DEFORMAÇÃO - CONCEITUAÇÃO BÁSICA

Ginaldo A. da C. Campanha

Instituto de Geociências
Universidade de São Paulo

-2022 -

Deformação -> resultado da aplicação de tensões sobre as rochas

Deformação ->

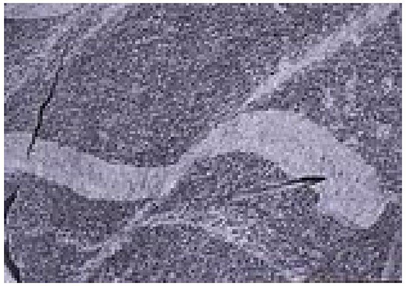
rúptil

Fraturamento, quebra, brechação, perda de coesão

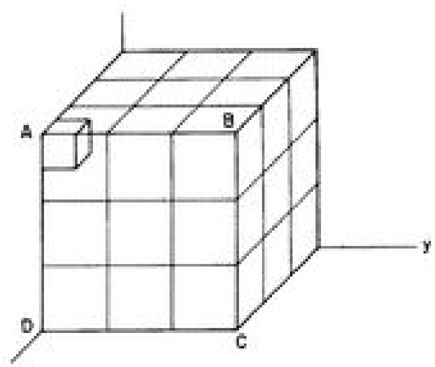
dúctil

sem perda de coesão e continuidade dos corpos

ocorre > profundidade >T >P

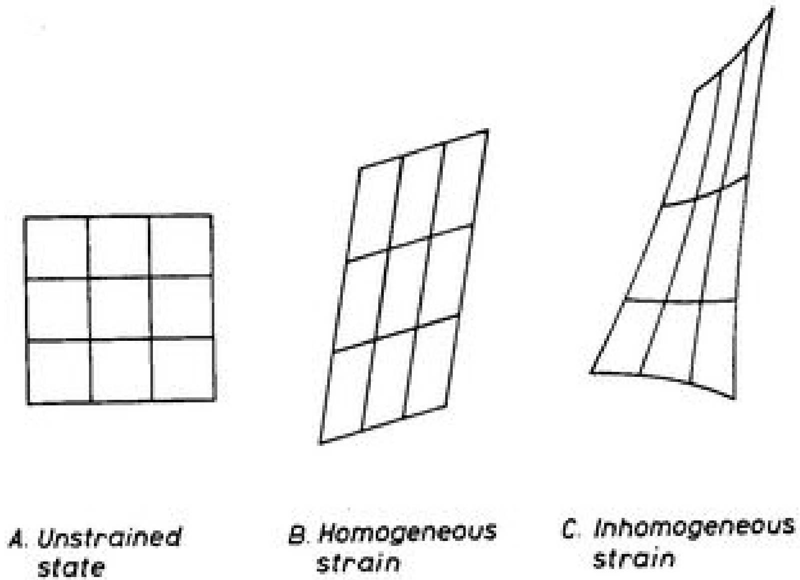


Deformação dúctil: mudança na configuração geométrica dos corpos, entre um estado inicial e um final



Estado indeformado.

(Ragan, 1973, Fiori, 1997)



Ramsay, 1967

Deformação **homogênea** -> as linhas que eram retas e paralelas permanecem retas e paralelas

Deformação **heterogênea** -> as linhas que eram retas e paralelas não permanecem retas e paralelas deformação infinitesimal -> pequenas deformações

deformação finita -> grandes deformações deformações

Deformação infinitesimal

- Aplica-se a pequenas deformações (no limite tendendo a zero)

- É matematicamente simplificada com relação à definição de deformação finita (grandes deformações, ou deformações acumuladas)

- É bastante utilizada em engenharia, onde as deformações normalmente são pequenas.

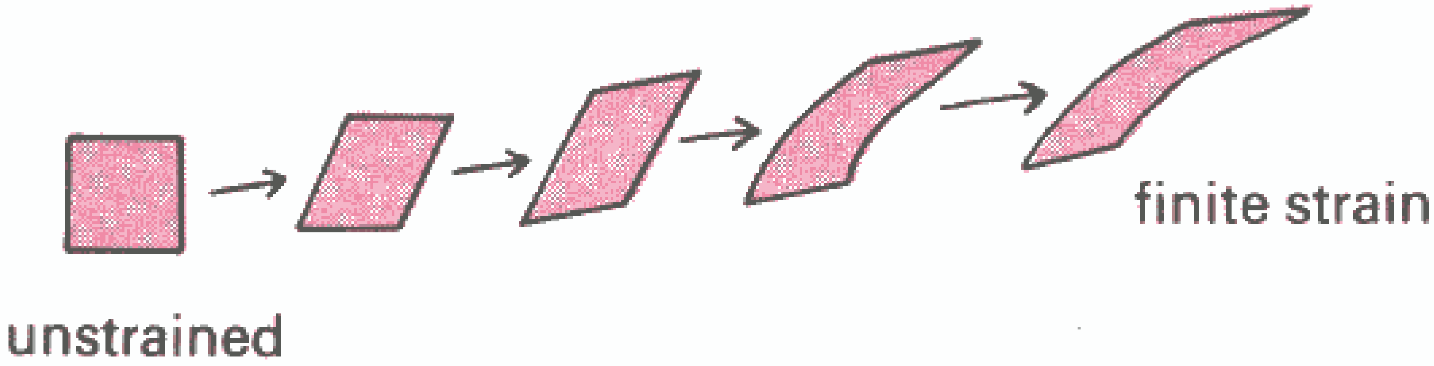
- Existem relações matemáticas entre o tensor de tensão e o tensor de strain infinitesimal, mediadas pela classe de comportamento do material (elástico, viscoso, plástico etc.)

