

UTILIZAÇÃO PRÁTICA DE TENSORES DE DEFORMAÇÃO: CÁLCULOS DE EXTENSÃO E ENCURTAMENTO A PARTIR DE MEDIDAS DE STRAIN

Ginaldo A. da C. Campanha

Instituto de Geociências da USP

RESUMO

A análise da deformação na sua forma mais geral é uma tarefa matematicamente complexa e laboriosa. Algumas abordagens diferentes para a questão têm sido adotadas na literatura. Um caminho é o adotado por diversos autores de grande influência no meio da geologia estrutural, que é o de evitar o desenvolvimento matemático do assunto por meio de matrizes e tensores, preferindo o desmembramento em equações algébricas usuais. Este tipo de abordagem tem sido bem sucedido quando se adota algumas simplificações ou casos especiais. Como por exemplo, a restrição da análise a uma situação bidimensional, à qual a deformação em três dimensões pode ser reduzida quando um dos eixos principais não sofre deformação (caso em geral denominado como deformação plana, tal como o cisalhamento simples e o cisalhamento puro), ou quando duas deformações principais são iguais (deformação bi-axial). Outra simplificação usualmente feita é adotar-se um sistema de referência paralelo aos eixos principais de deformação, eliminando-se assim a componente de rotação desses eixos. As equações do círculo de Mohr por exemplo adotam este último tipo de pressuposto. Porém, quando se procura analisar a deformação em três dimensões, sem este tipo de restrição, a ferramenta matemática mais adequada é o uso de matrizes e tensores. No presente trabalho mostra-se como aplicar tensores de deformação a partir de dados geológicos, como medidas de strain e atitudes de direções principais de deformação, para manipulações diversas, como cálculos da extensão / encurtamento numa determinada direção. Como exemplo utilizou-se dados de strain anteriormente disponíveis na seção geológica de Apiaí a Iporanga (SP) para cálculos de encurtamento crustal e variação de volume ao longo dessa seção. As planilhas e rotinas foram desenvolvidas com o programa *Mathcad Professional* versão 8, e estão disponíveis em www.igc.usp.br/pessoais/ginaldo.

1. INTRODUÇÃO

A análise da deformação na sua forma mais geral é uma tarefa matematicamente complexa e laboriosa. Algumas abordagens diferentes para a questão têm sido adotadas na literatura.

Um caminho é o adotado por livros como Ramsay (1967) e Jaeger (1969), de grande influência no meio da geologia estrutural, que é o de evitar o desenvolvimento matemático do assunto por meio de matrizes e tensores, preferindo o desmembramento em equações algébricas usuais. A vantagem desta abordagem é que não exige um embasamento matemático do leitor maior do que é dado ao nos primeiros anos dos cursos de graduação na área de ciências exatas. Este tipo de abordagem tem sido bem sucedido quando se adota algumas simplificações ou casos especiais. Como por exemplo, a restrição da análise a uma situação bidimensional, à qual a deformação em três dimensões pode ser reduzida quando um dos eixos principais não sofre deformação (caso em geral denominado como deformação plana, tal como o cisalhamento simples e o cisalhamento puro), ou quando duas deformações principais são iguais (deformação bi-axial). Outra simplificação usualmente feita é adotar-se um sistema de referência paralelo aos eixos principais de deformação, eliminando-se assim a componente de rotação desses eixos. As equações do círculo de Mohr por exemplo adotam este tipo de pressuposto.

Porém, quando se procura analisar a deformação em três dimensões, sem este tipo de restrição, torna-se necessário manipular sistemas com até dezenas de equações, com até dezenas de termos cada uma, dificultando ou mesmo inviabilizando a análise. Neste caso a ferramenta matemática mais adequada é o uso de matrizes e tensores e, no caso ainda mais complexo da deformação heterogênea, o cálculo tensorial (cálculo diferencial e integral aplicado para matrizes e tensores). Este é o caminho adotado por exemplo por Nye (1957), Means (1976), Oertel (1996), Ramsay & Lisle (2000) e, em um nível mais avançado, por Malvern(1969) e Truesdell & Toupin (1960).

