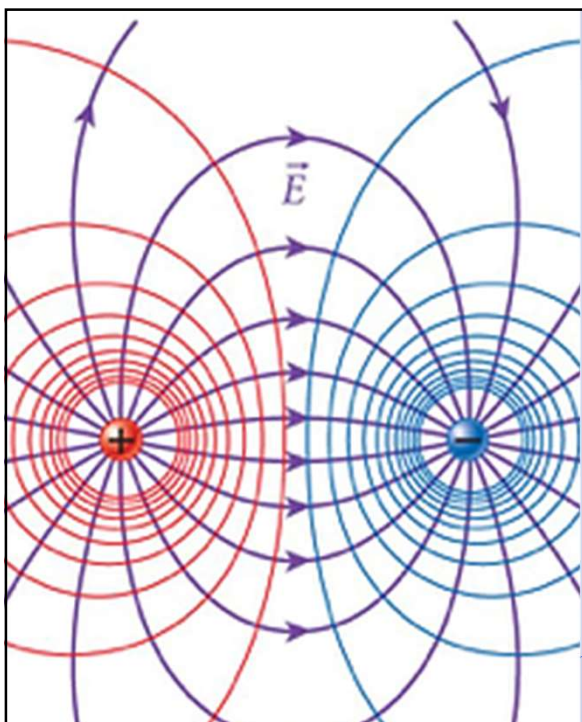




12

Potenciais 2

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. Ricardo A. Terini

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

12

13

Recordando

Potenciais escalar e vetor.

- Como, a partir de $\rho(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$, podemos encontrar os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ que sejam solução geral das Equações de Maxwell?

- Potencial escalar elétrico e potencial vetor magnético**

Valem nos regimes estático e dinâmico.

(I)

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$

(II)

$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$

- Equações (III) e (IV)** satisfazem eqs. (I) e (II) e todas as **eqs. de Maxwell**.

Conhecidos V e $\mathbf{A}$, elas permitem determinar ρ e $\mathbf{J}$.

(III)

$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho;$

(IV)

$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$

13

Potenciais escalar e vetor. Operador d'Alembertiano.

Recordando

14

• Exercício 2:

Mostre que as equações diferenciais para V e $\mathbf{A}$ (III e IV) podem ser escritas na forma mais simétrica:

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho;$$



onde

$$\left. \begin{aligned} \text{(V)} \quad \square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \text{(VI)} \quad \square^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned} \right\}$$

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\text{e } L \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$



H. Heine

Operador d'Alembertiano

14

Transformações de calibre

15

- *Problema:* As equações (I) e (II) não definem univocamente os potenciais...
- Podemos supor **condições extras** para V e $\mathbf{A}$, **que não alterem** $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, *i.e.*, se também forem soluções das equações (I) e (II)...
- Essa é a **Invariância de calibre**.
- Suponha, p. ex., as soluções $\mathbf{A}'$ e V' , em que se soma uma *função escalar* $\lambda(\mathbf{r}, t)$:

$$\therefore \left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \lambda, \\ V' &= V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

- Verifica-se, de fato, que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad \text{(I)}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad \text{(II)}$$

$$\bullet \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \lambda$$

$$\therefore \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \checkmark$$

$$\bullet \mathbf{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} =$$

$$= -\nabla V + \frac{\partial (\cancel{\nabla} \lambda)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial (\cancel{\nabla} \lambda)}{\partial t} =$$

$$\therefore \mathbf{E}' = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad \checkmark$$

15

16

Transformações de calibre. Calibre de Coulomb

(III)

- Assim, existem inúmeras soluções para os potenciais V e $\mathbf{A}$, associados aos mesmos valores de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.
- Podemos usar a invariância dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ com transformações de calibre a nosso favor, escolhendo as funções λ de modo a simplificar as equações.
- Fixação de calibre:** escolha de λ
- (I) No **Calibre de Coulomb**, escolhe-se a função λ de modo que: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. tal como na *magnetostática*.
- Com isso, a eq. (IV) fica:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho;$$

(IV)

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

$$\therefore \left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

- E, no caso da *magnetostática*:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad \text{3 eqs. de Poisson}$$

...cuja solução é (se $\mathbf{J} = 0$ p/ $r \rightarrow \infty$)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau'.$$

16

17

Transformações de calibre. Calibre de Coulomb

- No caso *eletrostático*, então:

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad \text{Eq. de Poisson}$$

...cuja solução é (se $V = 0$ p/ $r \rightarrow \infty$)

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r} d\tau'.$$

- Qualquer alteração na distribuição de cargas ρ afeta o potencial V a qualquer distância r , teoricamente *no mesmo instante!*
- Mas V não é mensurável, e, sim, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, nesse mesmo ponto.
- Mas $\mathbf{E}$ depende dos dois potenciais, e seu valor depende de uma *variação no tempo* do potencial $\mathbf{A}$. Porém, $\mathbf{A}$ é mais difícil de calcular...

