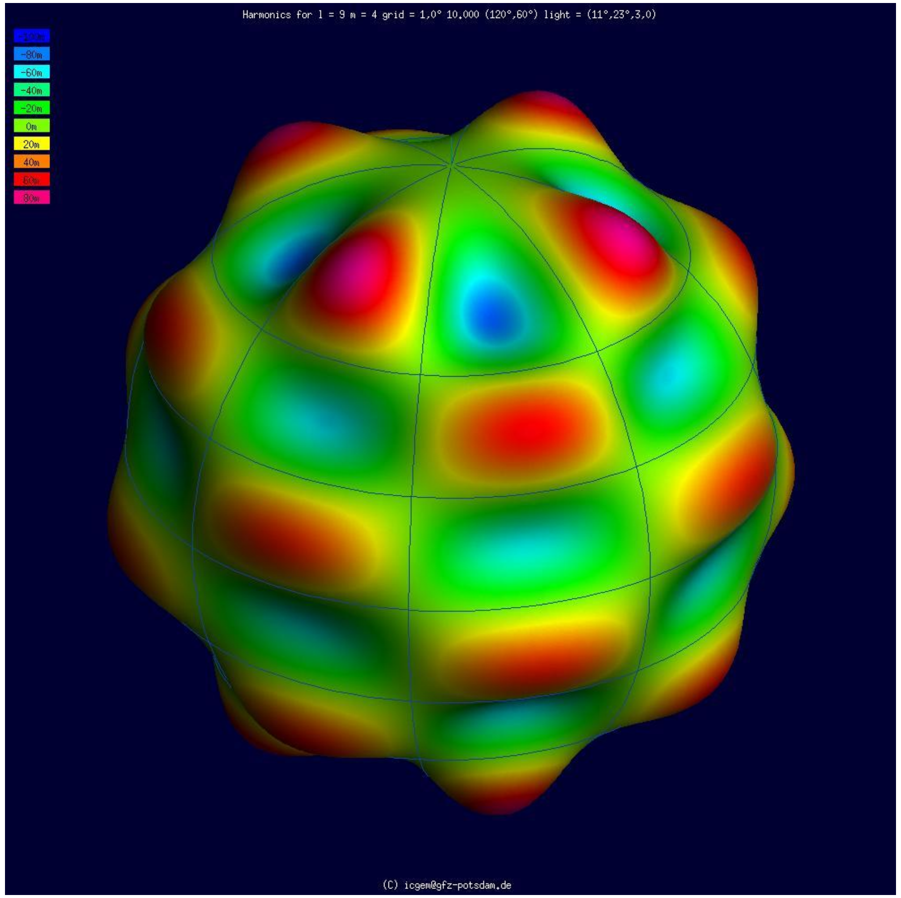
Desenvolvimento do potencial gravitacional em série de Harmônicos Esféricos



Força gravitacional, potencial gravitacional, equação de Laplace, equação de Poisson

A força gravitacional é dada pela Lei de Newton $F = G\,\dfrac{mM}{r^2}$

O potencial gravitacional é definido como $V = G\,\dfrac{m}{l}$

A relação entre força e potencial é dada por $F = grad\ V$

No exterior das massas atrativas, o potencial gravitacional satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

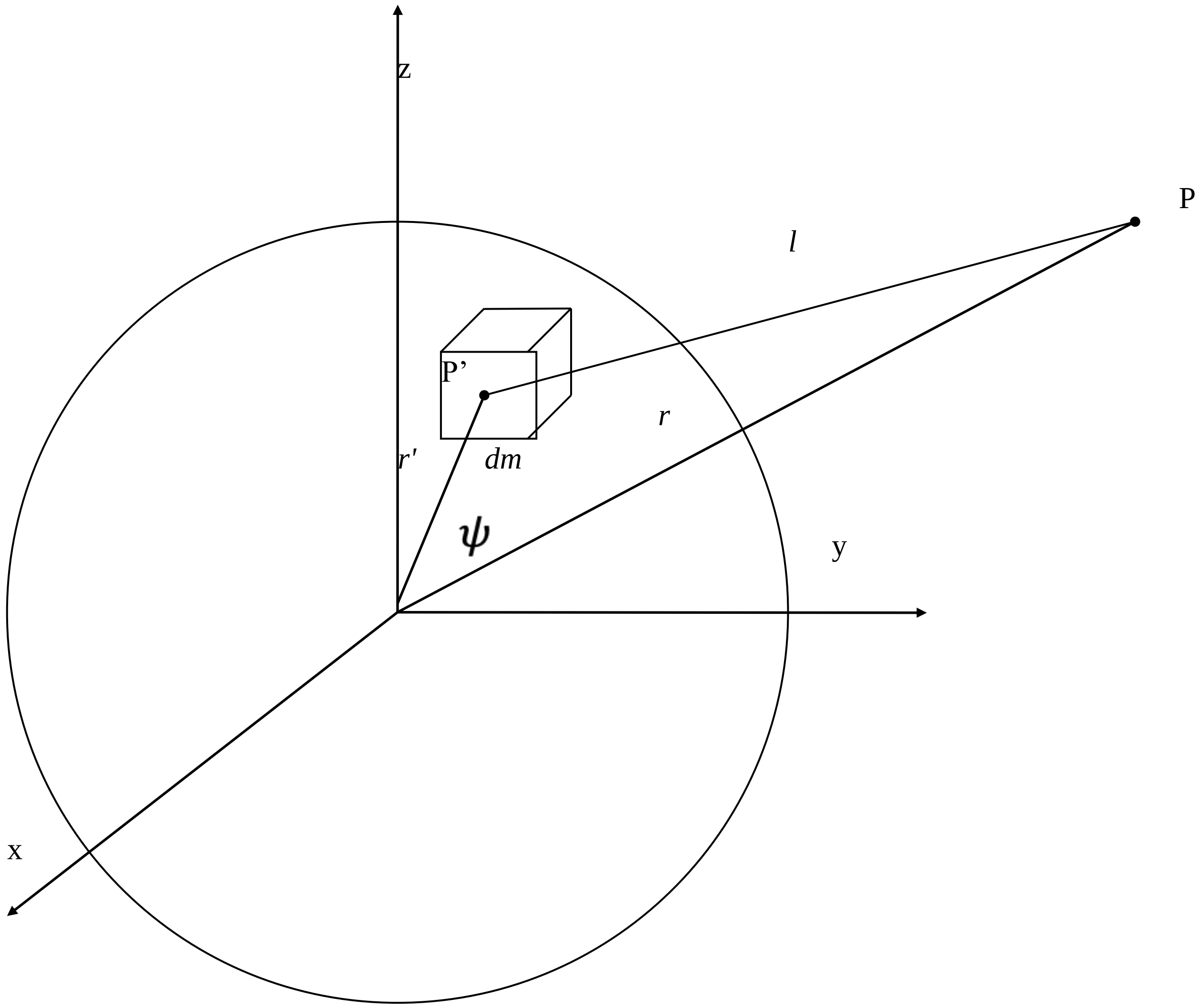
O potencial gravitacional de um corpo que tem distribuição de massa homogênea e forma geométrica simples, em geral, admite uma representação matemática exata.