Antes do advento dos computadores, as ferramentas matemáticas do cálculo tensorial eram de relativa pouca aplicação prática, em função do caráter extremamente laborioso das operações necessárias, envolvendo procedimentos como multiplicação e inversão de matrizes, cálculo de autovalores e autovetores, etc.

Com um microcomputador disponível, mesmo que antigo e pouco potente, estas tarefas tornam-se viáveis. Em qualquer linguagem de programação, e mesmo com planilhas eletrônicas, fazer operações com matrizes e cálculos repetitivos é relativamente simples. Existem ainda ferramentas mais fáceis de serem utilizadas, como aqueles programas voltados especificamente à realização de cálculos e modelagens matemáticas. No presente caso desenvolveu-se planilhas e rotinas com o programa *Mathcad Professional* versão 8, disponível na USP.

2. Análise tensorial de deformação

O desenvolvimento que se fará em seguida pode ser referenciado basicamente ao livro de Malvern (1969), porém com o apoio dos livros mais "básicos" de Means (1976), Nye (1957) e Oertel (1996).

A deformação finita é definida pela comparação da forma geométrica dos corpos em dois estados: um inicial, antes da deformação, e outro final, após a deformação.

Uma deformação genérica pode ser decomposta em termos de quatro componentes:

- Translação de corpo rígido
- Rotação de corpo rígido
- Distorção de forma
- Variação de volume

Para sua especificação, definimos um sistema triortogonal de eixos (x_1, x_2, x_3) ao invés da notação mais tradicional de (x, y, z) .

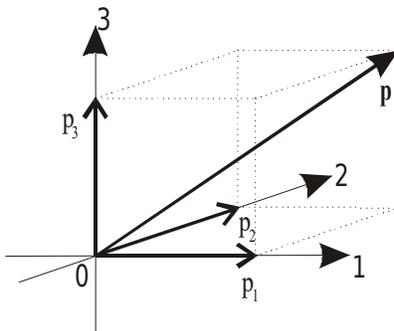


Figura 1 Sistema de referência adotado, com três eixos cartesianos $O1, O2, O3$.

onde a posição de um determinado ponto é definida pelo seu vetor posição \mathbf{p} ,

e seus componentes nestes eixos: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$. Usaremos símbolos em negrito para denotar vetores, matrizes e tensores, e símbolos normais para denotar escalares, inclusive os componentes de matrizes, vetores e tensores.

A deformação pode ser analisada pela variação dos vetores posição entre os estados inicial e final. Usaremos letras maiúsculas para o estado inicial, indeformado, e minúsculas para o estado final, deformado. Por simplicidade, ilustra-se abaixo em duas dimensões.

