Questão 1:

a) (1.0)

Para calcularmos o potencial no ponto $P = (x, 0, 0)$, com $x > L$, fazemos

$$dV_P = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Como o fio retilínio de densidade linear de carga λ se encontra no eixo x, temos:
$dq' = \lambda\, d\ell' = \lambda\, dx'$ (dx' pois o fio encontra-se apenas no eixo x. E incluimos ' pois iremos integrar para $0 \leq x' \leq L$).
Queremos calcular o potencial no ponto $P = (x, 0, 0)$, logo $\vec{r} = x\hat{x}$. Para finalizar, temos que $\vec{r}' = x'\hat{x}$.

Logo,

$$dV_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx'}{|(x - x')\hat{x}|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx'}{\sqrt{(x - x')^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx'}{x - x'} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_P = \int dV_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx'}{x - x'} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(x - x')\Big|_0^L \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V_P(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{x}{x - L}\right)}.$$

b) (1.0)

Queremos calcular o componente x do campo elétrico. Temos que o campo elétrico é obtido através do potencial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V.$$

Logo, o componente x do campo elétrico será obtido por:

$$E_x = \vec{E} \cdot \hat{x} = -\vec{\nabla} V \cdot \hat{x} = -\frac{dV}{dx}.$$

Então, usando o resultado obtido no item anterior,

$$E_x = -\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{x}{x - L}\right)\right] = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{x}{x - L}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{x(x-L)}.$$

Consequentemente, o componente x da força será dado por $F_x = -q\,E_x \rightarrow$

$$\boxed{F_x(x) = \frac{-q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{x(x-L)}}$$

c) (0.5)

A energia adquirida pela carga elétrica $-q$ trazida do infinito é:

$$U = -q(V_P - V_\infty) = -qV_P \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{U = \frac{-q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{x}{x-L}\right)}.$$

Questão 2

a) (1.0)

Por simetria, o campo elétrico é radial e só depende da distância r. Logo, podemos usar Lei de Gauss.

$$\iint_C \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

sendo C uma casca cilíndrica de raio $a < r < b$ e altura $h < L$. O campo elétrico nas tampas desse cilíndrico são perpendiculares ao vetor $\hat{n}_{\text{tampa}}$, logo, ficamos com:

$$\iint_{\text{lateral}} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}dA = E(r)\iint_{\text{lateral}} dA = E(r)2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{L\,r}},$$

onde definimos a carga por unidade de comprimento $\lambda = q/L$.

b) (1.0)

Para calcularmos a capacitância desse sistema, precisamos calcular a diferença de potencial entre os cilíndros $\Delta V = V_b - V_a$.

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\hat{r}}{r}\cdot dr\hat{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Assim, a capacitância é calculada como sendo $C = |\frac{q}{\Delta V}|$, onde $q = \lambda L$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}}.$$

c) (0.5)

A energia dentro do cilíndro pode ser calculada de várias formas. Uma vez que temos a diferença de potencial e a capacitância, podemos calcular a energia por

$$U = \frac{1}{2}C\,\Delta V^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Questão 3

a) (1.5)

Para calcular o campo elétrico de um plano infinito, basta fazermos um cilíndro que cruza a superfície do plano e tenha área transversal A. Escolhendo o sistema de coordenadas em que o eixo z aponta para cima, temos que, por simetria, o campo elétrico vai apontar para cima na região acima do plano, e apontar para baixo na região abaixo do plano. Logo, pela Lei de Gauss, ficamos com:

$$\iint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_{\text{cima}} \vec{E}_{\text{cima}}\cdot\hat{n}_{\text{cima}}\,dA + \iint_{\text{baixo}} \vec{E}_{\text{baixo}}\cdot\hat{n}_{\text{baixo}}\,dA =$$

$$= \iint_{\text{cima}} E\,\hat{z}\cdot\hat{z}\,dA + \iint_{\text{baixo}} E(-\hat{z})\cdot(-\hat{z})dA = 2E\iint dA = 2EA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} =$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z}}.$$

Dessa forma, temos que o campo elétrico é

- Campo elétrico devido ao plano em $z = a$
    - $\vec{E} = -\frac{3}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}$, para $z > a$
    - $\vec{E} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}$, para $z < a$

- Campo elétrico devido ao plano em $z = 0$
  - $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}$, para $z > 0$
  - $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}$, para $z < 0$

