MAP 0313 - 2022 2° Semestre - IME USP
1ª Prova, IME-USP, aos 10 de outubro de 2022.

Instruções:

(i) As questões 1 e 2 desta prova valem cada uma 3 pontos, devem ser entregues, em um arquivo no formato pdf, não codificado e não compactado na página da disciplina no e-disciplinas em espaço destinado para isso até as 23 horas do dia 11/10/2022.

(ii) A questão 3 desta prova vale 4 pontos e devem ser entregue, em um arquivo no formato pdf, não codificado e não compactado na página da disciplina no e-disciplinas em espaço destinado para isso até as 13 horas do dia 19/10/2022.

(iii) Caso tenha problemas com o depósito do arquivo com a a solução da prova no e-disciplinas, envie um arquivo pdf (sem compactação, senha ou outras nuances estranhas) em um e-mail para garc341@gmail.com com o "assunto"*primeira prova de MAP0313* com a resolução.

(iv) Em uma questão com mais de um item, o estudante pode resolver um item sem ter resolvido os itens anteriores e poderá nessa solução usar propriedades enunciadas nos itens anteriores dessa questão, mesmo que não os haja demonstrado (ou o tenha feito de modo incorreto).

(v) A prova é com consulta a textos, cadernos e similares, conversar e trocar ideias com o professor e com os colegas não é proibida, resolver a prova deve ser, antes de tudo, uma atividade de aprendizado. Mas a redação da resolução das questões deve ser feita de modo *estritamente individual*. A não observância desta norma pode causar sérios problemas à nota da prova.

Questão 1 Considere a equação de diferenças

$$u_{k+3} = -\frac{u_k}{4} - \frac{u_{k+1}}{4} - u_{k+2},\ k \in \mathbb{N}.$$

(a) Determinar os $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$ para os quais a solução $u = (u_k)$ dessa equação que satisfaz $u_\ell = \beta_\ell,\ \ell = 0, 1, 2,$ é periódica e não constante.

(b) Prove que todas as soluções dessa equação são limitadas.

(c) Determine a solução geral de $u_{k+3} = -\frac{u_k}{4} - \frac{u_{k+1}}{4} - u_{k+2} + \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbb{N}.$

Questão 2 Seja $A = [a_{jk}]$ uma matriz real $m \times m$ tal que seus autovalores são $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ com $|\lambda_j| > |\lambda_{j+1}| > 0$, para todo $1 \leq j \leq m-1$.

(a) Mostre que $\lambda_j \in \mathbb{R}$, para todo $1 \leq j \leq m$.

(b) Para $1 \leq j \leq m$ considere v_j um autovetor de A associado a λ_j e seja $w = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m$.

(b-i) Determine a solução $u = (u_k)$ do problema de valor inicial

$$u_{k+1} = Au_k,\ k \in \mathbb{N},\ u_0 = w.$$

(b-ii) Suponha que $c_1 \neq 0$ e prove que, se $u = (u_k)$ é a solução obtida no item anterior então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq 0$ e $\lim_{k\to\infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\|} = |\lambda_1|$

Questão 3 Um jogo aleatório tem o seguinte formato, dados naturais $n \geq 2$ e um par $L > 0$, na etapa inicial, $t = 0$, você tem $\frac{L}{2} + n - 1$ créditos. A partir daí, ao passar da etapa t para a etapa $t+1$, com probabilidade $p \in (0,1)$ seu número de créditos é acrescido de 1 e com probabilidade $q = 1 - p$ é diminuído de $n - 1$.

O jogo acaba se em uma determinada etapa o seu número de créditos é $L + n - 1$ (aí você *ganha*) ou é menor ou igual a $n - 2$ (entãos você *perde*).

Para $\ell \in \{0, 1, \ldots, L+n-1\}$ seja u_ℓ a probabilidade de você perder o jogo dado que em alguma etapa você tem ℓ créditos (veja que $u_\ell = 1$ se $0 \leq \ell \leq n-2$ e $u_{L+n-1} = 0$).

(a) Prove que $u_\ell = pu_{\ell+1} + qu_{\ell-(n-1)}$. Reescreva esta equação e mostre que (u_k) satisfaz

$$u_{k+n} = \frac{1}{p} u_{k+n-1} - \frac{q}{p} u_k$$

e, como já observado antes, valem as condições $u_0 = u_1 = \ldots, u_{n-2} = 1$ e $u_{L+n-1} = 0$.

(b) Suponha que $n = 2$ e calcule p para que $u_{\frac{L}{2}+1} < \frac{1}{2}$ (veja que nesse caso na etapa inicial você tem $\frac{L}{2} + 1$ créditos).

(c) No caso $n = 2$ mostre que o problema acima tem sempre solução, para todo $L > 0$.

(d) Suponha que $L = n = 4$ e calcule p para que $u_5 < \frac{1}{2}$.