Prova 1 - Matemática I - CCM - 04/10/2022

PARTE 1

Números diádicos

(1) Mostre que o conjunto $\{0,1\}$ com as operações tabeladas a seguir formam um corpo.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

(2) Representação binária dos naturais.

(a) Mostre que todo número natural $x \in \mathbb{N}$ pode ser representado de maneira única na forma

$$x = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

onde $a_k \in \{0,1\}$ para $k = 0, \dots, n-1$, e $a_n = 1$.

Ex: $15 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ e $24 = 2^4 + 2^3$

A "reprepresentação binária" do número x é a sequência finita

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 .$$

Ex: $15 = 1111$ e $24 = 11000$

- A partir de agora vamos usar o sinal de $=$ como acima para indicar representações binárias.

(b) Descreva um algoritmo para somar representações binárias, isto é, se $x = a_n \cdots a_0$, $y = b_m \cdots b_0$ e $x+y = c_k \cdots c_0$, descreva um algoritmo para calcular $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k$ a partir dos a_i, b_j. Veja o exemplo. Inclua outros exemplos.

"sobe um"

<u>Ex</u>:

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 24 \\ \hline 39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle +1} \\ 1111 \\ +\ 11000 \\ \hline 100111 \end{array}$$

(c) Faça o mesmo para o produto. Inclua exemplos.

③ Agora fazemos algo "exótico" talvez. Vamos considerar o conjunto de todas as sequências infinitas (para a esquerda):

$$D = \{ (\ldots a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0) : a_k \in \{0,1\} \} .$$

Podemos incluir os naturais em D simplesmente juntando "zeros à esquerda":

$$15 = 1111 = \ldots 0001111 .$$

(a) Defina, com cuidado, as operações $+$ e $\cdot$ em D de forma a estender as operações com representações binárias do exercício ②, usando, claro, o "sobe 1", possivelmente um número infinito de vezes:

infinitos "sobe um"

$$\begin{array}{rr}
 & \cdots +1+1+1+1+1 \\
 & \ldots 111 \ldots 111111 \\
+ & \ldots 000 \ldots 000001 \\
\hline
 & \ldots 000
\end{array}$$

(b) O exemplo acima mostra que, em D com essa soma, existe o número -1. Mostre que existe uma função injetiva $\varphi : \mathbb{Z} \to D$ que respeita as operações $+$ e $\cdot$, isto é, tal que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \quad \text{e} \quad \varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

No jargão matemático, D com as operações $+$ e $\cdot$ definidas acima é um "anel" e $\varphi: \mathbb{Z} \to D$ é um "homomorfismo" injetivo de aneis.

(c) Mostre que D é não-enumerável. Conclua que o homomorfismo φ do item (b) não pode ser um "isomorfismo", isto é, não pode ser sobrejetivo.

4 Problema Extra

Para cada $x \in D$ defina $v(x)$ como a posição do primeiro 1 em x, da direita para a esquerda:

$$v(\ldots 0001111) = 0 \quad \text{e} \quad v(\ldots 1011000) = 3$$

Defina $|x|_2 = \dfrac{1}{2^{v(x)}}$: $\quad |\ldots 1111|_2 = 1 \quad$ e $\quad |\ldots 1011000|_2 = \dfrac{1}{2^3}$

(a) Mostre que o "valor absoluto" $|\cdot|_2$ tem as seguintes propriedades:

(i) $|x|_2 \geqslant 0$ e $|x|_2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

(ii) $|x \cdot y|_2 = |x|_2 \cdot |y|_2$

(iii) $|x+y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\}$

Note que $|x|_2 \leq 1$ para todo $x \in D$ e, em particular, para todo $x \in \varphi(\mathbb{Z})$, para φ como em (b). $|\cdot|_2$ é chamado um valor absoluto "não-arquimediano".

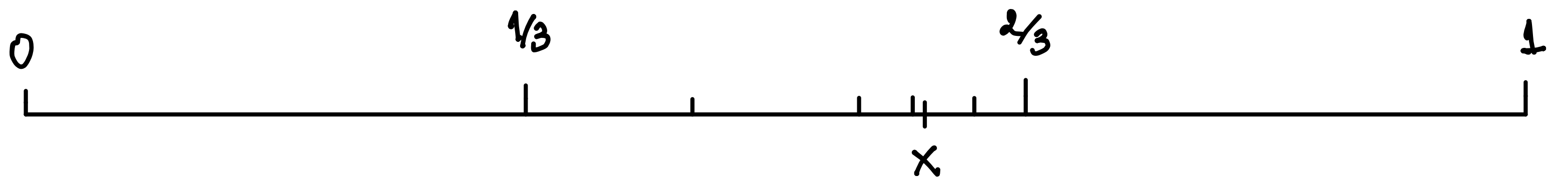
(b) Mostre que $x \in D$ tem inverso multiplicativo se e somente se $|x|_2 = 1$.