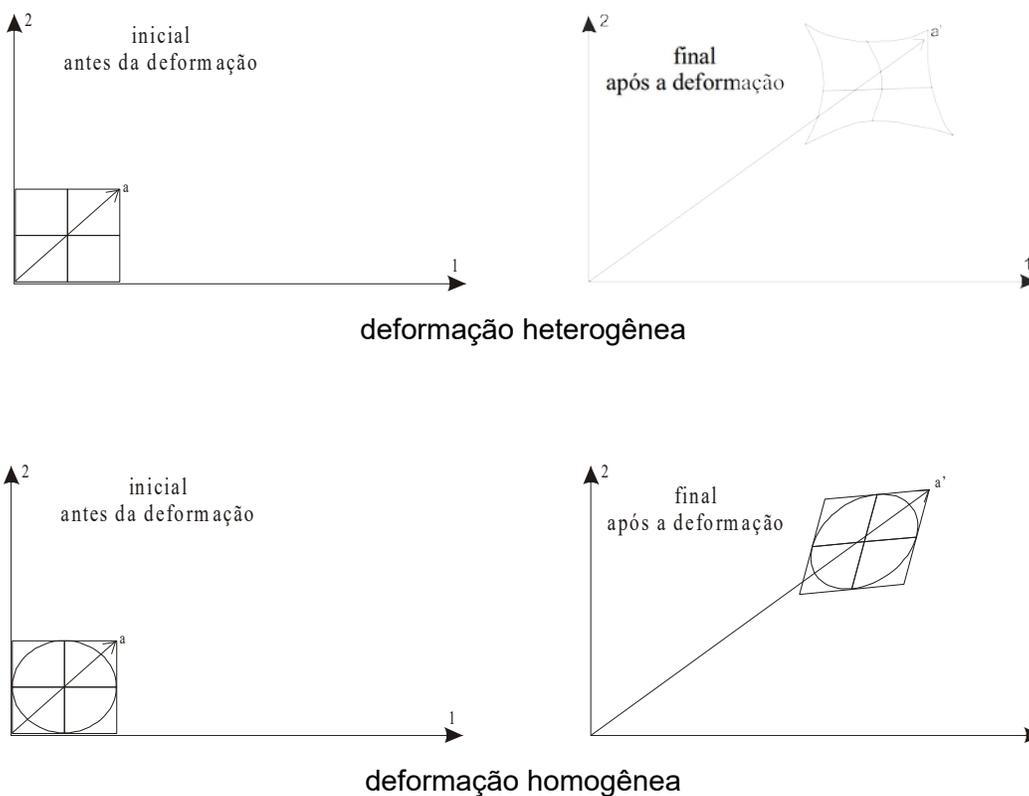


Figura 2 Ilustração da deformação como a variação da posição dos pontos que compõem o continuum de um corpo, antes e depois da deformação.

Pode-se discriminar as posições finais dos pontos que compõem o *continuum* dos corpos, em termos de suas posições finais (x_1, x_2, x_3) em função de suas posições iniciais (X_1, X_2, X_3) :

$$x_1 = F_1(X_1, X_2, X_3)$$

$$x_2 = F_2(X_1, X_2, X_3)$$

$$x_3 = F_3(X_1, X_2, X_3)$$

Na deformação homogênea, $F_1()$, $F_2()$, $F_3()$ serão equações lineares, na forma geral:

$$x_1 = aX_1 + bX_2 + cX_3 + t_1$$

$$x_2 = dX_1 + eX_2 + fX_3 + t_2$$

$$x_3 = gX_1 + hX_2 + iX_3 + t_3$$

onde t_1 , t_2 , t_3 são componentes de translação ao longo dos eixos 1, 2, 3 e poderão normalmente ser desprezados.

As equações acima podem ser, então, escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

E de forma compacta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} \quad (2)$$

Com os símbolos em negrito representando as matrizes.

Também é possível reescrevê-la segundo a notação indicial, onde estão representados os componentes de cada matriz:

$$x_i = F_{ij} \cdot X_j \quad (3)$$

onde os índices indicam a posição do componente nas matrizes (i sendo a linha, j sendo a coluna, ambos variando de 1, 2, 3). A repetição de um índice no mesmo termo (no caso j), significa soma com relação a esse índice.

A matriz **F**, chamada matriz de transformação, representa a deformação, e será no caso genérico assimétrica.

Caso um estado de deformação representado pela matriz de transformação **F** seja considerado o resultado da sobreposição de duas deformações, representadas pelas matrizes **F1** (primeira deformação) e **F2** (segunda deformação), a matriz **F** resultante será dada pela multiplicação:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F2} \cdot \mathbf{F1}$$

Lembrando sempre que a multiplicação matricial é uma operação não comutativa, e portanto a ordem dos fatores deve ser sempre estritamente observada.

Como conseqüência, a sobreposição de duas deformações também será uma operação não comutativa:

$$\mathbf{F1} \cdot \mathbf{F2} \neq \mathbf{F2} \cdot \mathbf{F1}$$

A variação de volume F_v associada à deformação pode ser calculada pelo determinante de **F**:

$$F_v = \frac{V_F}{V_I} = \det \mathbf{F} \quad (4)$$

onde V_F é o volume final e V_I é o volume inicial.

Notar que o fator volumétrico aqui usado é

$$F_v = V_F/V_I$$

enquanto que a variação volumétrica (dilatação) ΔV utilizada por Ramsay é

$$\Delta V = (V_F - V_I)/V_I \quad (5)$$

e portanto

$$F_V = \Delta V + 1 \quad (6)$$

Como o volume final V_F não pode ser zero, nem infinito, e nem um corpo material pode ser invertido especularmente, devemos ter que $\infty > \det \mathbf{F} > 0$.

