MAP 0313 - 2022 2° Semestre - IME USP
Lista sobre equações de diferença

Questão 1 Sejam $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ e considere a equação de diferenças linear de primeira ordem em uma dimensão

$$u_{k+1} = a(k)u_k + b(k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Defina $b(-1) \doteq 0$ e prove que a solução geral desta equação é

$$u_k = \alpha \prod_{j=0}^{k-1} a(k) + b(k-1) + \sum_{j=0}^{k-2} \left(b(j) \left[\prod_{\ell=j+1}^{k-1} a(\ell) \right] \right),\ k \in \mathbb{N},$$

em que α é um real arbitrário.

Questão 2 Suponha que $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que existe um $M > 0$ para o qual

$$\prod_{j=0}^{k} |a_j| \leq M,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Prove que toda solução da equação de diferenças

$$u_{k+1} = a(k)u_k,\ k \in \mathbb{N}$$

é limitada.

Questão 3 Considere a equação de diferenças

$$u_{k+4} = \frac{1}{2}[(1-2\alpha)(u_{k+3} + u_{k+1}) + (\alpha - 2)u_{k+2} + \alpha u_k],\ k \in \mathbb{N},$$

em que α é um número real.

(a) Mostre que $u_k = \frac{1}{2^k}$ e $v_k = (-\alpha)^k$ são soluções desta equação.

(b) Suponha que $|\alpha| \leq 1$ e $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Prove que então todas as soluções desta equação são limitadas. Determine, se existirem, as soluções periódicas desta equação (diferentes da solução identicamente nula).

(c) Faça $\alpha = \frac{-1}{2}$ e decida se existem soluções desta equação que não são limitadas. Justifique sua resposta.

Questão 4 Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{k+3} = u_k + u_{k+1} - u_{k+2}, \ k \in \mathbb{N} \\ u_0 = \beta_0 \\ u_1 = \beta_1 \\ u_2 = \beta_2, \end{cases} \tag{1}$$

com $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determine os $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$ para os quais a solução deste problema é limitada.

(b) Determine os $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$ para os quais a solução deste problema é periódica e não é constante.

(c) Considere agora a equação não homogênea

$$v_{k+3} = v_k + v_{k+1} - v_{k+2} + c^k, \ k \in \mathbb{N},$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(i) Mostre que, para $c \in (-1, 1)$, se $u = (u_k)$ é a solução de (1) e $v = (v_k)$ é a a solução da equação não homogênea dada com $u_j = v_j$, se $j \in \{0, 1, 2\}$, então $\lim\limits_{k \to \infty} (u_k - v_k) = 0$.

(ii) Prove que se $|c| > 1$ então todas as soluções $v = (v_k)$ desta equação não homogênea satisfazem $\lim\limits_{k \to \infty} |v_k| = +\infty$.

(iii) Analise a situação para $c = 1$ e $c = -1$.