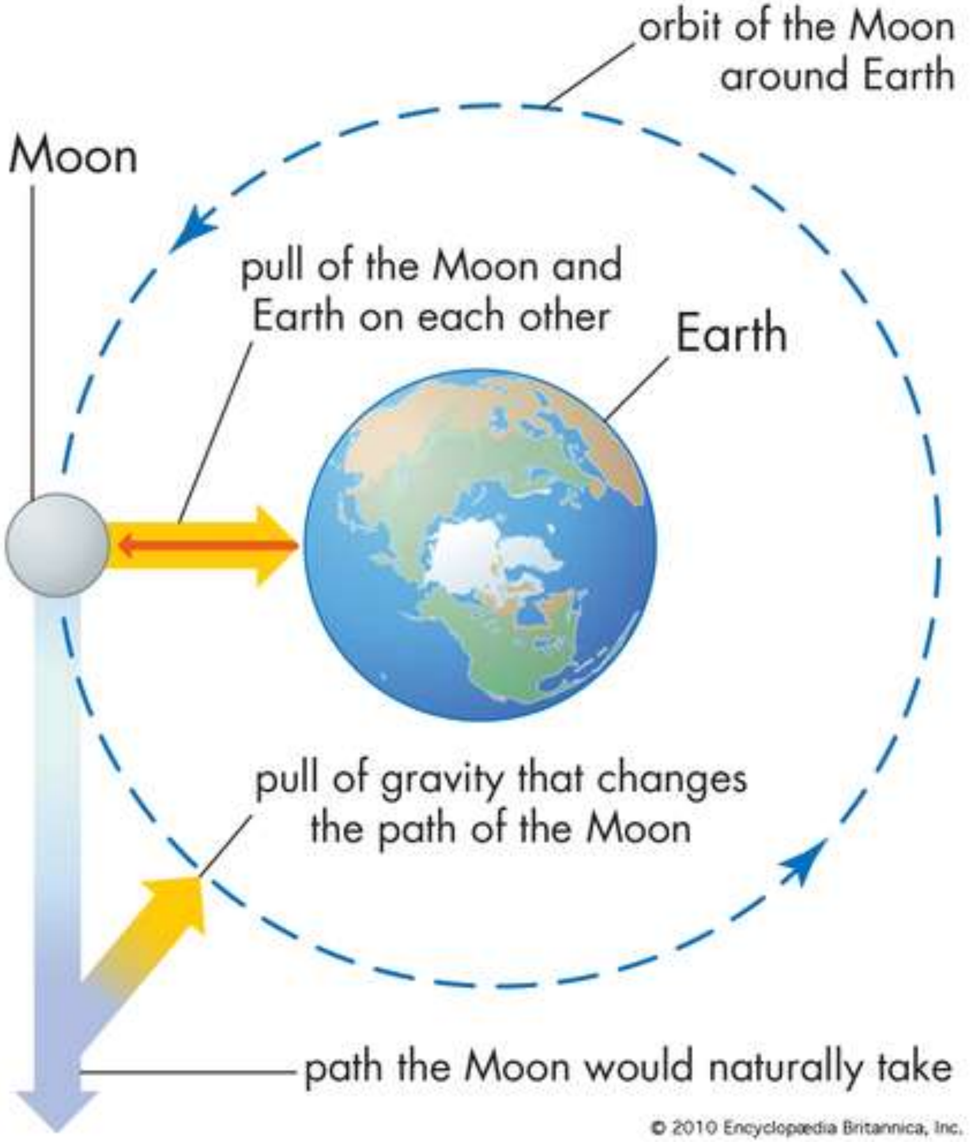
Atração gravitacional



Atração gravitacional

A lei da gravitação, proposta por Isaac Newton, estabelece que toda partícula no Universo atrai outra partícula com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}$$

A lei aplicação desta lei a massas arbitrárias pode ser feita com dois tipos de ataque: considerar as duas massas como constituídas por partículas discretas ou admitir que elas podem ser representadas por uma distribuição contínua de massa.