A componente simétrica, não rotacional da deformação, incluindo a distorção de forma e a variação de volume, pode ser obtida por diversos procedimentos.

Define-se por exemplo o *Tensor de Green* \mathbf{C} pela relação:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (7)$$

onde \mathbf{F}^T é a matriz transposta de \mathbf{F} .

A matriz \mathbf{C} fornece a elongação quadrática λ de uma linha na direção de um vetor unitário com orientação $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$, no estado inicial indeformado, pela relação matricial:

$$\lambda = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \quad (8)$$

sendo

$$\lambda = \left(\frac{l_F}{l_i} \right)^2 \quad (9)$$

onde l_i é o comprimento inicial da linha e l_F é o comprimento final.

Os autovetores de \mathbf{C} fornecem as orientações das linhas que compõem os eixos principais de deformação no estado indeformado, e os seus autovalores fornecerão as elongações quadráticas principais ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) associadas a esses eixos.

Define-se também o *Tensor de Cauchy* \mathbf{c} (minúsculo) pela relação

$$\mathbf{c} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (10)$$

onde \mathbf{F}^{-1} indica a matriz inversa de \mathbf{F} .

A matriz \mathbf{c} fornece a elongação quadrática recíproca λ' ($1/\lambda$) de uma linha na direção de um vetor unitário com orientação $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, no estado final deformado, pela relação matricial:

$$\lambda' = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad (11)$$

Os autovetores de \mathbf{c} fornecem as orientações das linhas que compõem os eixos principais de deformação no estado deformado, e os seus autovalores fornecerão as elongações quadráticas recíprocas principais ($1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$, $1/\lambda_3$) associadas a esses eixos.

As matrizes (tensores) \mathbf{C} e \mathbf{c} descrevem o componente simétrico, não rotacional da deformação, denominado de *strain* pela maioria dos autores.

É conveniente neste momento a definição dos tensores de extensão (*stretch*).

Dada uma matriz \mathbf{F} , assimétrica, representando uma deformação geral, esta pode ser decomposta como se segue:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (12)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz de transformação denotando uma rotação de corpo rígido. \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes de transformação simétricas positivas, denominadas tensor de extensão direito (\mathbf{U}) e tensor de extensão esquerdo (\mathbf{V}).

O tensor de extensão direito está associado ao estado indeformado e pode ser assim obtido:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}} \quad (13)$$

entendendo-se como raiz de \mathbf{C} uma matriz tal que:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{C}$$

O tensor de extensão esquerdo está associado ao estado deformado, e é definido como:

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{c}^{-1}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T} \quad (14)$$

O tensor \mathbf{V} terá os mesmos autovetores que \mathbf{c} , que serão os eixos principais de deformação no estado final. Porém seus autovalores fornecerão as extensões

principais (S_1, S_2, S_3), que correspondem ao tamanho dos semi-eixos do elipsóide de deformação, sendo a extensão S definida como

$$S = \left(\frac{l_F}{l_i} \right) \quad (15)$$

Os valores de S tomados em todas as direções definem o elipsóide de deformação finita. É comum na literatura geológica denominar-se as direções principais (eixos principais do elipsóide) de deformação como X, Y, Z , associados respectivamente às extensões principais maior, intermediária e menor.

Os vários formatos de elipsóides podem ser representados pelo Diagrama de Flinn, onde define-se um fator de forma K tal que:

$$K = (S_1/S_2 - 1) / (S_2/S_3 - 1) \quad (16)$$

Similarmente, os autovalores de \mathbf{U} fornecerão as extensões principais recíprocas, ou seja, os comprimentos dos semi-eixos do elipsóide de deformação recíproca. Os seus autovetores fornecerão os eixos principais do elipsóide de deformação recíproca, ou seja, as orientações dos eixos principais de deformação no estado indeformado. Os eixos obtidos serão os mesmos que aqueles calculados a partir do tensor de Green (\mathbf{C}).

A matriz \mathbf{R} representa uma de transformação que produz a rotação das linhas que compõem os eixos principais de deformação, entre o estado inicial, antes da deformação, e o final, após a deformação.