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

17

18

Transformações de calibre. Calibre de Lorentz

- (II) No **Calibre de Lorentz**, escolhe – se:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right). \quad (\text{IV})$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho; \quad (\text{III})$$

- Com isso, pode-se eliminar o termo à direita da relação (IV) e o termo **L se anula** na equação (VI). Assim:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

- Da mesma forma, a eq. (III) fica:

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

- Utilizando o **operador d'Alembertiano**:

$$\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2,$$

$$(i) \quad \square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$(ii) \quad \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Equações de onda inhomogêneas
(e desacopladas)

Versão em 4 dimensões da eq. de Laplace

18

Potenciais retardados

- *Quais as soluções para as equações (i) e (ii)?*
- No caso *estático*, como vimos:

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J},$$

... com as soluções gerais conhecidas:

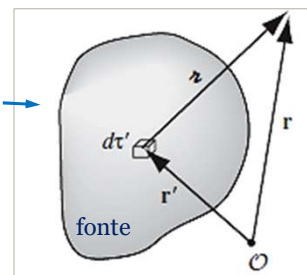
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau',$$

- As alterações (sinais) eletromagnéticos viajam à velocidade da luz. Então, no caso *dinâmico*, interessa o *status* da fonte num instante anterior t_r , quando o sinal foi emitido.

$$\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2,$$

$$(i) \quad \square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$(ii) \quad \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$



Tempo retardado

$$t_r \equiv t - \frac{r}{c}.$$

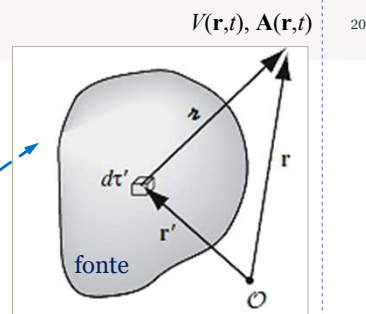
Retardo (tempo de r' a r)

19

Potenciais retardados

- Assim, as soluções gerais para os potenciais, para fontes que se alteram no tempo devem ser:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau', \quad A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau'.$$



$$t_r \equiv t - \frac{r}{c}.$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

- Como ρ e $\mathbf{J}$ são calculados num tempo anterior (t_r), eles são chamados **Potenciais retardados**.
- Quanto $> r$, $< r$ é o instante de tempo t_r retardado.
- Essas soluções só têm sentido no calibre de Lorentz, já que, no calibre de Coulomb, a informação é *instantânea*.
- Elas satisfazem as eqs. (i) e (ii) e o calibre de Lorentz, de fato?

- Vamos calcular o laplaciano de V ...

20

Potenciais retardados

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau', \quad A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau'.$$

- Inicialmente, o gradiente de V será:

$$\therefore \nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\nabla \rho) \frac{1}{r} + \rho \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau'$$

$$t_r \equiv t - \frac{r}{c}.$$

$$\text{e } \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t_r} \vec{\nabla} t_r = \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \vec{\nabla} r \right) = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{sendo } \dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} - \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right] d\tau', \quad \text{já que } \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2}$$

- Tomando o divergente:

$$\therefore \nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot (\nabla \dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \right) \right] - \left[\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \right] \right\} d\tau'$$

$$\text{Mas considerando que: } \nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \nabla r = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{e } \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}) \dots$$

21

22

Potenciais retardados

- ...Chegamos a:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{r} - 4\pi\rho\delta^3(\mathbf{r}) \right] d\tau' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t).$$

- ... o que confirma que o Potencial retardado *satisfaz a equação de onda inhomogênea*.
- Incidentalmente, essa dedução também se aplica a **tempos avançados** (futuros) e **Potenciais avançados**, em que se avalia *cargas e densidades de correntes* em instantes futuros t_a .
- $\therefore V_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_a)}{r} d\tau'$, $A_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_a)}{r} d\tau'$, sendo $t_a \equiv t + \frac{r}{c}$.
- Os potenciais *avançados* são inteiramente consistentes com as eqs. de Maxwell, porém violam o **princípio da causalidade**, que é sagrado na física.
- Eles sugerem que os potenciais **agora** dependem de qual será a carga e a **distribuição de corrente em algum momento futuro** ... I.e., o efeito viria antes da causa!

22

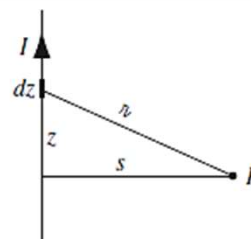
23

Potenciais retardados

• Exercício 3:

Um fio reto infinito transporta a corrente :

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0, \\ I_0, & \text{for } t > 0. \end{cases}$$



Assim, uma corrente constante I_0 é acionada abruptamente quando $t = 0$.

- Encontre os campos elétrico e magnético gerados.
- Repita o problema para o caso em que $I_0 = kt$.

23