Prova 1 - Matemática I - CCM - 04/10/2022

PARTE 2

① (a) Use as propriedades da integral que estudamos em sala para provar a igualdade

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)\,dx$$

(b) Generalize o resultado anterior encontrando e provando uma igualdade para

$$\int_a^b f(Ax+B)\,dx$$

O que acontece se $A=0$?

(c) Calcule

$$\int_{34}^{37} \left(\frac{x}{3}+17\right)^{13} dx .$$

② Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função periódica de período $P>0$ e integrável em todo intervalo. Assuma que f é ímpar. Defina $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Mostre que $g(nP)=0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

(b) Mostre que g é par e é periódica de período P.

③ Dadas duas funções $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, integráveis em todo intervalo e tais que:

(i) f é ímpar e g é par,

(ii) $f(5)=7$, $f(0)=0$,

(iii) $g(x)=f(x+5)$ e $f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Mostre que

(a) $f(x-5)=-g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$,

(b) $\int_0^5 f(t)\,dt = 7$,

(c) $\int_0^x f(t)\,dt = g(0)-g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

④ Mostre que $\displaystyle\int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{1+t}\, dt > 0$, para todo $x > 0$.

⑤ Mostre que, para $h \neq 0$, valem as seguintes igualdades para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) $$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \frac{\text{sen}(h/2)}{h/2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

(b) $$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\text{sen}(h/2)}{h/2} \cdot \text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

⑥ Prove a fórmula $\text{sen}\, 3x = 3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x$ e use-a para calcular

$$\int_0^x \text{sen}^3 t\, dt.$$

(7) (a) Calcule as integrais abaixo, para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \,, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \,.$$

(b) Use (a) para calcular, para $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m^2 \neq n^2$, as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx \,, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \,.$$

(c) Mostre que, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = 0 \,.$$

(d) Calcule, para $n \in \mathbb{Z}$, as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx \,, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx \,.$$

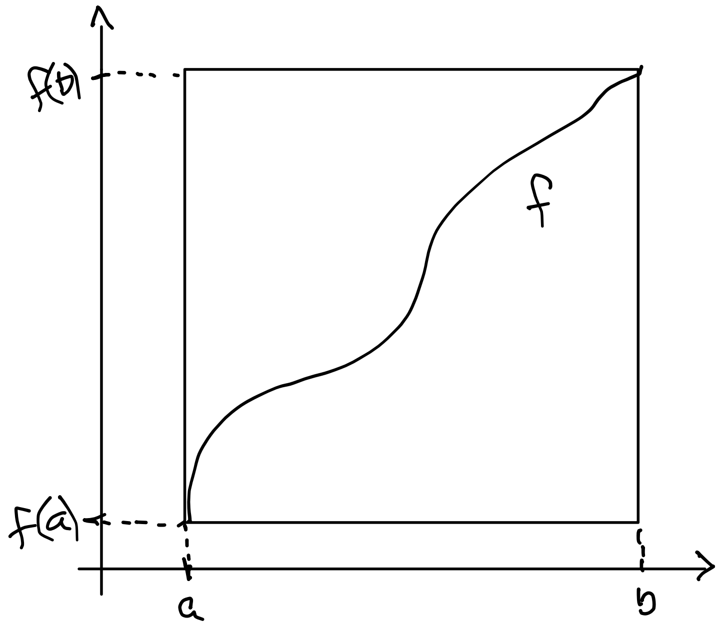
⑧ Mostre que

$$\int_1^{a} \frac{1}{t}\,dt + \int_1^{b} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt$$

⑨ (a) Suponha que f é crescente em $[a,b]$.

Mostre que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x)\,dx .$$



(b) Calcule

$$\int_0^{x} \operatorname{sen}^{-1} x \, dx \quad \text{para} \quad x \in [0, \pi/2] .$$

10 Enuncie e prove um resultado que use indução. Quanto mais interessante for o resultado, mais interessante será a nota do exercício.