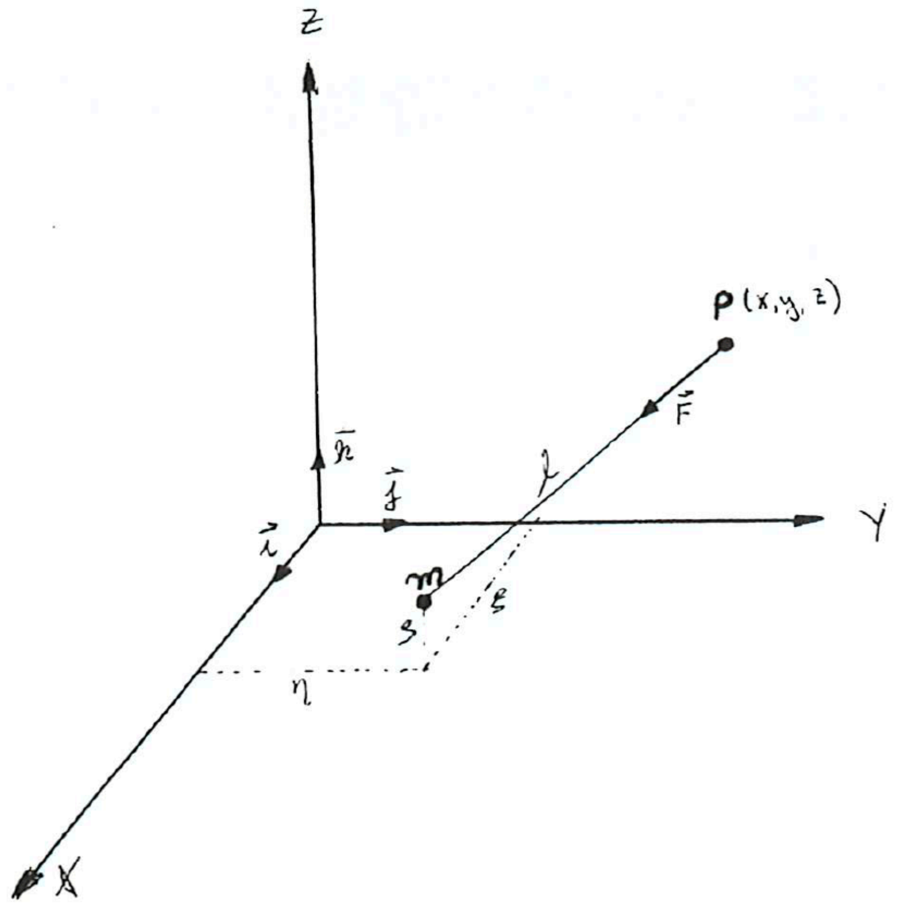
Atração gravitacional

O campo gravitacional gerado por uma partícula de massa m, considerada aqui como atrativa, em uma partícula de prova situada em um ponto P é:

$$\vec{F} = -\frac{G\,m}{l^3}\,\vec{l}$$

$$\vec{l} = (x-\xi)\,\vec{i} + (y-\eta)\,\vec{j} + (z-\zeta)\,\vec{k}$$

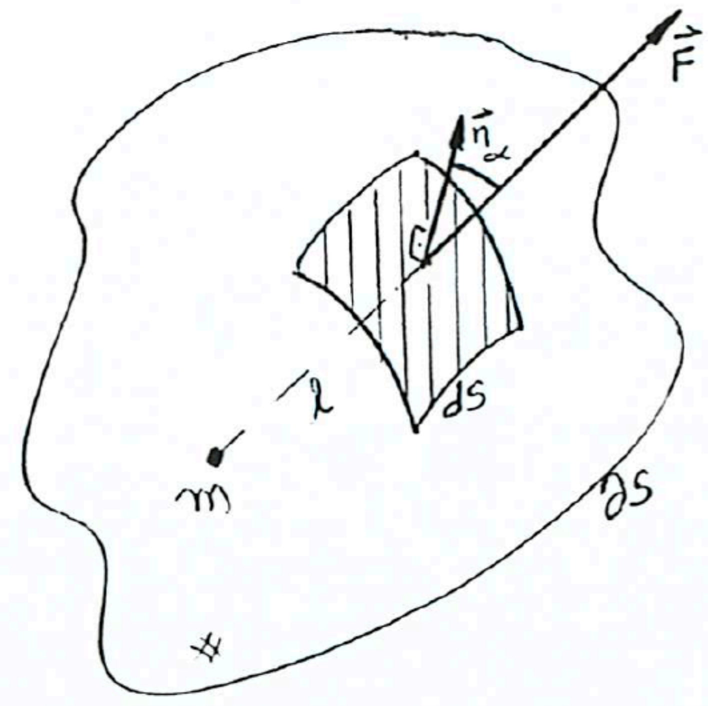
$$l = |\vec{l}|$$



Atração gravitacional

Considerando uma superfície fechada ∂S envolvendo a partícula atrativa, vamos calcular a integral de superfície da componente normal de F:

$$\int_{\partial S} \vec{F}.\vec{n}\, dS = -\, G \int_{\partial S} \frac{m\, \vec{l}.\vec{n}}{l^3}\, dS$$