Deformação finita, ou acumulada:

- Grandes deformações (> 1%)

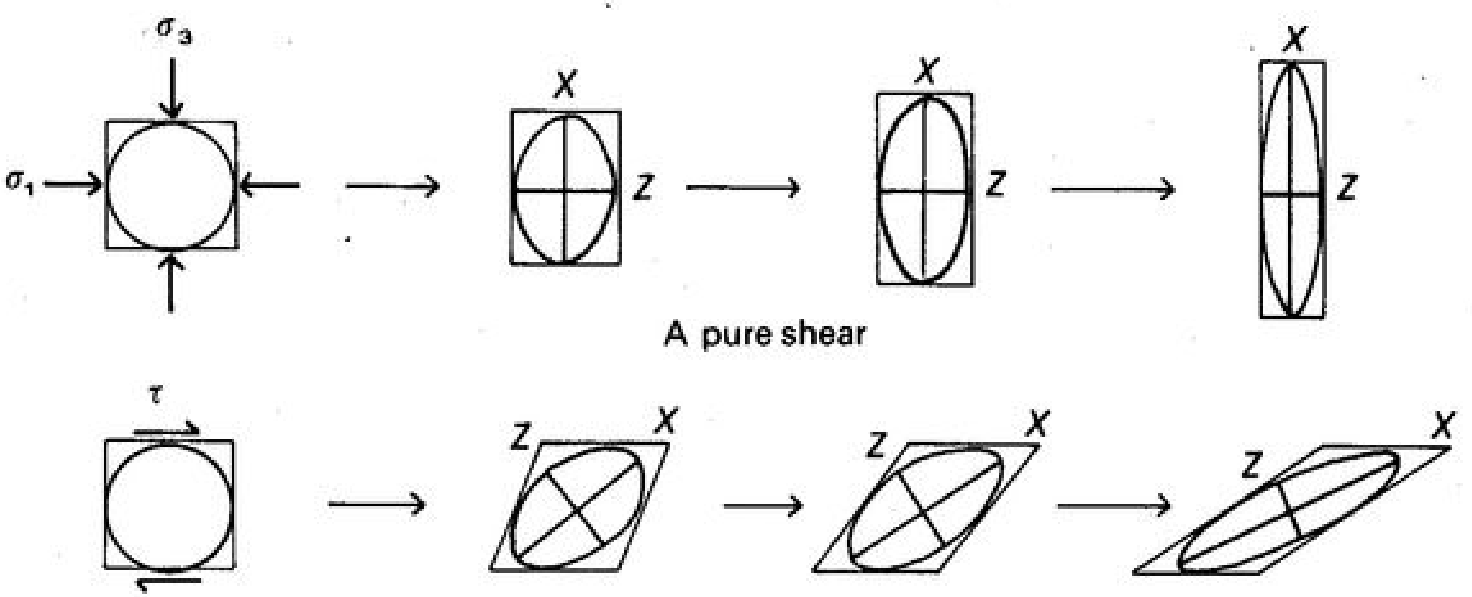
- Mais complexa matematicamente

- Aquela que de fato os geólogos observam no campo deformação progressiva



história deformacional

Deformação rotacional X Deformação irrotacional

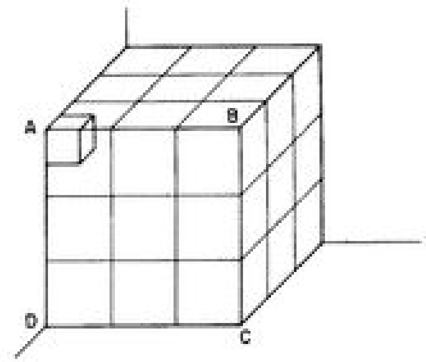


A pure shear

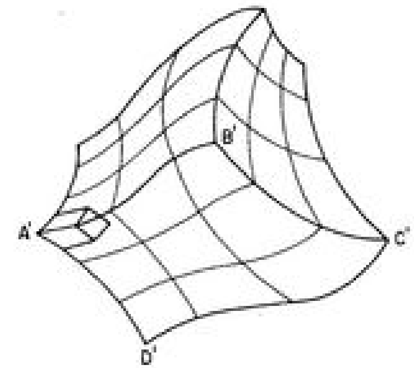
B simple shear

A deformação, no sentido mais geral, pode ser decomposta em uma

- Translação de corpo rígido
- Rotação de corpo rígido
- Distorção de forma (*strain*)
- Variação de volume



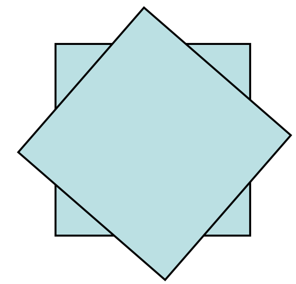
Estado indeformado.



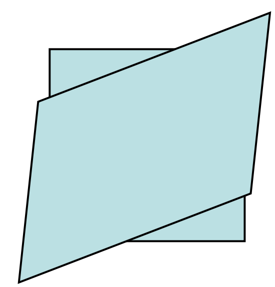
Estado deformado.

Translação de corpo rígido

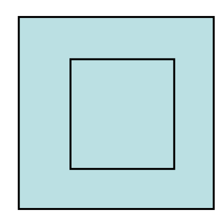
Rotação de corpo rígido



Distorção de forma (*strain*)

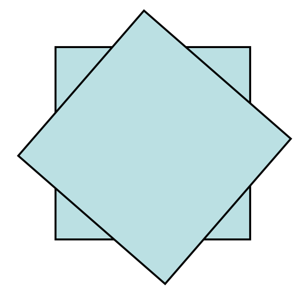


Variação de volume

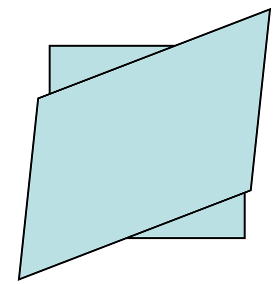


Translação de corpo rígido

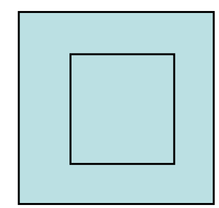
Rotação de corpo rígido



Distorção de forma (*strain*)