  Portanto, para a região
- $z < 0$:

$$\vec{E} = \frac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{z} + \left(\frac{-\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}\right) \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}}$$

- $0 < z < a$:

$$\vec{E} = \frac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{2\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{z} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{5}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}}$$

- $z > a$:

$$\vec{E} = \frac{-3\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{2\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{z} \rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}}$$

b) (1.0)

A diferença de potencial entre os pontos $z = a/2$ e $z = 2a$ deve ser calculada de forma separada, uma vez que o campo elétrico não é contínuo.

$$\Delta V = V_{2a} - V_{a/2} = (V_{2a} - V_a) + (V_a - V_{a/2}) =$$

$$= -\int_a^{2a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \left(-\int_{a/2}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}\right) =$$

$$= -\int_a^{2a} \left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z} \cdot \hat{z}\, dz\right) + \left[-\int_{a/2}^{a} \left(\frac{5}{2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}\right)\right]\hat{z}\, dz \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta V = -\frac{3}{4}\frac{a\sigma_0}{\epsilon_0}}$$

Questão 4

a) (1.0)

Como vimos na questão anterior, o campo elétrico de um plano infinito (e as placas do capacitor podem ser consideradas um) é dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} = \frac{Q}{2A\epsilon_0}\hat{n},$$

sendo $\hat{n}$ o versor que dá o sentido do campo.

Temos que para a placa superior do capacitor (em $y = d$), o campo é

$$\vec{E}_{\text{sup}} = \frac{Q}{2A\epsilon_0}(-\hat{y}),$$

enquanto que para a placa inferior do capacitor (em $y = 0$) o campo é

$$\vec{E}_{\text{inf}} = \frac{-Q}{2A\epsilon_0}\hat{y}.$$

Portanto, o campo elétrico dentro do capacitor caso não houvesse o material dielétrico seria dado por:

$$\vec{E} = -\frac{Q}{A\,\epsilon_0}\hat{y}.$$

Porém, sabemos que, na presença de um material dielétrico de constante dielétrica κ, o campo elétrico em seu interior é atenuado.
Logo, ficamos com:

- Região 1 (vácuo)

$$\boxed{\vec{E}_1 = -\frac{Q}{A\,\epsilon_0}\hat{y}}$$

- Região 2 (dielétrico)

$$\boxed{\vec{E}_2 = -\frac{Q}{A\,\epsilon_0\,\kappa}\hat{y}}$$

- Região 3 (vácuo)

$$\boxed{\vec{E}_3 = -\frac{Q}{A\,\epsilon_0}\hat{y}}$$

b) (1.0)

A diferença de potencial entre as placas é calculada por

$$\Delta V = V_d - V_0 = -\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$

porém o campo elétrico não é contínuo nesse intervalo. Por isso, temos que dividir em três integrais de caminho.

$$V_d - V_0 = (V_d - V_{d-x}) + (V_{d-x} - V_{d-y-x}) + (V_{d-y-x} - V_0)$$

$$\to \Delta V = -\int_{d-x}^{d} \vec{E}_1 \cdot \hat{y}\, dy - \int_{d-y-x}^{d-x} \vec{E}_2 \cdot \hat{y}\, dy - \int_{0}^{d-y-x} \vec{E}_3 \cdot \hat{y}\, dy$$

$$\Delta V = \frac{Q}{A\,\epsilon_0}[d-(d-x)] + \frac{Q}{A\,\epsilon_0\,\kappa}[d-x-(d-y-x)]+$$

$$+\frac{Q}{A\,\epsilon_0}[d-y-x-0]$$

$$\Delta V = \frac{Q}{A\,\epsilon_0}x + \frac{Q}{A\,\epsilon_0\kappa}y + \frac{Q}{A\,\epsilon_0}(d-y-x) \to$$

$$\to \Delta V = \frac{Q}{A\,\epsilon_0}\left(x + \frac{y}{\kappa} + d - y - x\right) \to$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{A\,\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)y + d\right]}$$

c) (0.5)

Para a calcular a capacitância, basta fazermos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\,\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)y + d\right]}$$

$$\boxed{C = \frac{A\,\epsilon_0}{\left[\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)y + d\right]}}$$

ou

$$\boxed{C = \frac{\kappa\,\epsilon_0\,A}{\kappa(d-y)+y}}$$