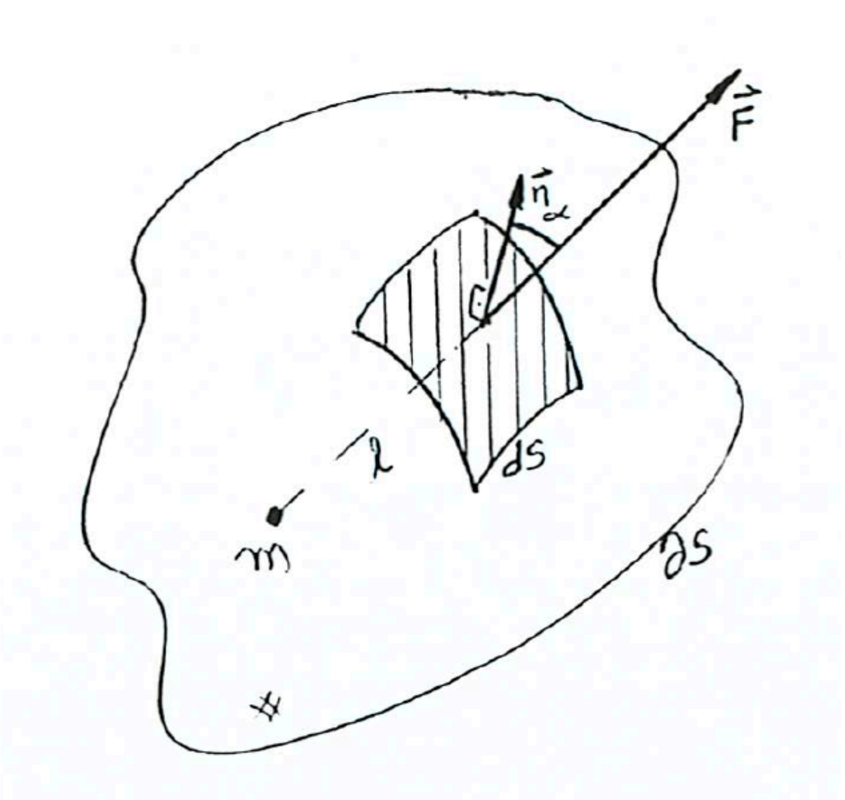


sendo dS o elemento de área de ∂S e ***n*** um vetor unitário, normal à superfície, dirigido para o exterior desta.

Atração gravitacional

A projeção do elemento de área dS sobre um plano normal ao vetor ***l*** é dada por:

$$\frac{\vec{l}\cdot\vec{n}\ dS}{l} = dS\ \cos\alpha$$



sendo α o ângulo entre ***l*** e ***n***.

Pela definição de ângulo sólido, temos:

$$\frac{\vec{l}\cdot\vec{n}\ dS}{l^3} = \frac{dS\ \cos\alpha}{l^2} = d\sigma$$

(dσ é o ângulo sólido subentendido na origem pelo elemento de área dS)

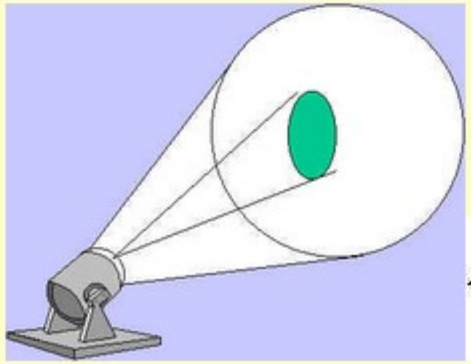
Atração gravitacional

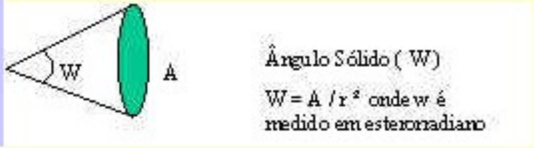
ÂNGULO SÓLIDO

Tratando-se de uma superfície esférica há necessidade de se definir ângulo sólido (w). É a relação entre a área (A) do setor desejado e o quadrado do raio (r). O ângulo sólido é medido em esterorradiano. $w = A / r^2$.

Ângulo Sólido é o ângulo com vértice no centro de uma esfera, que subentende na superfície desta esfera uma área medida pelo quadrado do raio da esfera. A esfera toda corresponde a um ângulo sólido de 4 pi esterorradianos, cujo siímbolo é dado por sr. O ângulo sólido é utilizado para cálculo de intensidade luminosa. Suponhamos uma esfera de 1 m de raio, no centro da qual colocamos uma fonte com intensidade de 1 candela, em todas as direções. O ângulo sólido que subentende uma área de 1 m² é um esterorradiano. O fluxo deste ângulo sólido, é o **lúmen**. Como em cada m² da superfície desta esfera temos o fluxo de 1 lúmen, o fluxo total recebido será 12,56 lumens.