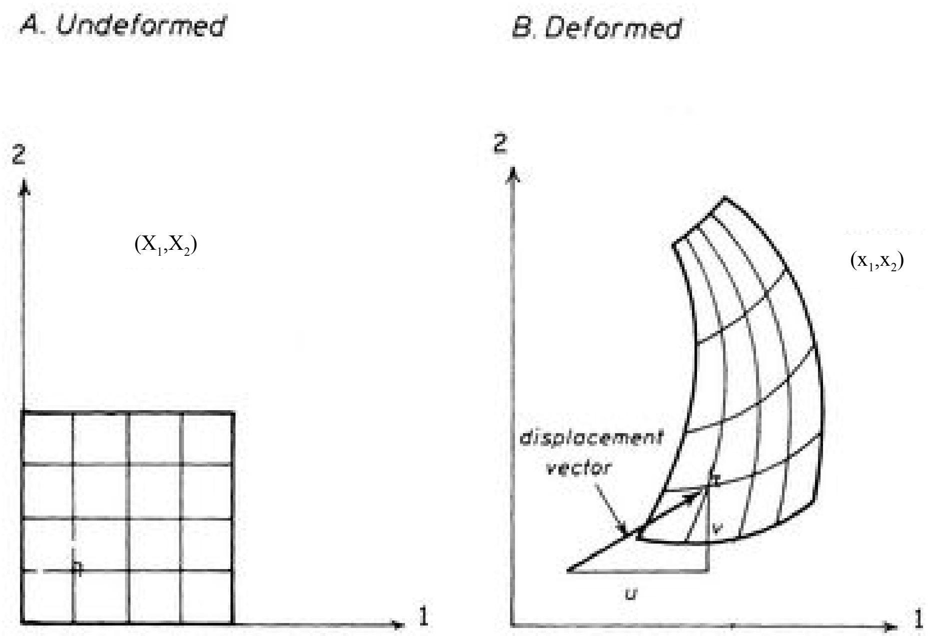
Variação de volume



A deformação pode ser representada matematicamente por

"equações de transformação de coordenadas"

Equações de transformação de coordenadas



$x_1 = F1\ (X_1, X_2, X_3)$

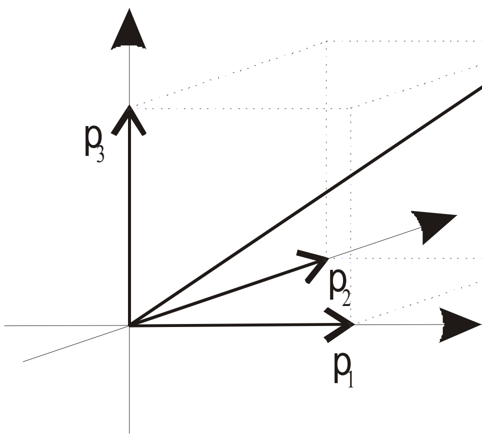
$x_2 = F2\ (X_1, X_2, X_3)$

$x_3 = F3\ (X_1, X_2, X_3)$

Transformação *lagrangiana*, especifica-se as posições finais (x_i) em função das posições finais (X_i):

Onde $F_1(\ )$,$F_2(\ )$ e $F_3(\ )$ são funções matemáticas

Vetor posição **p**

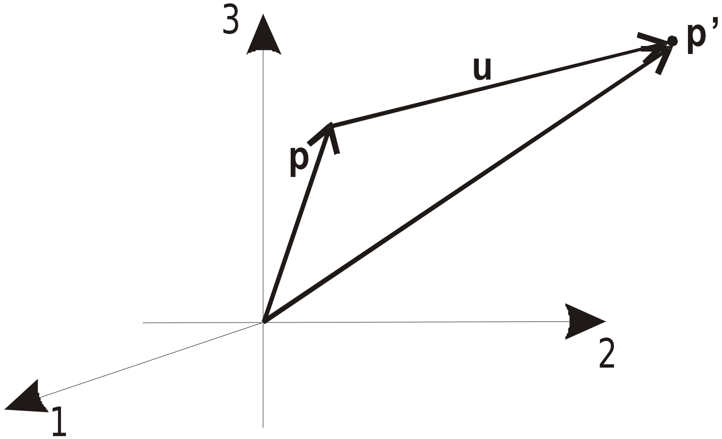


$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = p_i$$

Eixos do sistema de referência (x,y,z) serão nomeados como eixos (1,2,3)