(c) É possível construir um corpo a partir de D, em analogia a como se constroem os racionais $\mathbb{Q}$ a partir dos inteiros $\mathbb{Z}$. Faça-o.

O Conjunto Ternário de Cantor

Agora voltamos a considerar nossos velhos conhecidos, os números reais, em particular, os reais no intervalo $[0,1]$.

A "representação ternária" de um número real $x \in [0,1]$ é feita, geometricamente, como indicado na figura



$$x = 1210\ldots$$

(a) Descreva, em palavras, o que a figura (apenas) indica.

(b) Argumente que isso é equivalente a escrever x como uma soma infinita

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_2}{3^3} + \cdots$$

onde $a_k \in \{0,1,2\}$.

(c) Mostre que, dada uma sequência infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, com $a_k \in \{0,1,2\}$, a soma em (b) "faz sentido" como o supremo de somas finitas, e portanto pode ser tomada como um número real bem definido. Chamamos $x = a_1 a_2 a_3 \ldots$ a "representação ternária" de $x \in [0,1]$.

(d) Ao contrário do que aconteceu com as representações binárias de inteiros nos primeiros problemas dessa prova, as representações ternárias de reais em $[0,1]$ não são sempre únicas. Descreva os números reais $x \in [0,1]$ cujas representações ternárias não são únicas e explique como são essas representações.

(e) Descreva geometricamente o conjunto $C \subset [0,1]$ de números reais que possuem uma representação ternária cujos dígitos são apenas $\{0,2\}$. Faça uma lista (infinita) de números racionais que estão em C. Seja o mais caprichoso que conseguir, isto é, tente listar a maior quantidade de racionais que puder.

(d) Prove que C é não-enumerável. Entre outras coisas, isso mostra que a lista de (c) não lista todos os números em C.

(e) Mostre que a função $f: C \to [0,1]$

$$f(a_1 a_2 a_3 \dots)_3 = \left(\frac{a_1}{2}\,\frac{a_2}{2}\,\frac{a_3}{2} \dots\right)_2$$

é sobrejetiva. Aqui $(a_1 a_2 a_3 \dots)_3$ denota a representação ternária de um número em $C \subset [0,1]$ e $(b_1 b_2 b_3 \dots)_2$ denota a representação <u>binária</u> de um número real em $[0,1]$. Esta representação é feita de forma análoga à representação ternária, só que dividimos os intervalos ao meio à cada passo (ao invés de dividirmos em três partes iguais, como na representação ternária).

Números reais

Definimos um "corte de Dedekind" como um par ordenado $\xi = (A, B)$ de subconjuntos dos números racionais, satisfazendo

(i) $A, B \subset \mathbb{Q}$, $A, B \neq \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{Q}$,

(ii) A não contém elemento máximo,

(iii) $x \in A$, $y \in B \Rightarrow x < y$.

Definimos uma "ordem" no conjunto de cortes por

$$(A, B) \prec (C, D) \iff A \subsetneq C$$

isto é, se $A \subset C$ e existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in C$, mas $x \notin A$.

(a) Mostre que $\prec$ é, de fato, uma ordem, isto é,

(i) Dados dois cortes $\xi \neq \eta$, então $\xi \prec \eta$ ou $\eta \prec \xi$, e

(ii) Se $\xi \prec \eta$ e $\eta \prec \zeta$, então $\xi \prec \zeta$.

(b) Mostre que $\mathfrak{D} = \{\xi : \xi$ é um corte de Dedekind$\}$, com a ordem $<$, satisfaz o Axioma da Cota Superior Mínima, isto é, que todo subconjunto de $\mathfrak{D}$ que é limitado superiormente, tem uma cota superior mínima.

Para cada racional $p/q \in \mathbb{Q}$ definimos o corte associado a p/q por

$$\xi_{p/q} = (A_{p/q}, B_{p/q}) \quad \text{onde} \quad A_{p/q} = \{x \in \mathbb{Q} : x < p/q\}$$

(c) Define duas operações

$$\oplus : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \quad \text{e} \quad \odot : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$$

de modo que

$$\xi_{p/q} \oplus \xi_{m/n} = \xi_{p/q + m/n} \quad \text{e} \quad \xi_{p/q} \odot \xi_{m/n} = \xi_{\frac{p}{q} \cdot m/n}$$

(d) Mostre que existe uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathcal{O}$ que é um "isomorfismo de corpos ordenados", isto é,

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \\ f(x\cdot y) = f(x) \odot f(y) \end{array}\right\} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

e

$$x < y \implies f(x) \prec f(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$