O potencial de um corpo com distribuição de massa heterogênea e forma geométrica complexa como a Terra, por exemplo, só pode ser obtido por aproximação.

Em geral, as aproximações são expressas na forma de séries, onde o número de termos depende da resolução dos dados disponíveis e indica o grau de aproximação.

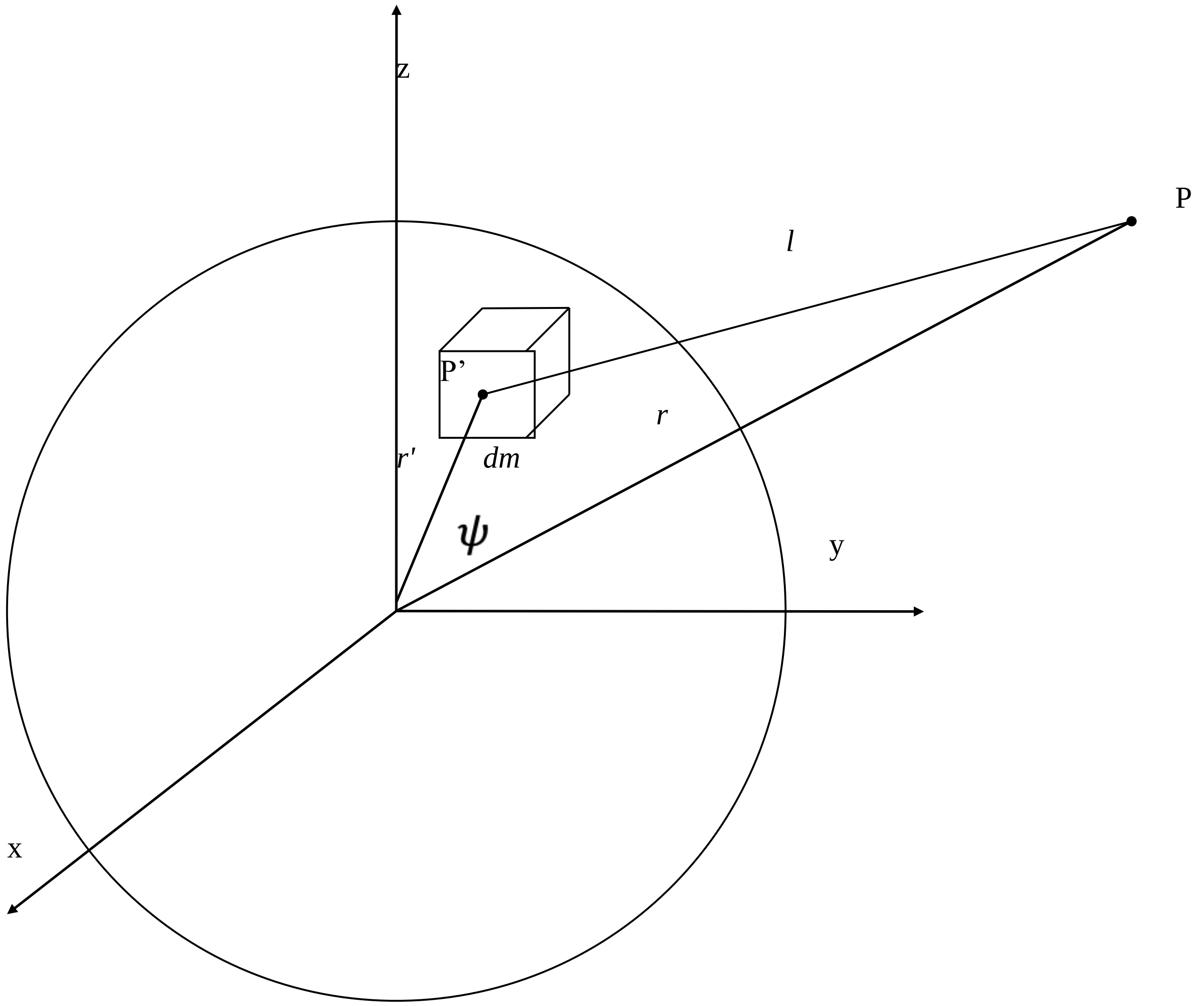
Para representar o potencial gravitacional de um corpo por uma série, consideremos a figura e calculemos o potencial no ponto P como

$$V = G\int \frac{dm}{l}$$



A distância entre o elemento de massa *dm* e o ponto P é expressa por

$$l = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos(\psi)}$$



Portanto, o inverso da distância tem expressão:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos(\psi)}}$$

ou

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi)\right]^{-1/2}$$

Fazendo

$$x = 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi) - \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$

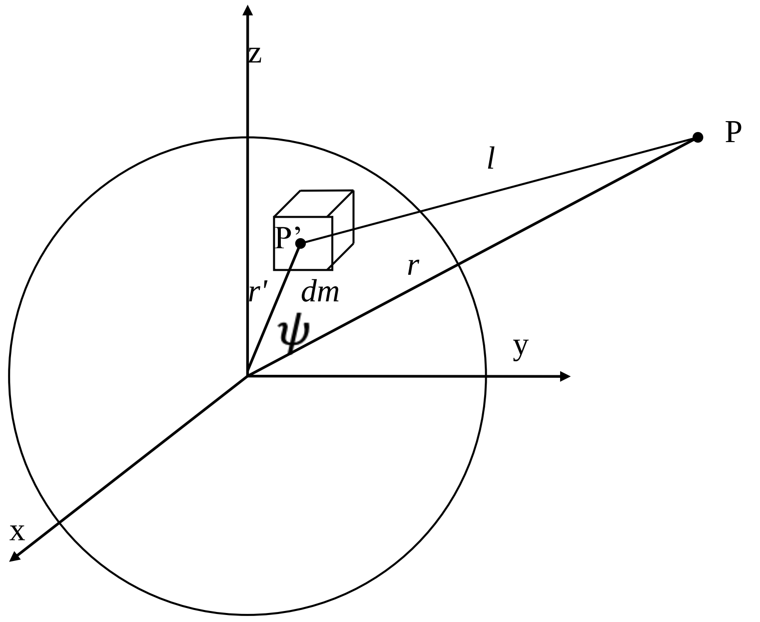
temos

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left(1 - x\right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos(\psi)}}$$

ou

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi)\right]^{-1/2}$$



O desenvolvimento deste binômio em série de potências é dado por:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left(1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}\tfrac{5}{6}x^3 + \ldots\right)$$