Vetores e matrizes serão representados por letras em **negrito**

Vetor deslocamento **u**



Estado Inicial

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

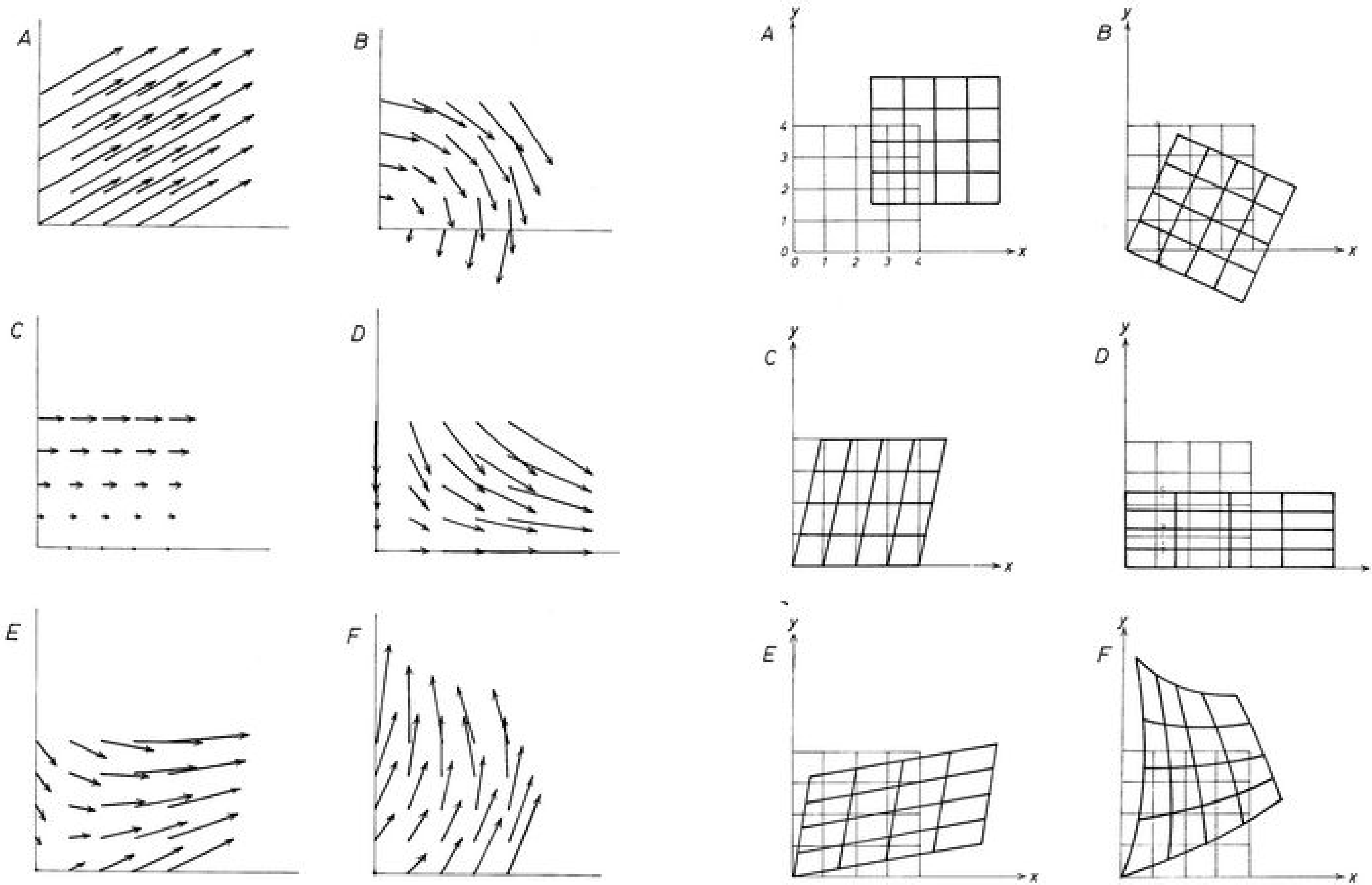
Estado Final

$$\mathbf{p'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 - X_1 \\ x_2 - X_2 \\ x_3 - X_3 \end{bmatrix} = x_i - X_i$$

O vetor **u**, o qual une os pontos em seus estados inicial e final é chamado de vetor deslocamento.

Campos de deslocamentos para vários tipos de deformação



Ramsay & Huber, 1983

Deformação homogênea

$x_1 = F1\ (X_1, X_2, X_3)$

$x_2 = F2\ (X_1, X_2, X_3)$

$x_3 = F3\ (X_1, X_2, X_3)$

Na deformação homogênea, F1( ), F2( ), F3( ) serão equações lineares:

$x_1 = aX_1 + bX_2 + c\,X_3 + t_1$

$x_2 = dX_1 + eX_2 + fX_3 + t_2$

$x_3 = gX_1 + hX_2 + iX_3 + t_3$

Na forma matricial

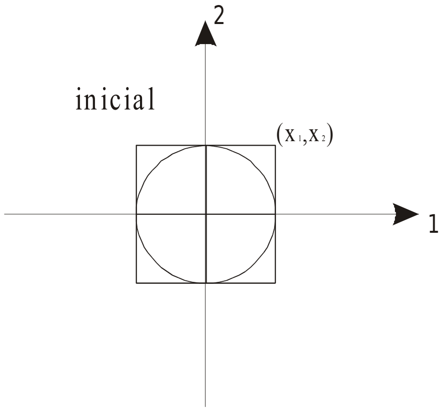
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

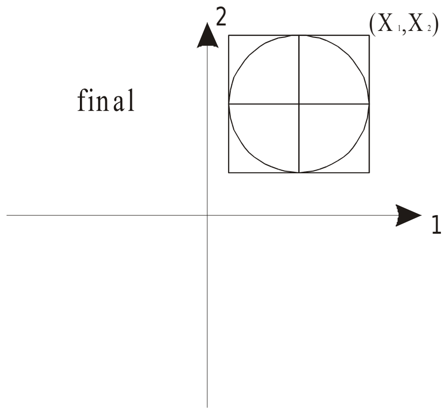
E de forma compacta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}$$

onde F é a matriz de transformação.

Translação de corpo rígido





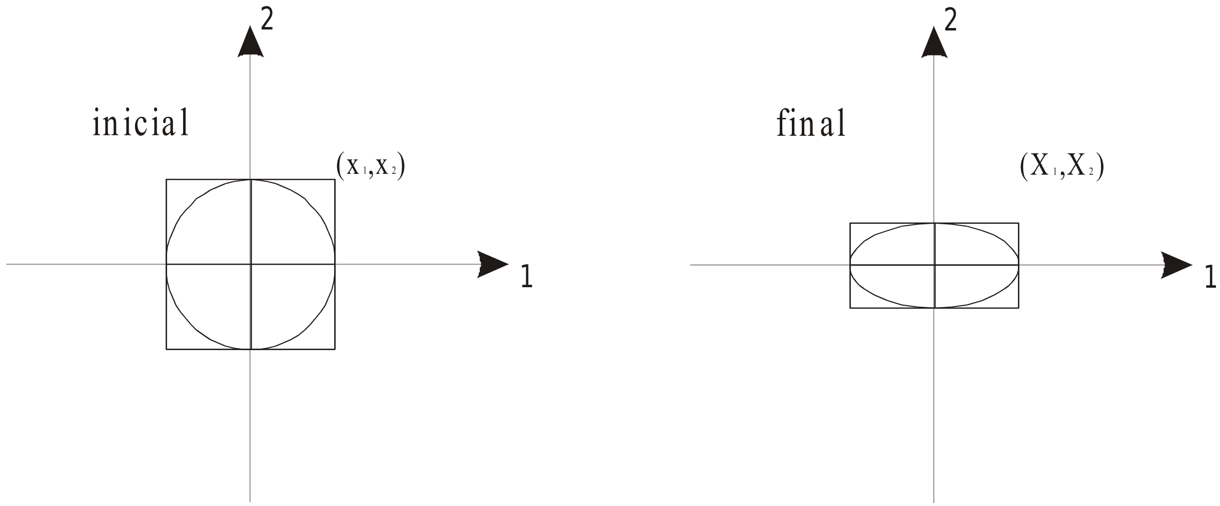
$x_1 = X_1 + 5$

$x_2 = X_2 + 3$

($x_3 = X_3 + 2$ em 3D)