Caso a deformação seja não-rotacional, ou seja, os eixos principais tenham a mesma orientação antes e depois da deformação, \mathbf{R} será a matriz unitária, e $\mathbf{F}=\mathbf{V}$.

A matriz de rotação \mathbf{R} pode ser dada em função de \mathbf{F} :

$$\mathbf{R}=\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (17)$$

Onde \mathbf{V}^{-1} seria a matriz inversa de \mathbf{V} .

A matriz \mathbf{R} indica uma rotação dos eixos principais de um ângulo ω em torno de uma linha representada por um vetor unitário l_i , de tal modo que (Oertel, 1996):

$$\begin{aligned} \cos(\omega) &= \frac{(R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1)}{2} \\ I_1 &= \frac{(R_{23} - R_{32})}{2 \cdot \sin(\omega)} \\ I_2 &= \frac{(R_{31} - R_{13})}{2 \cdot \sin(\omega)} \\ I_3 &= \frac{(R_{12} - R_{21})}{2 \cdot \sin(\omega)} \end{aligned} \quad (18)$$

A vantagem dos tensores \mathbf{V} e \mathbf{R} é que estes constituem também matrizes de transformação (o que não acontece por exemplo com \mathbf{C} ou \mathbf{c}). Como tais, podem ser multiplicados por outras matrizes de transformação, para a representação de deformações e/ou rotações sucessivas.

Porém o seguinte fato deve ser levado em consideração. Se tivermos dois tensores simétricos de extensão, $\mathbf{V1}$ e $\mathbf{V2}$, porém com orientações distintas dos seus eixos principais, a matriz resultado da sobreposição dos dois

$$\mathbf{F} = \mathbf{V2} \cdot \mathbf{V1}$$

será no caso geral novamente assimétrica, com uma componente de *strain*, e uma componente de rotação.

Deve ser notado também que numa matriz simétrica \mathbf{V} representando uma deformação não rotacional, fornecerá um elipsóide de deformação com os eixos principais não obrigatoriamente paralelos ao sistema de referência adotado (o caráter rotacional de uma deformação é indicado pela rotação das linhas que compõem os eixos de deformação, do estado inicial para o final, e não pela orientação dos eixos principais com relação aos eixos do sistema de referência).

Assim, se \mathbf{V} representa uma deformação com eixos principais paralelos ao sistema de referência, a matriz será diagonal:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde os componentes V_1, V_2, V_3 representam as extensões principais (S_1, S_2, S_3) do elipsóide de deformação, orientados respectivamente ao longo dos eixos de referência 1, 2, 3.

Similarmente, pode ser montado o tensor de Cauchy referido para as direções principais de deformação:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} (1/S_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1/S_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1/S_3)^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Todas as equações derivadas da matriz (20) serão simplificadas com relação ao caso geral (eq. 10).

Por exemplo, a aplicação da equação (11) utilizando-se a matriz de (20) fornecerá a equação bem conhecida:

$$\lambda' = l^2\lambda'_1 + m^2\lambda'_2 + n^2\lambda'_3 \quad (21)$$

onde (l, m, n) são os cossenos diretores de uma linha no estado deformado.

Em duas dimensões, esta se reduzirá ainda a:

$$\lambda' = \cos^2(\phi')\lambda'_1 + \sin^2(\phi')\lambda'_2 \quad (22)$$

onde ϕ' é o ângulo que a linha no estado deformado faz com o eixo maior de deformação.

A diferença entre as equações (10) e (20) refere-se apenas a uma mudança (uma rotação) dos eixos de referência, que teriam a mesma origem, porém orientações distintas. Portanto é uma diferença arbitrária, sem significado físico, já que trata-se apenas de uma escolha de sistema de referência. Os autovalores de \mathbf{c} (elongações quadráticas recíprocas principais) serão os mesmos em ambos os casos, e os autovetores (direções principais) serão as mesmas linhas, embora referidas para eixos diferentes.

Já a rotação das equações (12), (17) e (18) é uma rotação real das linhas materiais que compõem os eixos principais de deformação, entre o estado inicial e o final, e como tal tem significado físico.