Usando este resultado com $x = 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi) - \left(\frac{r'}{r}\right)^2$, temos:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\psi) - 1\right) + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(P_0(\psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)P_1(\psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\psi) + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\psi)$$

sendo

$$\mathrm{P_n}(\psi) \equiv \mathrm{P_n}\left(\cos(\psi)\right)$$

polinômios de Legendre de grau *n*, dados por

$$P_0(\psi) = 1$$

$$P_1(\psi) = \cos(\psi)$$

$$P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\psi) - 1\right)$$

$$P_3(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(5\cos^3(\psi) - 3\cos(\psi)\right)$$

$$\vdots$$

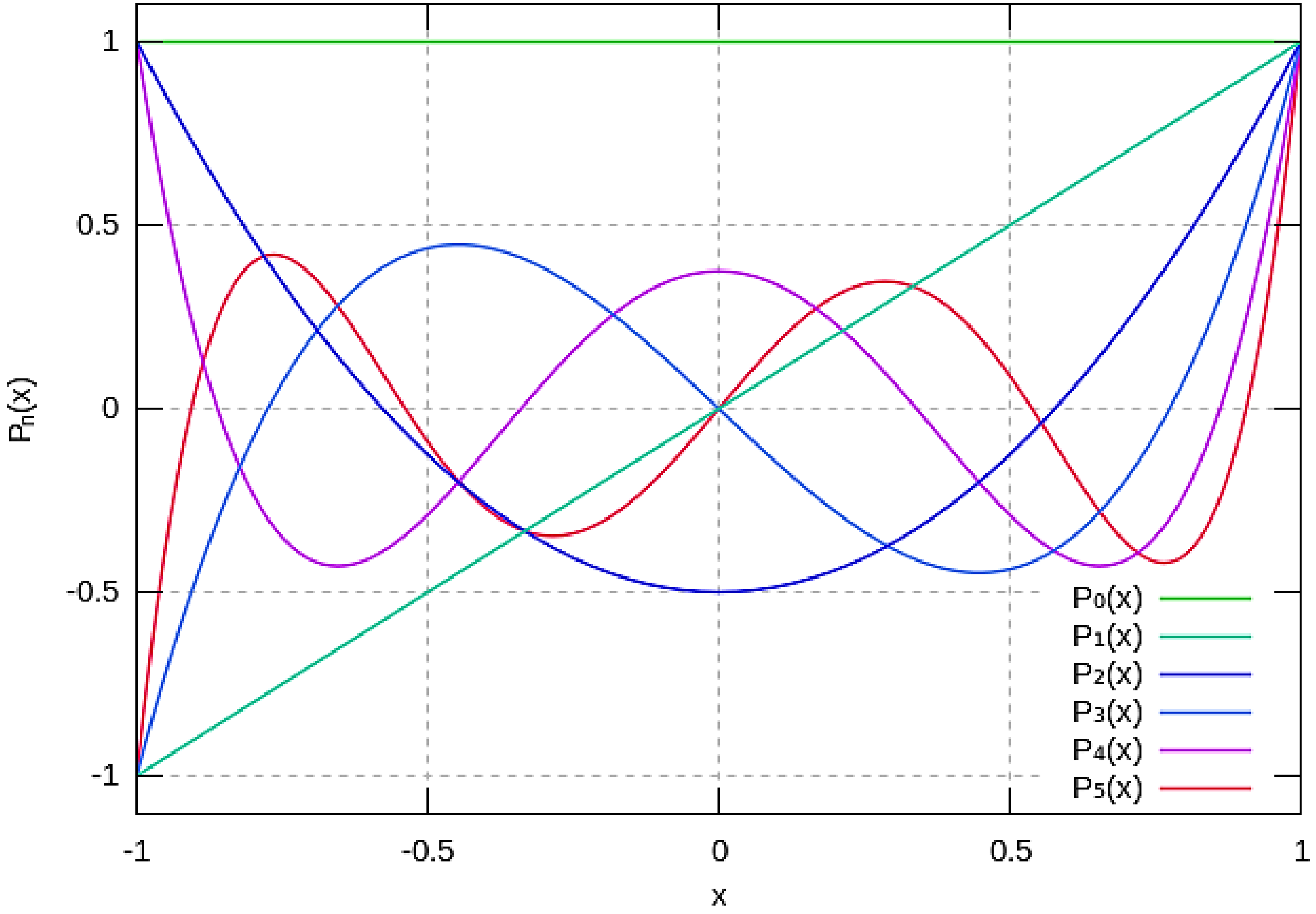
$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\psi) - 1\right) + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(P_0(\psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)P_1(\psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\psi) + \ldots\right)$$

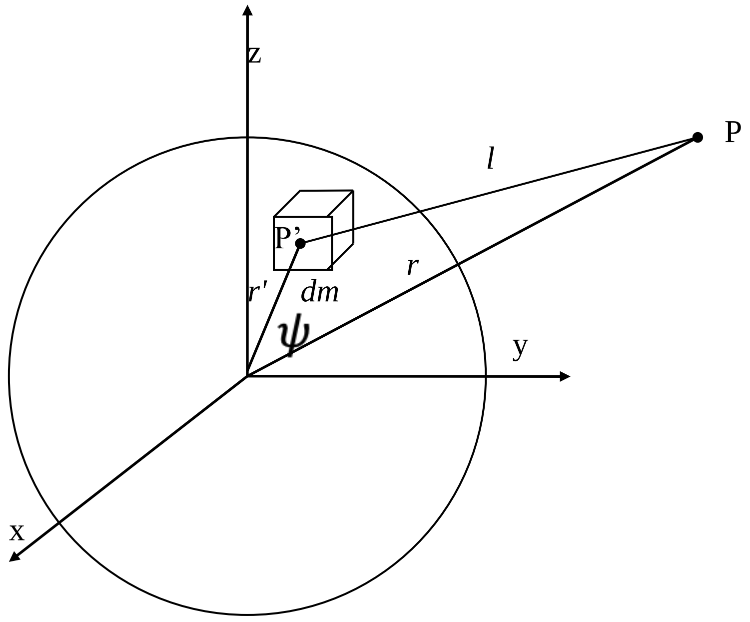
$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\psi)$$

Existe uma fórmula de recorrência para calcular os polinômios de Legendre, dada por

$$P_n(\psi) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(\psi) + \frac{2n-1}{n} \cos(\psi) P_{n-1}(\psi)$$