(a translação depende do sistema de referência adotado, e em geral pode ser desprezada)

Achatamento uniaxial em 2

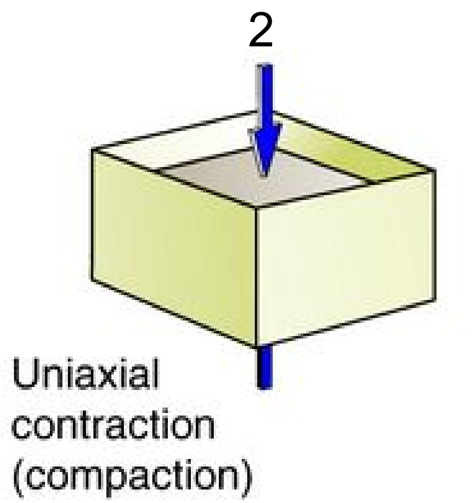


$$x_1 = X_1$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2} X_2$$

(redução à metade do comprimento na direção 2)

Notar que neste caso existe variação de volume, e que apenas duas direções não sofrem rotação. Um círculo no estado inicial é transformado numa elipse.

Achatamento uniaxial no eixo 2 (em 3D)



Fossen, 2017

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

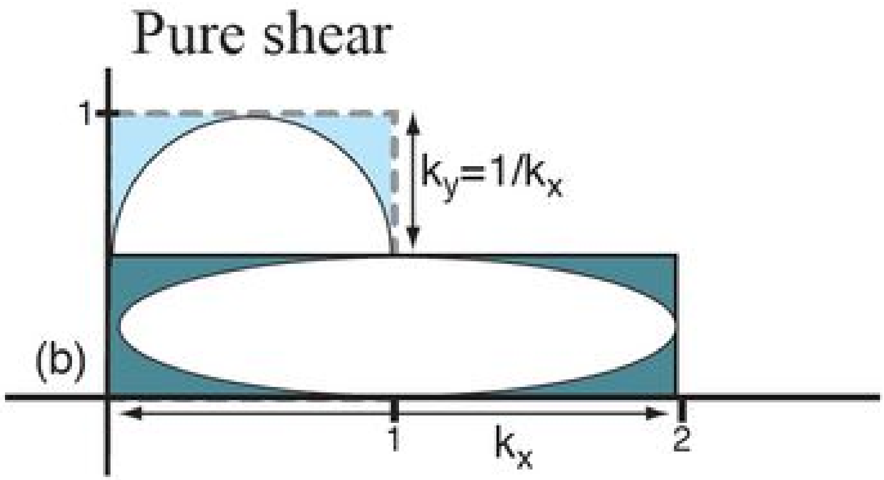
$$\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}$$

$x_1 = X_1$

$x_2 = ½\, X_2$

$x_3 = X_3$

Cisalhamento Puro



Fossen, 2017

$x_1=2X_1$

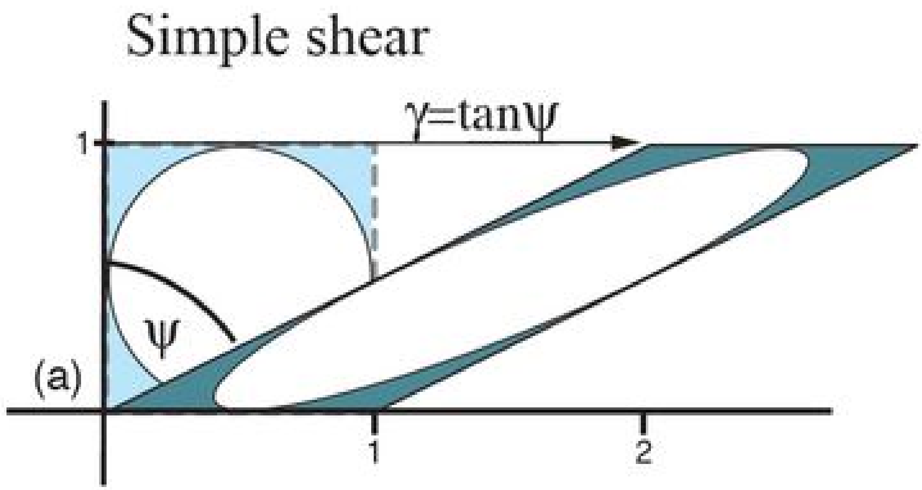
$x_2=1/2X_2$

($x_3=X_3$ em 3D)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ d & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{X}$

