

Lista de Exercícios - Espaços Métricos

Geovane Cardoso

Outubro 2022

Questão 1 - Decida se a aplicação

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

satisfaz as propriedades da métrica.

Questão 2 - Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $x \in X$ e r um número real positivo. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{L} = \{y \in X ; d(x, y) > r\}$$

é um subconjunto aberto em X

Questão 3 - Sejam $(X, d_x), (Y, d_y)$ espaços métricos. Assuma que d_x é a métrica discreta. Mostre que qualquer função $f : (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$ é contínua.

Questão 4 - Se (X, d) é um espaço métrico, prove que

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

Questão 5* - Considere o conjunto

$$\mathcal{P}(S) = \{A \subset S ; A \text{ é um subconjunto finito de } S\}.$$

Decida se a aplicação

$$\begin{aligned} d_S : \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\rightarrow d(A, B) = \#(\Delta(A, B)) \end{aligned}$$

onde $\#$ é a cardinalidade e

$$\Delta(A, B) = A \setminus B \cup B \setminus A$$

é um métrica sobre $\mathcal{P}(S)$

Questão 6 - Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Decida se

$$d_{max}(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i - y_i|\}$$

e

$$d_{soma}(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

são métricas.

Questão 7* - É possível estabelecer alguma relação entre as métricas $d_{max}(x, y)$ e $d_{soma}(x, y)$?

Questão 8* - Seja l^∞ o espaço das seqüências limitadas de escalares. Dado X um subespaço de l^∞ das seqüências de 0's e 1's. Qual é a métrica induzida em X ?