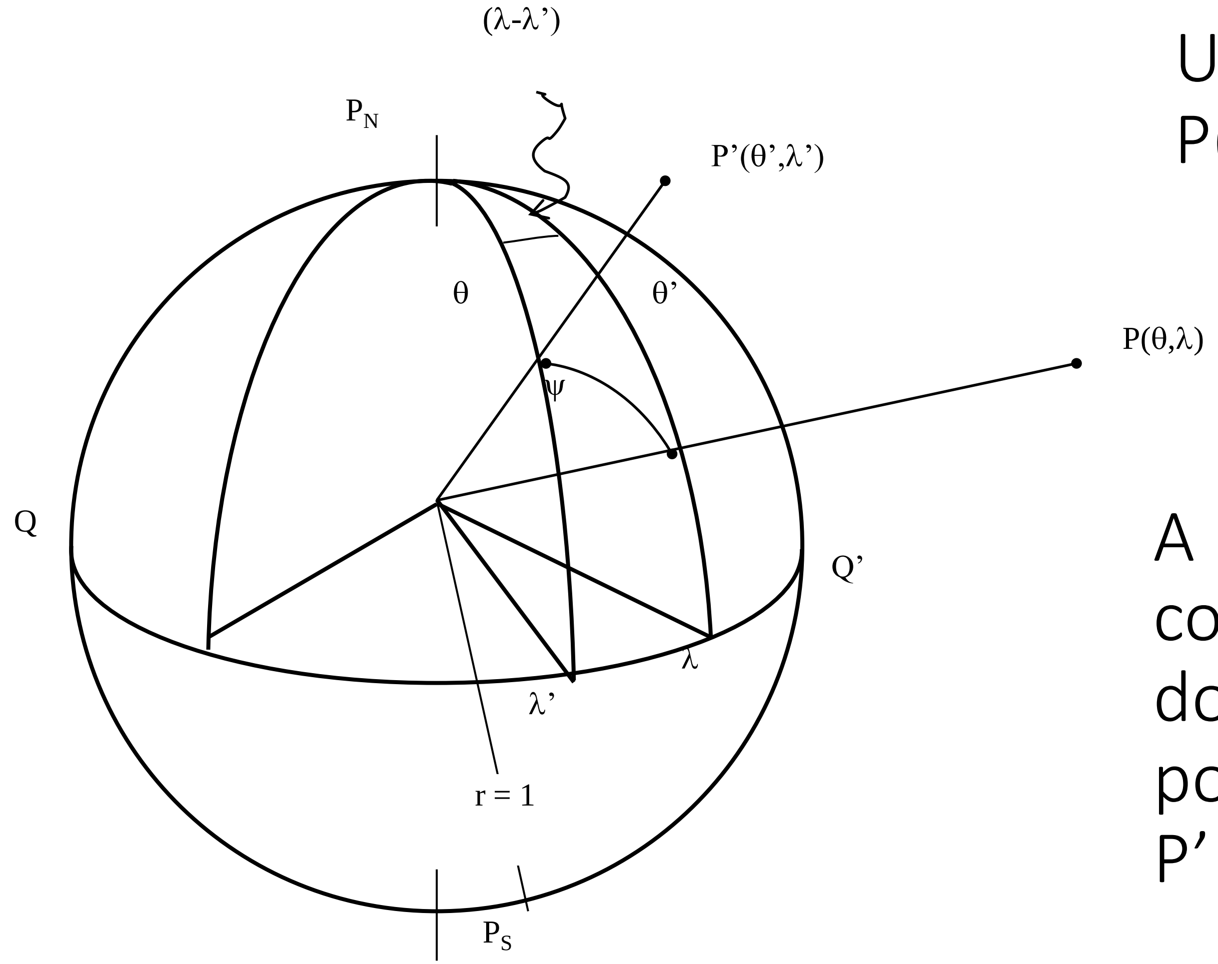
A somatória representa uma série convergente se r < r’, e fornece o inverso da distância *l* em função do ângulo ψ



$$\frac{1}{l}=\frac{1}{r}\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\psi)+\left(\frac{r'}{r}\right)^{2}\tfrac{1}{2}\left(3\cos^{2}(\psi)-1\right)+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{r}\left(P_0(\psi)+\left(\frac{r'}{r}\right)P_1(\psi)+\left(\frac{r'}{r}\right)^{2}P_2(\psi)+\dots\right)$$

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}P_n(\psi)$$



Utilizando as coordenadas esféricas de P(θ,φ) e de P'(θ',φ')

A relação entre o ângulo ψ e as coordenadas de P e P' é obtida a partir do triângulo esférico formado pelo ponto norte (P_N) e as projeções de P e P' sobre uma esfera de raio unitário.

A fórmula dos quatro elementos, aplicada ao triângulo esférico, fornece

$$\cos(\psi) = \cos(\theta)\cos(\theta') + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta')\cos(\lambda - \lambda')$$

Fazendo

$$\cos(\theta) = P_{10}(\theta) \qquad e \qquad \mathrm{sen}(\theta) = P_{11}(\theta)$$

na fórmula

$$\cos(\psi) = \cos(\theta)\cos(\theta') + \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta')\cos(\lambda - \lambda')$$

temos

$$P_1(\psi) = P_{10}(\theta)P_{10}(\theta') + P_{11}(\theta)P_{11}(\theta')\cos(\lambda - \lambda')$$

$$\begin{aligned}
&P_0(\psi) = 1 \\
&P_1(\psi) = \cos(\psi) \\
&P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\psi) - 1\right) \\
&P_3(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(5\cos^3(\psi) - 3\cos(\psi)\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

para obtermos o polinômio de Legendre de 2º grau, o procedimento é análogo:

$$P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2(\psi) - 1\right)$$

substituindo o valor de cos(ψ), temos

$$P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}[3\cos^2(\theta)\cos^2(\theta') + 6\cos(\theta)\cos(\theta')\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\theta')\cos(\lambda - \lambda') +$$
$$+ 3\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta')\cos^2(\lambda - \lambda')]$$

Desenvolvendo os termos dentro dos colchetes, e reagrupando:

$$P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)\tfrac{1}{2}\left(\cos^2(\theta') - 1\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{3}3\cos(\theta)\cos(\theta')\ 3\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\theta')\cos(\lambda - \lambda') +$$
$$+ \tfrac{1}{12}3\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta')\cos 2(\lambda - \lambda')$$

Fazendo

$$P_{20}(\theta) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$$
$$P_{21}(\theta) = 3\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)$$
$$P_{22}(\theta) = 3\mathrm{sen}^2(\theta)$$

temos então

$$P_2(\psi) = C_{20}P_{20}(\theta)P_{20}(\theta') + \\ + C_{21}P_{21}(\theta)P_{21}(\theta')\cos(\lambda - \lambda') + \\ + C_{22}P_{22}(\theta)P_{22}(\theta')\cos 2(\lambda - \lambda')$$

com

$$C_{20} = 1 \qquad C_{21} = \frac{1}{3} \qquad C_{22} = \frac{1}{12}$$

que pode ser expresso como

$$P_2(\psi) = \sum_{m=0}^{2} \mathrm{C}_{2\mathrm{m}} P_{2m}(\theta)P_{2m}(\theta')\cos m(\lambda - \lambda')$$

$$P_0(\psi) = 1$$
$$P_1(\psi) = \cos(\psi)$$
$$P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\psi) - 1\right)$$
$$P_3(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(5\cos^3(\psi) - 3\cos(\psi)\right)$$
$$\vdots$$