3. Tensores de deformação recalculados para as orientações geográficas

Como um dos objetivos da obtenção de dados de *strain* é realizar sua integração sobre uma determinada região, é interessante referir-se o tensor de extensão para as orientações geográficas. Por exemplo, adotaremos aqui o eixo de referência x_1 no sentido positivo orientado para o leste, o x_2 para o norte, e o x_3 vertical para cima.

Na prática, dispondo-se dos valores principais de extensão e suas orientações, obtidas a partir de medidas de *strain*, pode-se montar uma matriz \mathbf{V}_0 com os valores principais de extensão na diagonal principal. Esta matriz representa o tensor de extensão no estado deformado, porém com relação a um sistema de referência cujos eixos são os próprios eixos principais do elipsóide.

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Para referir-se as extensões para o sistema geográfico, é necessário fazer-se uma rotação dos eixos de referência (transformação de coordenadas para tensores de segunda ordem), na qual usar-se-á as orientações dos eixos principais de deformação obtidos, descritas como cossenos diretores com relação ao sistema geográfico.

Os cossenos diretores de uma linha podem ser calculados a partir do seu azimute e de seu caimento (*plunge*), no sistema de referência aqui adotado, pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} l &= \cos(\text{plunge}) \cdot \text{sen}(\text{azimute}) \\ m &= \cos(\text{plunge}) \cdot \cos(\text{azimute}) \\ n &= \text{sen}(\text{plunge}) \end{aligned} \quad (24)$$

Deve-se então calcular e montar uma matriz de transformação com os cossenos diretores (l,m,n) das direções principais do elipsóide de deformação obtidas por medidas *strain*,:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde os subscritos indicam os eixos principais de deformação 1, 2, 3.

O tensor de extensão \mathbf{V}_G referido ao sistema geográfico será, pela regra da transformação de tensores de segunda ordem (Nye, 1957):

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{A}^T \quad (26)$$

O qual terá os mesmos autovalores (extensões principais) que \mathbf{V}_0 , e seus autovetores darão as orientações dos eixos principais de deformação com relação às direções geográficas.

Na tabela 1 mostra-se um exemplo dos resultados da aplicação desses cálculos, para uma das amostras analisadas, realizados com o programa MathCad.

PONTO	AP001		
Tensor de Extensão referido aos eixos principais de deformação (\mathbf{V}_0)			
X	1.46	0	0
Y	0	1	0
Z	0	0	0.64
Atitudes dos eixos principais de deformação finita			
	X	Y	Z
X Rumo	258	114	359
Merg	32	52	19
Matriz de transformação para sistema geográfico (\mathbf{A})			
	X	Y	Z
l	-0.82952	0.562435	-0.0165
m	-0.17632	-0.25041	0.945375
n	-0.52992	-0.78801	-0.32557

	1	1	1
Tensor de Extensão referidos para o sistema geográfico (V_G)			
	1.321	0.063	0.202
	0.063	0.68	0.137
	0.202	0.137	1.099

Tabela 1 Resultados para o cálculo do tensor de extensão para o ponto AP001.

A partir dos tensores de extensão assim referidos, podem ser feitas diversas outras manipulações, como cálculos da extensão numa determinada direção, da elipse de deformação para um plano determinado (por ex., o plano horizontal, ou o plano vertical NS).

Como exemplo calculou-se as extensões horizontais ao longo da direção NW, de modo que se pudesse comparar com os valores obtidos a partir do perfil geológico.

A alongação quadrática recíproca de uma linha pode ser obtida pela equação (11), e o tensor \mathbf{c} da equação (20), rotacionando a matriz \mathbf{c} do mesmo modo como mostrado acima para a matriz \mathbf{V} . A extensão é então obtida pela raiz quadrada do inverso da alongação quadrática recíproca.

PONTO	AP001	AP65B	AP117	IP060B	IP064G	IP071C	IP253B	IP808B
unidade	S.Boa Vista	S.Boa Vista	S.Boa Vista	Betari	Betari	B. da Serra	S.Boa Vista	B. da Serra
$F_v (S_2=1)$	0.934	0.983	1.096	1.006	1.285	0.994	0.93	0.986
$S_{135/00}$	0.801	1.001	0.924	0.813	0.881	0.992	1.035	0.745
PONTO	IP928	IP931	ME004	P26	IP939B	IP538	F198	
unidade	B. da Serra	M. Furnas	Gorutuba	B. da Serra	Iporanga	Ribeira	Ribeira	
$F_v (S_2=1)$	1.104	1.256	0.924	1.183	2.754	0.651	0.435	
$S_{135/00}$	1.067	0.958	0.764	0.753	0.724	0.275	0.502	

Tabela 2 - Resultados do cálculo da extensão de uma linha com orientação no estado deformado NW horizontal (135/00). e variação de volume (F_v) admitindo-se $S_2 = 1$.