Área da esfera (A) = 4 pi R^2 = 12,56 R^2.





* http://www.cepa.if.usp.br/energia/energia2000/turmaA/grupo6/angulo_solido.htm

Atração gravitacional

Como o ângulo sólido subentendido por uma superfície fechada em torno da origem vale 4π esterorradianos*, temos:

$$\int_{\partial S} \vec{F}.\vec{n}\ dS = -G\ m \int_{\sigma} d\sigma = -4\ \pi\ G\ m$$

Considerando uma distribuição contínua de massa, com densidade dada por $\rho(\xi,\eta,\zeta)$, temos:

$$\int_{\partial S} \vec{F}.\vec{n}\ dS = -4\ \pi\ G \int_{\Omega} \rho\ d\Omega$$

sendo ***Ω*** o volume limitado pela superfície S

$$\rho = \frac{dm}{d\Omega} \quad , \text{com} \quad d\Omega = d\xi\ d\eta\ d\zeta$$

* http://www.cepa.if.usp.br/energia/energia2000/turmaA/grupo6/angulo_solido.htm

Atração gravitacional

Usando o teorema da divergência de Gauss: $$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \; dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\int_{\partial S} \vec{F}.\vec{n} \; dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \; d\Omega$$

temos:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{F} + 4\pi \; G \; \rho) \; d\Omega = 0$$

Para um volume de forma arbitrária, a expressão só será verdadeira se o integrando for nulo. Daí:

$$\operatorname{div} \vec{F} = - \; 4\pi \; G \; \rho$$

Atração gravitacional

No exterior das massas atrativas teremos:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, d\Omega = 0$$

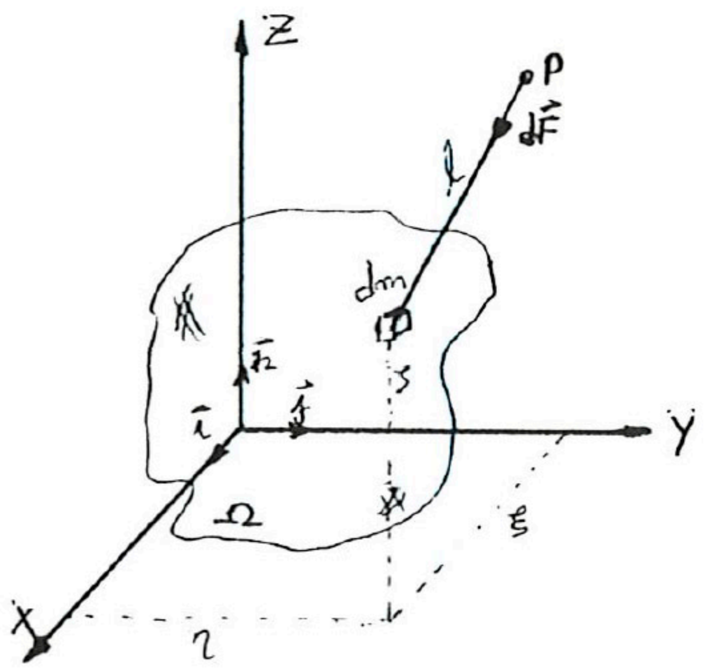
e para um volume de forma arbitrária isso só é possível se o integrando for nulo. Portanto, no exterior das massas atrativas, vale:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = 0}$$

Potencial de atração gravitacional

Considerando uma distribuição contínua de massa limitada por um volume $\boldsymbol{\Omega}$, com densidade dada por $\rho(\xi,\eta,\zeta)$, temos o campo gravitacional gerado por um elemento de massa dm dado por:

$$d\vec{F} = -G\frac{dm}{l^3}\vec{l} \qquad \text{com} \qquad dm = \rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$



como

$$\vec{l} = (x-\xi)\,\vec{i} + (y-\eta)\,\vec{j} + (z-\zeta)\,\vec{k}$$

podemos escrever:

$$d\vec{F} = -\frac{G\,dm}{l^3}\left[(x-\xi)\,\vec{i} + (y-\eta)\,\vec{j} + (z-\zeta)\,\vec{k}\right]$$