De maneira análoga:

$$P_3(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(5\cos^3(\psi) - 3\cos(\psi)\right)$$

resultará em

$$\begin{aligned} P_3(\psi) = {} & C_{30}P_{30}(\theta)P_{30}(\theta') + \\ & + C_{31}P_{31}(\theta)P_{31}(\theta')\cos(\lambda - \lambda') + \\ & + C_{32}P_{32}(\theta)P_{32}(\theta')\cos 2(\lambda - \lambda') + \\ & + C_{33}P_{33}(\theta)P_{33}(\theta')\cos 3(\lambda - \lambda') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_0(\psi) = 1 \\ & P_1(\psi) = \cos(\psi) \\ & P_2(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2(\psi) - 1\right) \\ & P_3(\psi) = \tfrac{1}{2}\left(5\cos^3(\psi) - 3\cos(\psi)\right) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Generalizando para um polinômio de grau n:

$$P_n(\psi) = \sum_{m=0}^{n} C_{nm} P_{nm}(\theta) P_{nm}(\theta') \cos m(\lambda - \lambda') = S_n$$

$$\left.\begin{array}{ll} C_{nm} = 1 & para \quad m = 0 \\ C_{nm} = \dfrac{2(n-m)!}{(n+m)} & para \quad m \neq 0 \end{array}\right\}$$

desenvolvendo o fator em (λ - λ’), chegamos em:

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} C_{nm} P_{nm}(\theta) P_{nm}(\theta')\left[\cos(m\lambda)\cos(m\lambda') + \mathrm{sen}(m\lambda)\,\mathrm{sen}(m\lambda')\right]$$

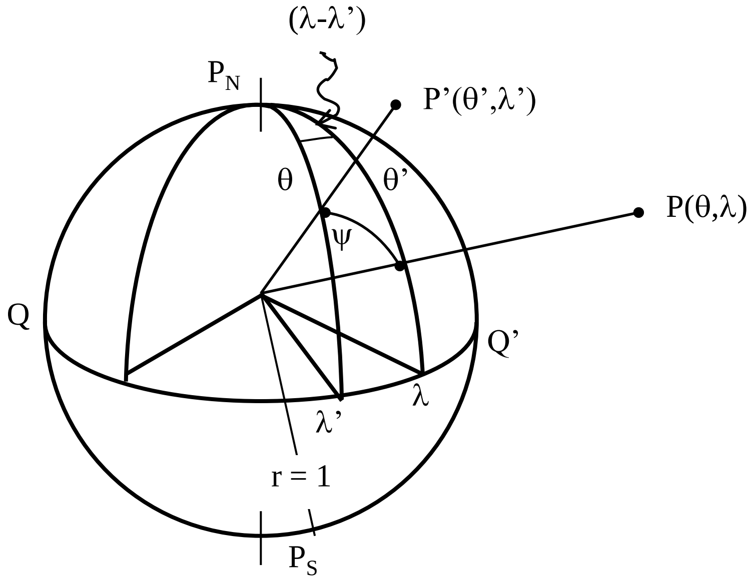
Os fatores que dependem das coordenadas de P'(θ', λ') podem ser incluídos em coeficientes apropriados,

$$a_{nm} = C_{nm}P_{nm}(\theta')\cos(m\lambda)$$

$$b_{nm} = C_{nm}P_{nm}(\theta')\,\mathrm{sen}(m\lambda)$$

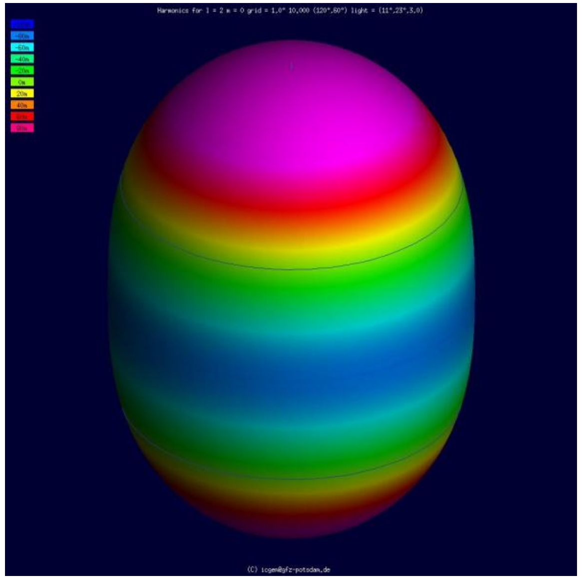
A fórmula fica, então:

$$P_n(\psi) = \sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\,\mathrm{sen}(m\lambda)\right]$$

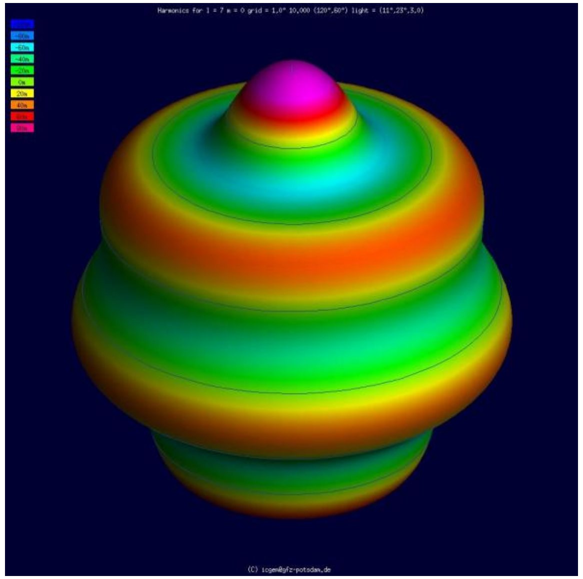


A função $P_n(\psi)$ depende apenas das coordenadas do ponto P sobre uma esfera da raio unitário e, por isso, tem o nome de harmônico esférico de superfície de grau n. Ela contém 2n+1 constantes arbitrárias a_{nm} e b_{nm}. Os termos que compõe a expressão anterior têm denominação especial:

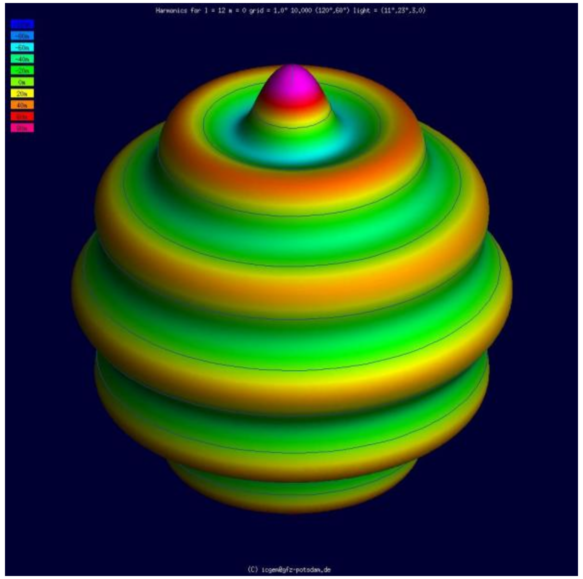
1) $P_{n0}(\theta) = P_n(\psi)$ (polinômios de Legendre de grau n) -> harmônicos esféricos zonais