Analisando-se o perfil geológico NW em 1:50.000 através da área (Campanha, 1991) no tocante ao comprimento das camadas dobradas *versus* o comprimento do perfil, para várias unidades estratigráficas, e não considerando a deformação interna das camadas, foram obtidos valores de encurtamento mostrados na Tabela 3. Estes valores são compatíveis com as extensões obtidas a partir de análise de *strain* em amostras dessas unidades (Tabela 2).

	l_1 (km)	l_0 (km)	$S = l_1/l_0$	$\lambda = (l_1/l_0)^2$	$e = (l_1-l_0)/l_0$
Subgrupo Lajeado					
Fm. Betari	9.4	12.2	0.77	0.59	-0.23
Fm. Bairro da Serra	10.2	14.0	0.73	0.53	-0.27
Fm. Mina de Furnas	18.5	22.6	0.82	0.67	-0.18
Subgrupo Ribeira	7.5	22.1	0.34	0.11	-0.66

Tabela 3 - Extensões das unidades estratigráficas medidas segundo perfil NW.

Algumas considerações podem ser feitas sobre esses procedimentos.

Uma primeira é que estes procedimentos são necessários porque está se trabalhando com deformações em três dimensões, tendo ocorrido de um modo geral fluxo em direções perpendiculares ou oblíquas à seção que se deseja analisar (ou seja, não é uma deformação plana). Os mesmos resultados poderiam também ser obtidos com o círculo de Mohr para deformação finita em 3D, ou pela utilização da equação (21). Porém essa construção gráfica não é tão simples como no caso de 2D, e as direções são referidas com relação aos eixos principais de deformação, sendo necessário depois calcular as atitudes com relação ao sistema geográfico (com um estereograma, por exemplo).

Outro ponto a ressaltar é que os métodos empregados para a análise de *strain* não determinam em geral as extensões absolutas, mas sim razões de *strain*. Arbitrariamente, para facilitar os cálculos, tomamos $S_2 = 1$. Deste modo os componentes da matriz de extensão podem ser multiplicados por fator de escala, uma constante de valor em geral desconhecido, que chamaremos de k .

$$k \cdot \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Este fator produz uma variação de volume k^3 . Todas as extensões calculadas para linhas também seriam multiplicadas por k .

4. Retroanálise da deformação

Um dos objetivos da realização de determinações de strain finito nas rochas é, entre outros, a tentativa de recuperar a configuração geométrica dos corpos geológicos antes da deformação.

Uma das dificuldades teóricas dessa tentativa é que usualmente as medidas de deformação finita em rochas (Fry, R_F/ϕ , etc.) correspondem apenas à componente simétrica de *strain* (distorção) da deformação finita. Não incluem informações sobre a componente de rotação de corpo rígido eventualmente envolvida.

Assim, uma matriz de deformação \mathbf{F} pode ser decomposta numa componente simétrica e numa componente de rotação:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

onde \mathbf{V} é o tensor de extensão esquerdo e \mathbf{R} a matriz de rotação.

O elipsóide de deformação finita obtido de medidas nas rochas corresponde às direções e valores principais de \mathbf{V} . Porém, para determinar-se \mathbf{R} , é necessário saber-se qual era a orientação de linhas correspondentes aos eixos principais de deformação no estado inicial.

Numa situação bidimensional, uma seção geológica por exemplo, é possível restaurar-se a configuração original, admitindo-se o acamamento original como horizontal.

Já numa situação tridimensional não basta por exemplo saber-se que o acamamento era horizontal; ter-se-ia que conhecer também a orientação original de uma linha dentro do acamamento, por exemplo, uma direção de corrente.

