Lista II

1 Observações:

- Sempre baixe a versão mais recente diretamente do site da disciplina.
- Caso encontre algum erro nos enunciados ou tenha dúvidas sobre os problemas, por favor comunique ao monitor[1].
- As monitorias serão das 18h até 19h nas quartas, na sala 206C (sala de aula da turma da professora Luciana).

2 *Ondas:*

De forma geral, uma onda ψ irá satisfazer a *Equação de Ondas:*

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0 \tag{1}$$

Onde o símbolo ∇ representa o gradiente e ∇^2 é o operador Laplaciano:

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag{2}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{3}$$

Logo, uma onda pode ser definida como um objeto que satisfaz a Equação de Ondas (Equação 1). Vocês irão ver essa equação aparecer nos mais diversos contextos: em eletromagnetismo, podemos verificar que os campos eletromagnéticos satisfazem uma equação de onda (logo a luz em si constitui uma onda!), já na relatividade geral, podemos trabalhar no domínio de gravidade fraca, e as equações de campo de Einstein mostram que nesse domínio as perturbações no espaço-tempo podem produzir as chamadas **ondas gravitacionais**. Divertido, né mesmo?! Portanto, levem a sério os conceitos aprendidos aqui, pois estes serão de suma importancia para o resto da carreira de vocês, e poderão ser utilizados nos mais diversos contextos.

[1]Email: alberto.jonatas.bezerra@usp.br

Problemas conceituais:

1) Uma corda uniforme, de $20m$ de comprimento e massa de $2kg$, está esticada sob uma tensão de $10N$. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de $3cm$ e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de $1,5cm$ para cima.

   (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda.

   (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade.

   (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

2) Desprezando efeitos de tensão superficial, pode-se mostrar que ondas na superfície da água, com comprimento de onda λ muito menor que a profundidade da água, propagam-se com velocidade de fase v_ϕ dada por:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{4}$$

Onde g é a aceleração da gravidade. Mostre que a velocidade de grupo correspondente é:

$$v_g = \frac{1}{2} v_\phi \tag{5}$$

3) Duas ondas transversais de mesma frequência $\mu = 100s^{-1}$ são produzidas num fio de aço de $1mm$ de diâmetro e densidade $8g/cm^3$, submetido a uma tensão $T = 500N$. As ondas são dadas por:

$$y_1 = A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{6}$$
$$y_2 = 2A\sin\left(\omega t - kx\right) \tag{7}$$

Onde $A = 2mm$. Com isso, responda:

(a) Escreva a expressão da onda harmônica progressiva resultante da superposição dessas duas ondas.

(b) Calcule a intensidade da resultante.

(c) Se fizemos variar a diferença de fase entre as duas ondas, qual é a razão entre os valores máximo e mínimo possíveis da intensidade da resultante?

4) A corda mi de um violino tem uma densidade linear de $0,5g/m$ e está sujeita a uma tensão de $80N$, afinada para uma frequência $\mu = 660Hz$. Responda:

(a) Qual é o comprimento da corda?

(b) (b) Para tocar a nota lá da escala seguinte, de frequência 880 Hz, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração f de seu comprimento. Qual é o valor de f?

Problemas intermediários:

5) Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares diferentes μ_1 e μ_2, estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo dos x e a origem O no ponto de junção, sendo y o deslocamento transversal da corda. Tal arranjo pode ser visualizado na Figura 5

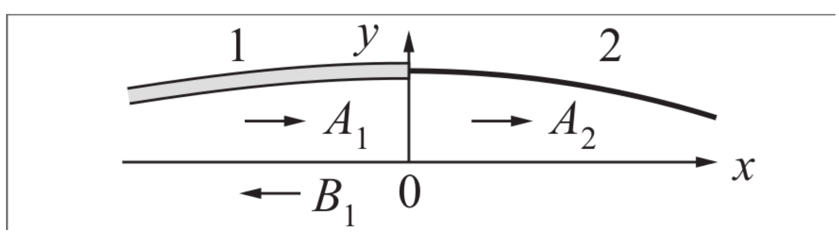

Figura 1: Ondas mudando de meio.

Uma onda harmônica progressiva, $y_i = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$, viajando na corda 1 ($x < 0$), incide sobre o ponto de junção, fazendo-o oscilar com frequência angular ω. Isto produz na corda 2 ($x > 0$) uma onda progressiva de mesma frequência, $y_t = A_2 \cos(k_2 x - \omega t)$ (onda transmitida), e dá origem, na corda 1, a uma onda que viaja em sentido contrário,

$y_r = B_1 \cos(k_1 x + \omega t)$ (onda refletida). Dada a onda incidente y_1, de amplitude A_1, desejam-se obter a amplitude de reflexão $\rho = B_1/A_1$ e a amplitude de transmissão $\tau = A_2/A_1$.

(a) Dada a tensão T da corda, calcule as velocidades de propagação v_1 e v_2 nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda k_1 e k_2.

(b) O deslocamento total na corda 1 é $y_i + y_r$, e na corda 2 é y_t. Mostre que, no ponto de junção $x = 0$, deve-se ter $y_i + y_r = y_t$.