$P_{2\,0}(\psi)$



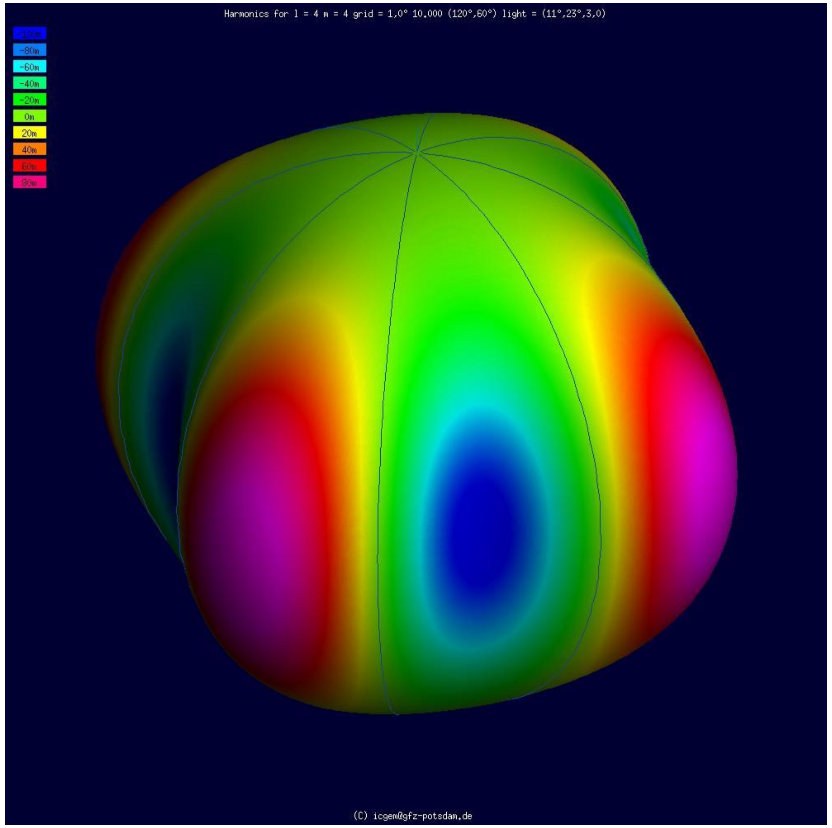
$P_{7\,0}(\psi)$



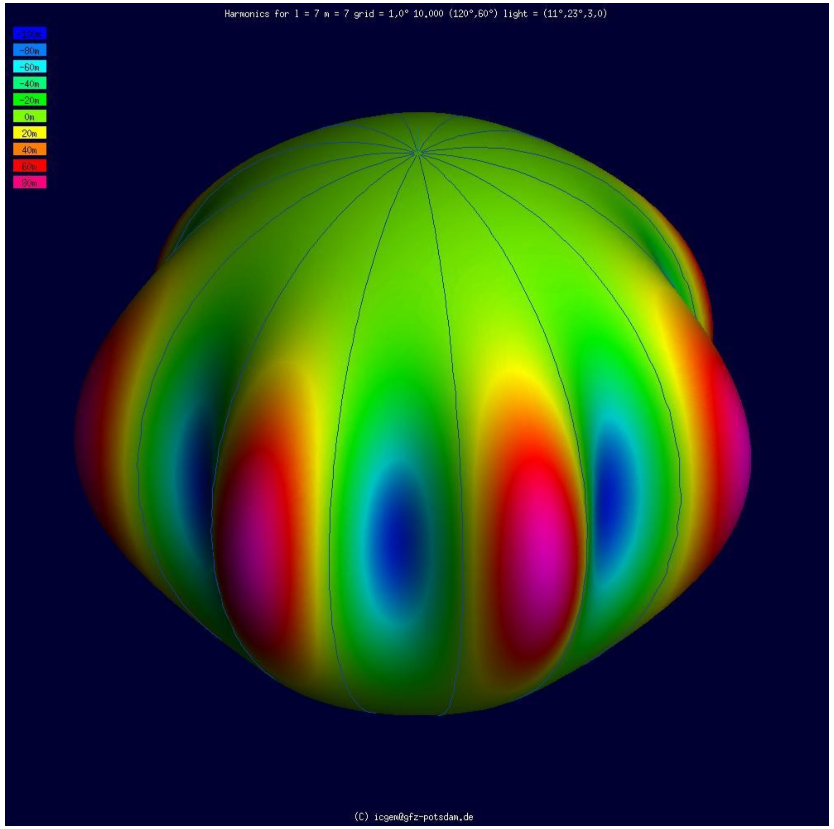
$P_{12\,0}(\psi)$

2) $P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda)$ e $P_{nm}(\theta)\,\mathrm{sen}(m\lambda)$ - (polinômios de Legendre associados de grau *n* e ordem *m*), m $\neq$0, são chamados:

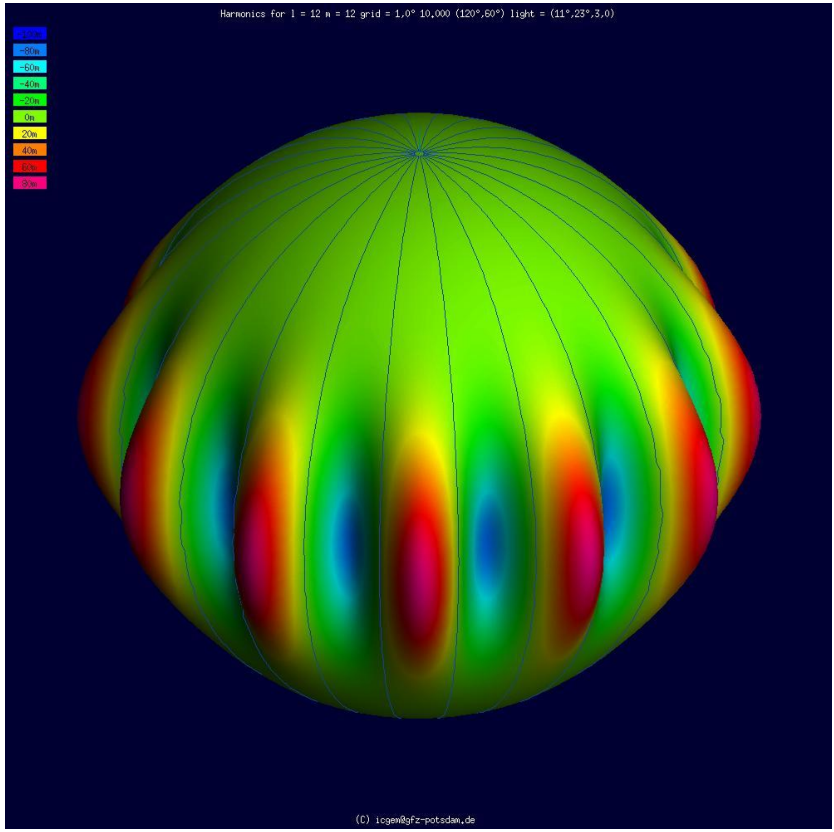
- harmônicos esféricos <u>setoriais</u>, se n =m