Configurações pressupostas como originadas por deformação plana, como cisalhamento simples ou puro, também podem ser reduzidas a uma situação

bidimensional (não há deformação na direção Y do elipsóide, e portanto os cálculos podem restringir-se à seção XZ).

No modelo clássico de zonas de cisalhamento, a componente de rotação pode ser calculada a partir da deflexão da superfície S gerada ou da deflexão de superfícies pré-existentes, para as quais se conhece a orientação fora da zona de cisalhamento (e.g. Ramsay & Graham, 1970).

No caso do Lineamento Ribeira, supondo a ocorrência de deformações sobrepostas, sendo **F** a matriz de deformação total, **CS** a matriz associada ao cisalhamento simples, **F1** a matriz associada a uma deformação anterior, temos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{CS} \cdot \mathbf{F1}$$

Para cada ponto do campo de deformação em torno do Ribeira, a matriz **CS** pode ser calculada a partir dos parâmetros determinados item 4.3.

Podemos querer saber qual era a natureza da deformação existente anterior ao cisalhamento simples, ou seja, determinar F1. Assim, teríamos:

$$\mathbf{F1} = \mathbf{CS}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

Para a deformação final, total, **F**, temos apenas a componente simétrica da deformação, ou seja, as magnitudes e as orientações do elipsóide de deformação finita associadas ao tensor **V**.

$$\mathbf{F1} = \mathbf{CS}^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

Onde **CS** (cisalhamento simples transcorrente) e **V** (elipsóide de deformação finita) são conhecidos. Porém, **R** não é conhecida, e portanto **F1** não pode ser determinada só com estes parâmetros.

O que pode ser feito por ora é verificar se os padrões de *strain* finito obtidos (tensor **V**) são ou não compatíveis com alguns modelos de deformação, por exemplo transpressão ou empurrão seguido de transcorrência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAMPANHA, G. A. C. 2003 *O papel do sistema de zonas de cisalhamento transcorrentes na configuração da porção meridional da Faixa Ribeira*. (Tese de Livre Docência junto ao Instituto de Geociências da USP)
- CAMPANHA, G. A. da C. (1991) *Tectônica Proterozóica no Alto e Médio Vale do Ribeira, Estados de São Paulo e Paraná*. São Paulo, 296 p. (Tese de Doutorado – Instituto de Geociências Universidade de São Paulo).
- CAMPANHA, G. A. C.; SADOWSKI, G. R. (1999) Tectonics of the Southern Portion of the Ribeira Belt (Apiáí Domain). *Precambrian Research*, v. 98, n. 1, p. 31 - 51.
- CAMPANHA, G.A.C.; SADOWSKI, G.R. 2002. Determinações da Deformação Finita em Metassedimentos da Faixa Ribeira. *Revista Brasileira de Geociências*, v. 32 , nº 1.
- JAEGER, J.C. (1969) *Elasticity, fracture and flow, with engineering and geological applications*. London, Methuen. 268p.
- MALVERN, L.E. (1969) *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood, Prentice-Hall . 713p.
- MEANS, W.D. (1976) *Stress and strain: basic concepts of continuum mechanics for geologists*. New York, Springer-Verlag. 339p.
- NYE, J.F. (1957) *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford, University Press. 322p.
- OERTEL, G. (1996) *Stress and deformation: a handbook on tensors in geology*. Oxford, University Press. 292p.
- RAMSAY, J.G.; GRAHAM, R.H. (1970) Strain variation in shear belts. *Canadian Journal of Earth Sciences*, v.7, p. 786-813.
- RAMSAY, J.G.; LISLE, R.J. (2000) *The techniques of modern structural geology: Applications of continuum mechanics in structural geology*. New York, Academic Press. v.3
- RAMSAY, J.G. (1967). *Folding and fracturing of rocks*. New York, McGraw-Hill. 568 p.
- RAMSAY, J.G. (1976) Displacement and strain. *Philosophical Transactions Royal Society London*, v.283, p.3-25.
- TRUEDELLE, C.; TOUPIN, R.A. (1960) The classical field theories. In: FLÜGGE, S. *Encyclopedia of Physics - principles of classical mechanics and field theory*. Springer-Verlag. v.III/I