Cisalhamento Simples



Fossen, 2017

x_1=x_1+2X_2

x_2= X_2

(x_3=X_3 em 3D)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

x=F · X

Cisalhamento simples e puro

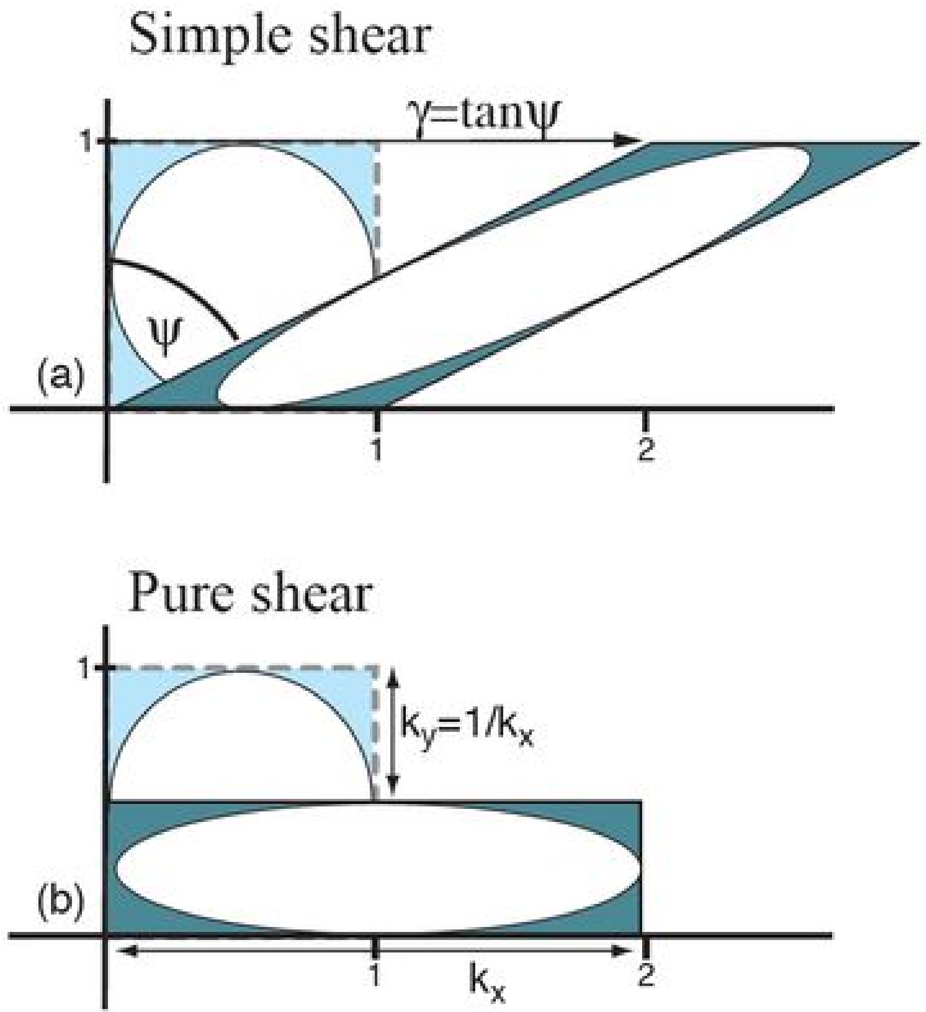
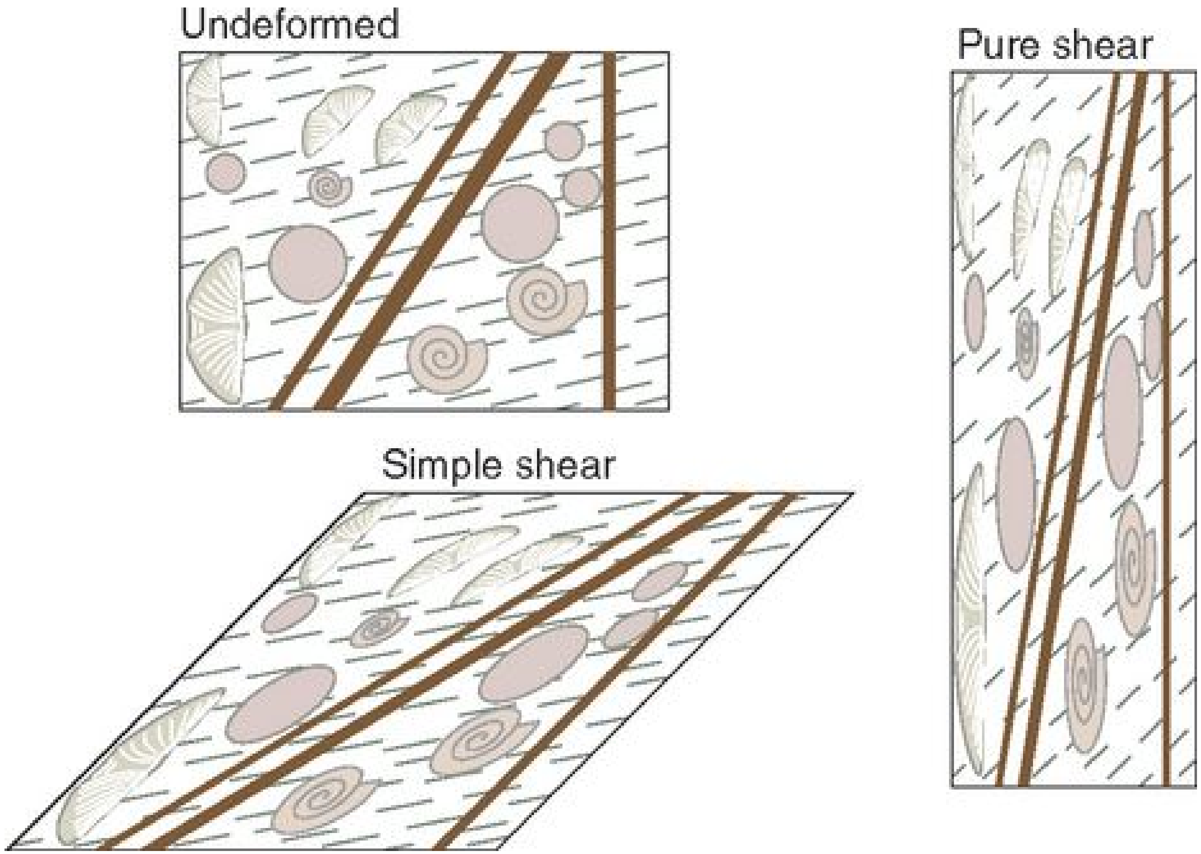


Figure 2.8 Simple and pure shear.

