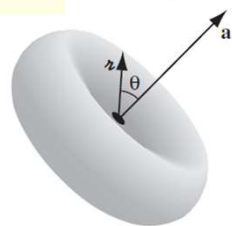
... onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{a}$ .

- Nenhuma potência é irradiada na direção frontal ou anterior do movimento ( $\text{sen } \theta = 0$ ). A *distribuição de intensidade* tem a forma de um "donut" em relação à direção da aceleração  $\mathbf{a}$ , como antes.

- A *potência total radiada e que cruza a casca esférica* é, então:

$$\frac{dW}{dt_r} = P = \oint \mathbf{S}_{\text{rad}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad \therefore P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}.$$

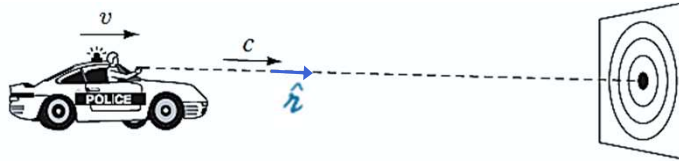
Essa é novamente a **Fórmula de Larmor.**



10

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

- Embora a dedução tenha sido feita para o caso em que a partícula vai ao repouso em  $t_r$  ( $v \rightarrow 0$ ), as expressões de  $\mathbf{S}_{\text{rad}}$  e  $\mathbf{P}$  são também uma boa aproximação sempre que  $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$ .
- Obs.: A taxa com que a energia atravessa a casca esférica não é a mesma com que ela é deixada pela partícula...
- Analogia:



- A taxa  $N_t$  de balas que atingem o alvo fixo é diferente da taxa  $N_g$  com que são emitidas pela arma, por conta do movimento do carro. De fato, para uma direção arbitrária:

$$N_g = \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) N_t$$

11

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

- Em nosso caso, se  $dW/dt$  for a taxa de energia que atravessa a casca esférica de raio  $r$ , então a taxa de emissão de energia pela carga era:

$$\therefore P_{\text{emitida}} \frac{dW}{dt_r} = \frac{dW/dt}{\partial t_r / \partial t} = \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc}\right) \frac{dW}{dt} P_{\text{recebida}} \quad \begin{array}{l} \text{(no instante } t_r, \\ \text{sendo... } t - t_r = \frac{r}{c} \end{array}$$

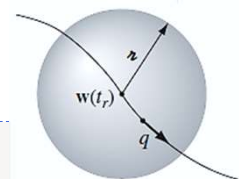
... Mostra-se que  $\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{rc}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}$ . (checar). Mas,  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}}{c}$ ,

... igual ao fator geométrico (devido ao *Ef. Doppler*) da analogia anterior...

- A potência radiada pela partícula e que cruza a área  $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega$  da casca (por unidade de ângulo sólido) será:

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 \hat{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc}\right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 r^2$$

...onde  $d\Omega$  é o ângulo sólido dentro do qual a energia é radiada.



12

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

• Ou seja: 
$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{z \cdot \mathbf{u}}{zc}\right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 z^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u})^5},$$

... já que

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z \cdot \mathbf{u})^3} [z \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})].$$

• Integrando  $E_{\text{rad}}$  em  $\theta$  e  $\phi$  para obter a potência total irradiada pela carga, no caso, obtemos:

...  $\therefore \rightarrow P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right)$  onde  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

(Generalização de Liénard para a fórmula de Larmor)

Então, a fórmula de *Larmor* pode ser obtida da expressão de Liénard no limite de baixas energias ( $v \ll c$ ).

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

### • Aplicação 1:

• Supor que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  são *colineares*, num movimento reto.

Determine a distribuição angular da emissão de radiação e a potência total emitida.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{z \cdot \mathbf{u}}{zc}\right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 z^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u})^5},$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right)$$

• Nesse caso:  $\mathbf{u} \equiv c \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{v}$ ,  $\therefore (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = c(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a})$ ,

• Então: 
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a})|^2}{(c - \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v})^5}.$$

• Como  $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a}) = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{a}) \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{a}$ ,  $\rightarrow |\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a})|^2 = a^2 - (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{a})^2$ .

• Então, se  $\mathbf{v} // \mathbf{z}$ , teremos:

$$\rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \text{ com } \beta = v/c$$

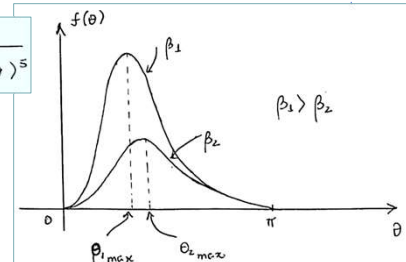
## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

15

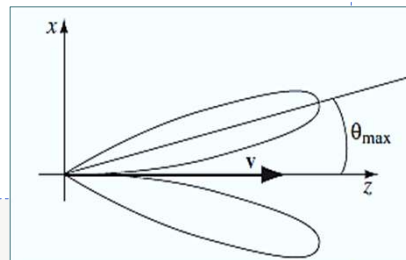
### • Aplicação 1:

- Supor que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  são *colineares*, num movimento reto. Determine a distribuição angular da emissão de radiação e a potência total emitida.
- Nesse caso, o fator no denominador “estica” o padrão de irradiação em forma de *donut*, e o *empurra* para frente (fig.)...
- Ainda não há radiação na direção frontal, mas a radiação se espalha como uma espécie de “cone” estreito em volta de  $\mathbf{v}$ .

$$f(\theta) \equiv \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$



15

## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

16

### • Aplicação 1:

- Supor que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  são *colineares*, num movimento reto. Determine a distribuição angular da emissão de radiação e a potência total emitida.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}}{rc}\right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 r^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u})^5}$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right)$$

- A potência total emitida em todos os ângulos, será:

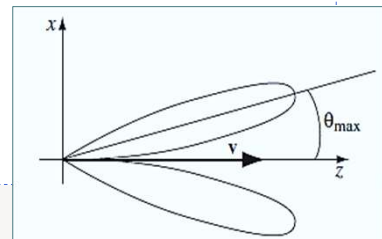
$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\phi.$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

- Usando substituições e integrando por partes:...

$$\rightarrow P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \quad (\text{Consistente c/ a fórmula de Liénard})$$

- Esses resultados valem tanto para *aceleração* quanto p/ *desaceleração*.
- É, na essência, a teoria clássica do *Bremsstrahlung*...



16



## Potência irradiada por uma carga pontual em movimento

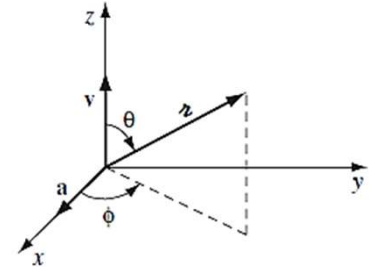
### Exercício 4

Faça a mesma análise anterior (Aplic. 1) para o caso em que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  são perpendiculares. Escolha seus eixos de modo que  $\mathbf{v}$  esteja ao longo do eixo  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{a}$  ao longo do eixo  $\mathbf{x}$  (Fig.), de modo que:

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{a} = a \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{e}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}.$$

- **(a)** Determine a distribuição angular da emissão de radiação e a potência total emitida.
- **(b)** Verifique se a expressão obtida de  $P$  é coerente com a fórmula de Liénard.



Respostas:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}.$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{[(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi]}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$