(c) Aplicando a 3ª lei de Newton ao ponto de junção $x = 0$, mostre que, nesse ponto, deve-se ter também $(\partial/\partial x)(y_i + y_r) = (\partial/\partial x)y_t$.

(d) A partir de (b) e (c), calcule as amplitudes de reflexão e transmissão ρ e τ, em função das velocidades v_1 e v_2. Discuta o sinal de ρ.

6) No problema anterior, a refletividade r da junção é definida como a razão da intensidade da onda refletida para a intensidade da onda incidente, e a transmissividade t como a razão da intensidade transmitida para a intensidade incidente.

(a) Calcule r e t.

(b) Mostre que $r + t = 1$, e interprete esse resultado.

3 *Ondas sonoras:*

Aqui se encontra justamente uma aplicação da Equação de Ondas (Equação 1): podemos verificar que as ondas sonoras (ondas de pressão no ar atmosférico) satisfazem tal equação.

Problemas conceituais:

1) O alto-falante de um aparelho de som emite $1W$ de potência sonora na frequência $\mu = 100Hz$. Admitindo que o som se distribui uniformemente em todas as direções, determine, num ponto situado a $2m$ de distância do alto-falante:

(a) O nível sonoro em db.

(b) A amplitude de pressão.

(c) A amplitude de deslocamento.

(d) Tome a densidade do ar como $1,3kg/m^3$ e a velocidade do som como $340m/s$. A que distância do alto-falante o nível sonoro estará $10db$ abaixo do calculado em (a)?

2) Que comprimento deve ter um tubo de órgão aberto num extremo e fechado no outro para produzir, como tom fundamental, a nota dó da escala média, $\mu = 262Hz$, a 15^oC, quando a velocidade do som no ar é de $341m/s$? Qual é a variação de frequência $\Delta\mu$ quando a temperatura sobe para 25^oC?

3) Dois trens viajam em sentidos opostos, sobre trilhos, com velocidades de mesma magnitude. Um deles vem apitando. A frequência do apito percebida por um passageiro do outro trem varia entre os valores de $348Hz$, quando estão se aproximando, e 259 Hz, quando estão se afastando. A velocidade do som no ar é de $340m/s$.

(a) Qual é a velocidade dos trens (em km/h)?

(b) Qual é a frequência do apito?

4) Numa estrada de montanha, ao aproximar-se de um paredão vertical que a estrada irá contornar, um motorista vem buzinando. O eco vindo do paredão interfere com o som da buzina, produzindo cinco batimentos por segundo. Sabendo-se que a frequência da buzina é de 200 Hz e a velocidade do som no ar é de 340 m/s, qual é a velocidade do carro (em km/h)?

Problemas intermediários:

5) Uma fonte sonora fixa emite som de frequência μ_0. O som é refletido por um objeto que se aproxima da fonte com velocidade u. O eco refletido volta para a fonte, onde interfere com as ondas que estão sendo emitidas, dando origem a batimentos, com frequência $\Delta\mu$. Mostre que é possível determinar a magnitude $|u|$ da velocidade da fonte móvel em função de $\Delta\mu$, μ_0 e da velocidade do som v. O mesmo princípio é utilizado (com ondas eletromagnéticas em lugar de ondas sonoras) na detecção do excesso de velocidade nas estradas, com auxílio do radar.

Desafio:

6) Neste exercício, vamos discutir uma onda sonora no espaço tridimensional:

   (a) Mostre que, para uma onda sonora harmônica de frequência angular ω, em três dimensões, num fluido cuja densidade de equilíbrio é ρ_0, o deslocamento $\vec{u}$ (que neste caso, é um vetor!) está relacionado com a pressão p por:

$$\nabla p = \rho_0 \omega^2 \vec{u} \tag{8}$$

   (b) Considere uma onda sonora harmônica que se propaga no semiespaço $x > 0$, com $p = p(x, y, z, t)$, e suponha que o plano $x = 0$ é uma parede fixa, rígida. Mostre, utilizando o resultado da parte (a), que p tem de satisfazer a condição de contorno $\partial p / \partial x = 0$ para $x = 0$, qualquer que seja t. Em particular, isto vale na extremidade fechada de um tubo de órgão.

4 Errata e comentários

Comentarei abaixo eventuais erros e comentários/dicas sobre os exercícios propostos que possam surgir durante as monitorias.

- Recomendo fortemente que façam o exercício 5 sobre ondas, pois nele vocês irão aprender a lidar com ondas que estão mudando de meio. Esse tipo de problema é muito recorrente em eletromagnetismo e também em problemas de mecânica quântica, nos quais envolvem partículas incidindo em barreiras de potenciais. Logo, as ideias aprendidas aqui são muito úteis no futuro.

- Também recomendo fazerem o exercício 6 de ondas, que lida com uma onda sonora no espaço tridimensional.

- Havia um pequeno erro de digitação na equação de ondas (Equação 1). Eu havia colocado ∇ ao invés de ∇^2. Já foi corrigido.