Fossen, 2017

Cisalhamento simples e puro



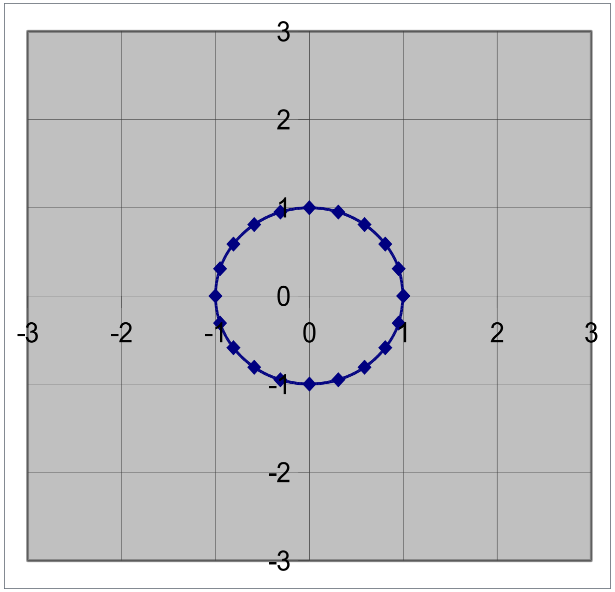
Fossen, 2017

Deformação homogênea genérica

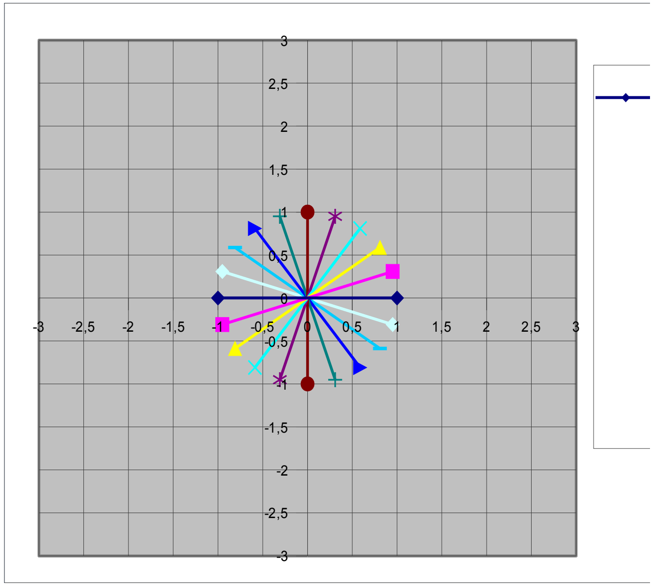
$$x_1 = aX_1 + bX_2 + t_1$$

$$x_2 = cX_1 + dX_2 + t_2$$

onde t_1 e t_2 são as componentes de translação que normalmente podem ser desprezadas.

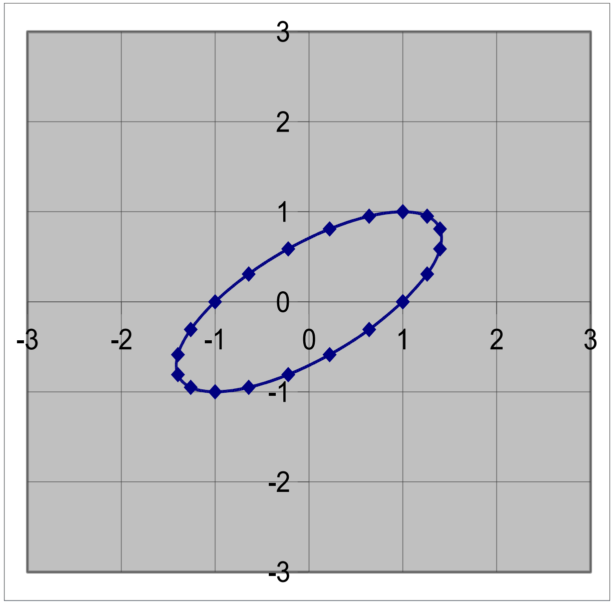


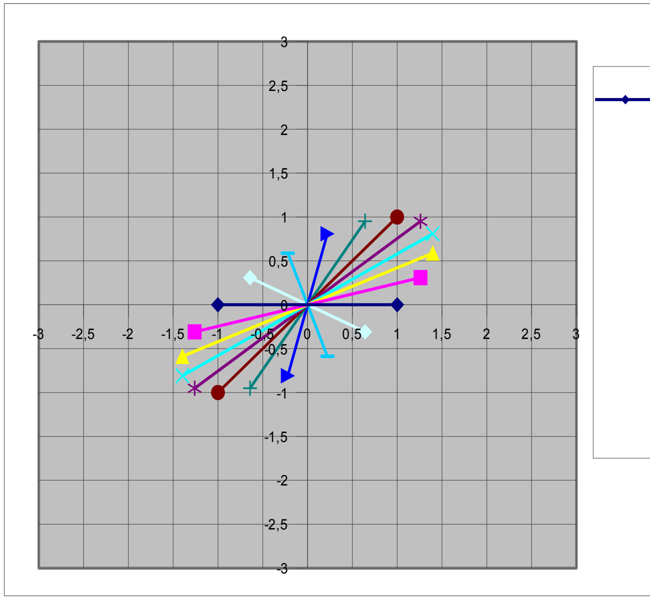
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3 -2 -1 0 1 2 3



3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
-3 -2,5 -2 -1,5 -1 -0,5 0 0,5 1 1,5 2 2,5 3

3,1416





Equações de transformação de coordenadas

x1 = a . X1 + b . X2

x2 = c . X1 + d . X2

Matriz de deformação

a =	1	b =	1
c =	0	d =	1

Deformação homogênea genérica

Em três dimensões:

$x_1 = aX_1 + bX_2 + c X_3 + t_1$

$x_2 = dX_1 + eX_2 + fX_3 + t_2$

$x_3 = gX_1 + hX_2 + iX_3 + t_3$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

E de forma compacta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}$$

onde F é a matriz de transformação.

Variação de volume

$$\det[F] = F_v = \frac{V_F}{V_I}$$

onde V_I é o volume inicial e V_F o volume final.

Notar que o fator volumétrico aqui usado é

$$F_V = V_F/V_I$$

enquanto que a variação volumétrica (dilatação) ΔV utilizada por Ramsay é

$$\Delta V = (V_F-V_I)/V_I$$

e portanto

$$F_V = \Delta V + 1$$

Det [**F**] =1 não ocorreu variação do volume.

Det [**F**] > 1 ocorreu expansão.

Det [**F**] < 1 ocorreu redução do volume.

Det [**F**] =0 o corpo reduz-se a uma linha ou um ponto.