$P_{4\,4}(\theta)\cos(m\lambda)$



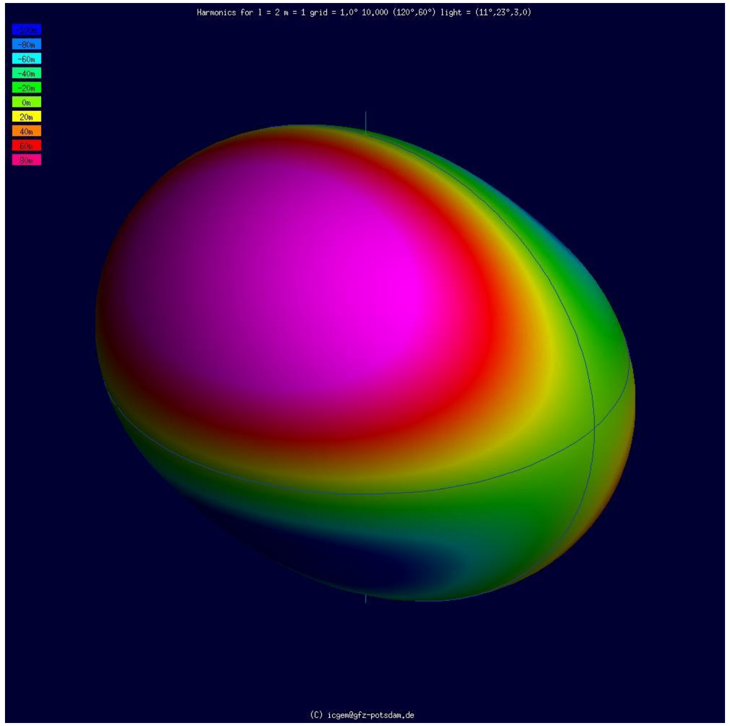
$P_{7\,7}(\theta)\cos(m\lambda)$



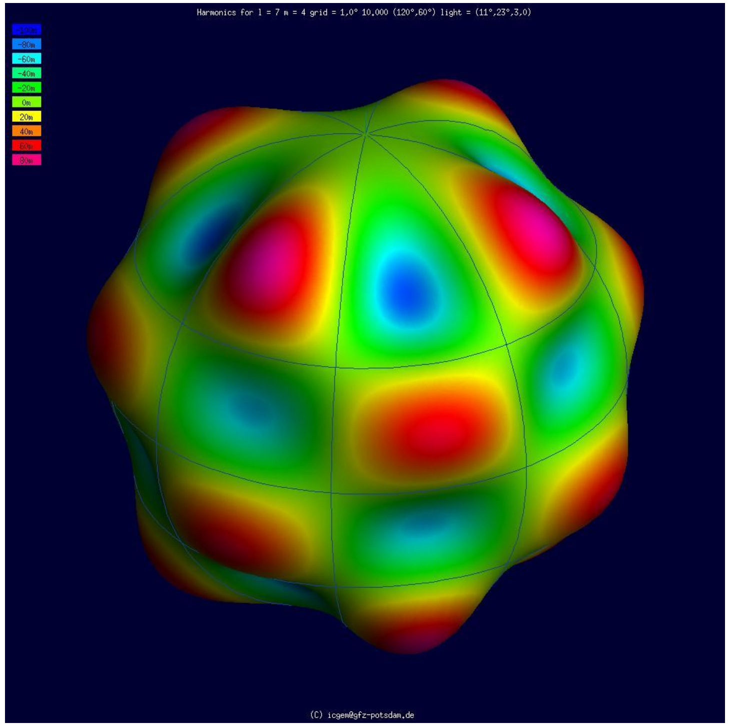
$P_{12\,12}(\theta)\cos(m\lambda)$

2) $P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda)$ e $P_{nm}(\theta)\,\mathrm{sen}(m\lambda)$ - (polinômios de Legendre associados de grau n e ordem m), $m \neq 0$, são chamados:

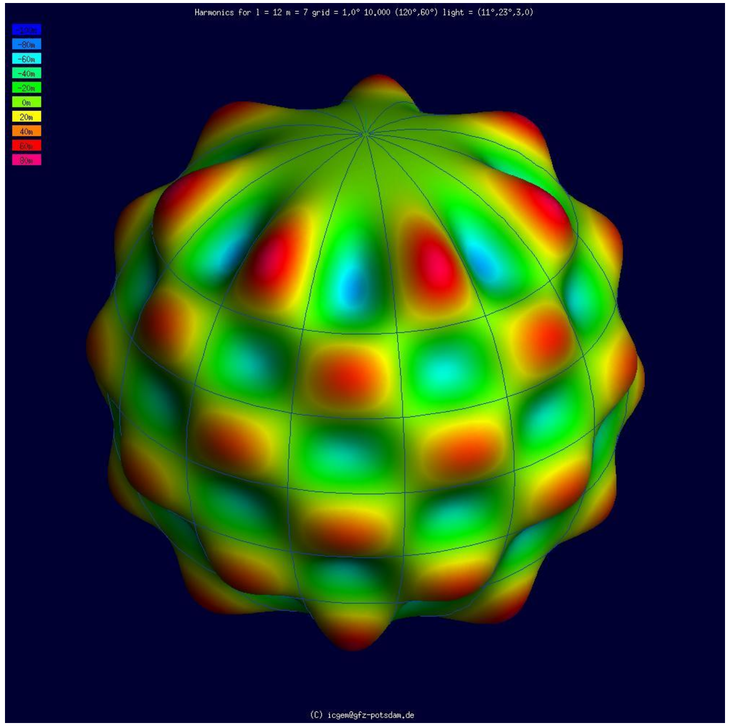
- harmônicos esféricos <u>tesserais</u>, se $n \neq m$