Potencial de atração gravitacional

O campo gravitacional gerado por $\boldsymbol{\Omega}$, que atua sobre a partícula de prova situada a uma distância l é dado por:

$$\vec{F} = -G \int_{\Omega} \left[\frac{(x-\xi)}{l^3}\vec{i} + \frac{(y-\eta)}{l^3}\vec{j} + \frac{(z-\zeta)}{l^3}\vec{k} \right] dm$$

As componentes de ***F*** podem ser expressas pelas derivadas parciais de uma função escalar chamada função potencial ou potencial de atração gravitacional, definida como:

$$\boxed{V = G \int_{\Omega} \frac{dm}{l} = \frac{G\,m}{l}}$$

Potencial de atração gravitacional

As derivadas parciais em relação a x, y e z da função potencial são dadas por:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \right) dm = - G \int_{\Omega} \frac{(x-\xi)}{l^3} \quad dm$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = G \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \right) dm = - G \int_{\Omega} \frac{(y-\eta)}{l^3} \quad dm$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = G \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{l} \right) dm = - G \int_{\Omega} \frac{(z-\zeta)}{l^3} \quad dm$$

Potencial de atração gravitacional

Lembrando que:

$$\vec{F} = -G \int_{\Omega} \left[\frac{(x-\xi)}{l^3}\vec{i} + \frac{(y-\eta)}{l^3}\vec{j} + \frac{(z-\zeta)}{l^3}\vec{k} \right] dm$$

podemos escrever:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \text{grad } V}$$

Desta forma, o campo ***F*** é um campo vetorial conservativo, e pode ser expresso a partir de uma função escalar, o que traz grandes vantagens.

Potencial de atração gravitacional

Lembrando que

$$\operatorname{div} \vec{F} = -4\pi \rho G$$

e como

$$\vec{F} = \operatorname{grad} V$$

temos

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -4\pi \rho G$$

Usando o operador laplaciano

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

ficamos com

$$\boxed{\nabla^2 V = -4\pi \rho G}$$

equação de Poisson

Potencial de atração gravitacional

No <u>exterior</u> das massas atrativas:

$$\text{div grad } V = 0$$

e, portanto:

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

equação de Laplace

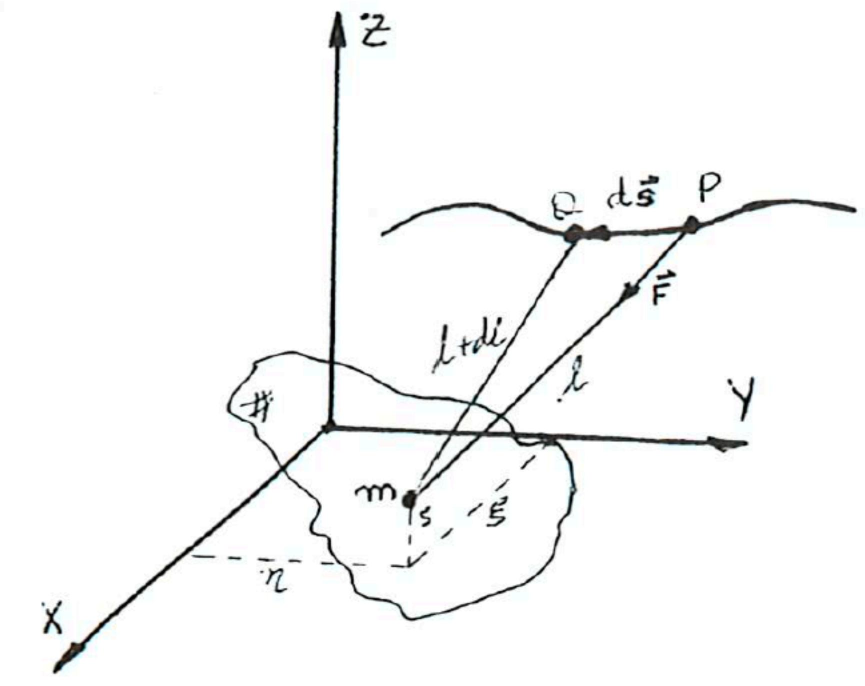
Significado físico do potencial de atração gravitacional

Um incremento de potencial dV associado ao deslocamento de uma partícula de prova de um ponto P(x,y,z) a um ponto Q(x+dx, y+dy, z+dz) ao longo de uma curva S é dado por:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

ou

$$dV = \vec{F}.d\vec{s} = F\ ds\ \cos\alpha = F_s\ ds$$



sendo Fs a componente de ***F*** na direção de s, e d***s*** = (dx, dy, dz).

A variação do potencial de atração gerado pela massa m, entre dois pontos, é igual ao trabalho realizado para deslocar a massa de prova entre estes pontos.