Det [**F**] <0 obtém-se uma imagem especular (invertida) do corpo.

Com corpos materiais pressupõe-se que os dois últimos casos não ocorrem, e portanto é uma condição necessária que

Det [**F**] >0

e também que o aumento de volume não seja infinito, ou seja,

Det [**F**] < infinito

TRANSFORMAÇÕES (DEFORMAÇÕES) SUCESSIVAS

Considere-se um conjunto de vetores posição **X** transformados para **x.**

$$\mathbf{X}=\mathbf{F1}\cdot(\mathbf{x})$$

e esse conjunto de vetores posição **X** por sua vez sofre outra transformação, passado a **z**:

$$\mathbf{z} = \mathbf{F2}\cdot(\mathbf{X})$$

Substituindo

$$\mathbf{z} = \mathbf{F2} \;.\; \mathbf{F1}\ (\mathbf{x})$$

Onde **F2**.**F1** – é a matriz de transformação de **x** para **z.**

Portanto, uma sucessão de deformações é representada pela multiplicação de suas matrizes de transformação.

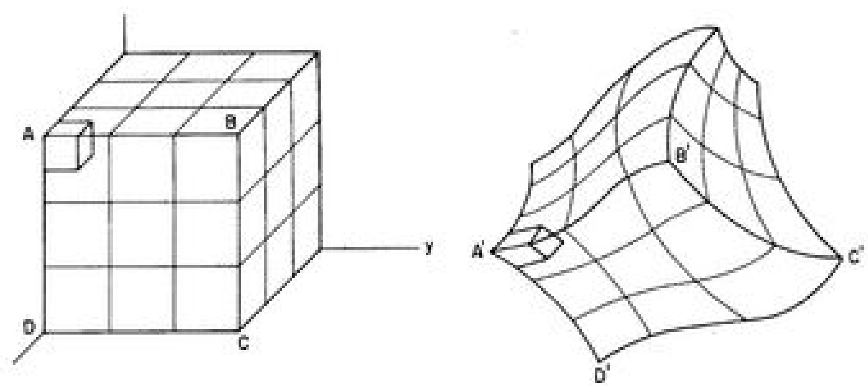
Notar que **F2**.**F1** é uma multiplicação de matrizes, e portanto é uma operação não comutativa.

$$\mathbf{F2.F1} \neq \mathbf{F1.F2}$$

Portanto a ordem em que é realizada a multiplicação é essencial, e demonstra também que deformações sucessivas são operações não comutativas.

Deformação Heterogênea

Numa deformação heterogênea, não é possível definir-se uma elipse ou elipsóide de deformação para todo o corpo deformado. Porém, é possível dividir-se o corpo em porções suficientemente pequenas, tendendo a zero, de tal modo que em cada parte do corpo deformado pode-se definir uma elipse ou elipsóide de deformação. Numa deformação heterogênea, as elipses de deformação variam de ponto a ponto em termos da orientação d
e de suas razões axiais.

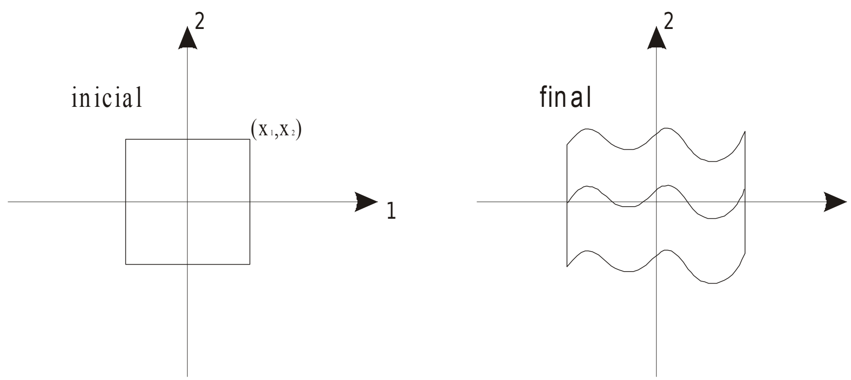


Estado indeformado. Estado deformado.

Na deformação heterogênea, as equações de transformação de coordenadas são funções não lineares

$x_1 = X_1$

$x_2 = 2\,\mathrm{sen}\,X_2$



Para analisar-se a variação da mudança de posição dos pontos materiais, define-se um **tensor de gradiente de deformação**, equivalente às derivadas parciais de **x** com relação a **X**:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}.d\mathbf{X}$$

$$F_{ij} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Como exemplo, considerando-se as seguintes equações de transformação de coordenadas, e as regras de derivação:

$$x_1 = X_1^2 + 5$$
$$x_2 = 5X_1^3 + X_2$$
$$x_3 = X_3$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 2X_1 \qquad \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = 0 \qquad \frac{\partial x_1}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial X_1} = 15X_1^2 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = 1 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0 \qquad \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1$$

$$F = \begin{bmatrix} 2X_1 & 0 & 0 \\ 15X_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na deformação homogênea, as equações de transformação são lineares, e as derivadas parciais correspondem aos coeficientes das equações.
Por exemplo:

$$x1 = aX1 + bX2 + cX3$$

$$\frac{\partial x1}{\partial X1} = aX_1^0 + 0 + 0 = a$$

Etc.

Assim, para a deformação homogênea, a matriz **F** representa tanto a matriz de transformação de coordenadas como a matriz (tensor) gradiente de deformação.

Exercícios sobre Deformação Finita

1) Faça script utilizando a matriz de transformação de coordenadas para calcular o estiramento (comprimento final / comprimento inicial), a orientação final e a variação angular de uma linha

2) Faça scripts simulando graficamente a deformação por transformação de coordenadas. Aplique para os seguintes casos:

Objetos iniciais: a) quadrado; b) círculo;

Tipos de deformação:
a) achatamento / estiramento uniaxiais;
b) cisalhamento puro;
c) cisalhamento simples;
d) deformação homogênea genérica;
e) cisalhamento simples seguido de cisalhamento puro;
d) achatamento uniaxial seguido de cisalhamento simples

3) Calcule a variação de volume (área em 2D) para cada um destes casos