$P_{2\,1}(\theta)\cos(m\lambda)$



$P_{7\,4}(\theta)\cos(m\lambda)$



$P_{12\,7}(\theta)\cos(m\lambda)$

Os polinômios de Legendre associados podem ser expressos por várias formas. Uma dela, apropriada para o uso de computador, é a seguinte:

$$P_{nm}(\theta) = \frac{\mathrm{sen}^{m}(\theta)}{2^{n}} \sum_{k=0}^{I} \frac{(-1)^{k}(2n-2k)!\cos^{n-m-2k}(\theta)}{k!\,(n-k)!\,(n-m-2k)!}$$

sendo I o maior inteiro contido em $\dfrac{n-m}{2}$

Para expressar o inverso da distância, dado por

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n} P_n(\psi)$$

usando

$$P_n(\psi) = \sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\,\mathrm{sen}(m\lambda)\right]$$

temos então:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}\left[a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\,\mathrm{sen}(m\lambda)\right]$$

Podemos, então, obter a expressão para o potencial de atração gravitacional, em série de harmônicos esféricos, partindo de:

$$V = G\int \frac{dm}{l}$$

e usando

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}\left[a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\operatorname{sen}(m\lambda)\right]$$

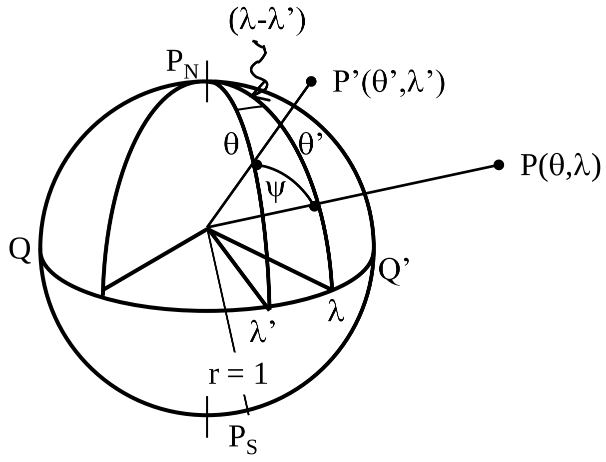
chegando em:

$$V = \frac{G}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\int\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}\left(a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\operatorname{sen}(m\lambda)\right)dm\right]$$

Fazendo

$$A_{nm} = G\int r'^{n} a_{nm}\, dm = G\int r'^{n} C_{nm} P_{nm}(\theta')\cos(m\lambda')dm$$

$$B_{nm} = G\int r'^{n} b_{nm}\, dm = G\int r'^{n} C_{nm} P_{nm}(\theta')\mathrm{sen}(m\lambda')dm$$

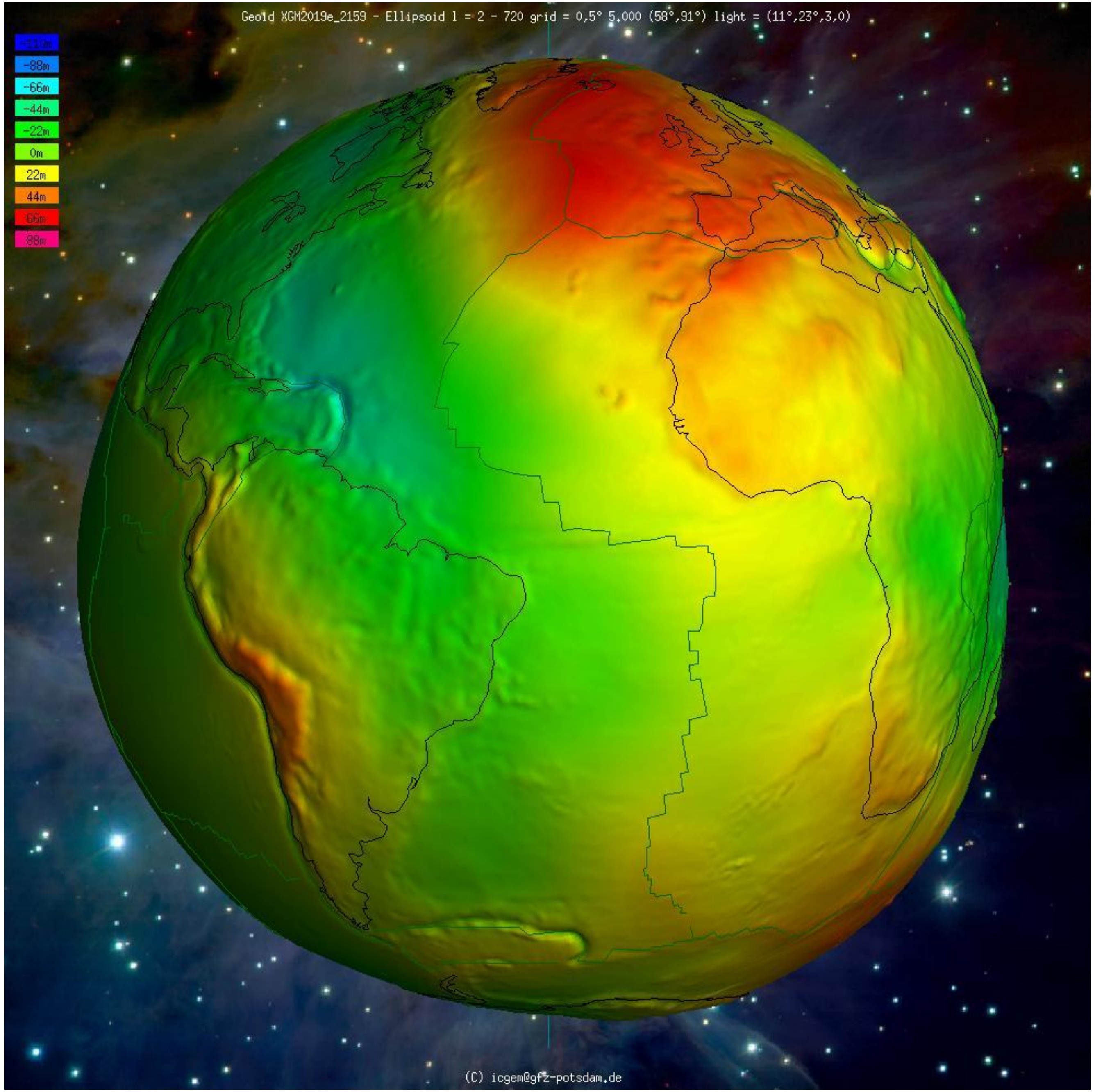


a fórmula

$$V = \frac{G}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \int\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}\left(a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\mathrm{sen}(m\lambda)\right)dm\right]$$

fica então

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\frac{1}{r^{n+1}}\left(A_{nm}\cos(m\lambda) + B_{nm}\,\mathrm{sen}(m\lambda)\right)P_{nm}(\theta)\right]$$


Geoid XGM2019e_2159 - Ellipsoid l = 2 - 720 grid = 0,5° 5,000 (58°,91°) light = (11°,23°,3,0)
-110m
-88m
-66m
-44m
-22m
0m
22m
44m
66m
88m
(C) icgem@gfz-potsdam.de