Física II (4302112)
Turma T2 - noturno

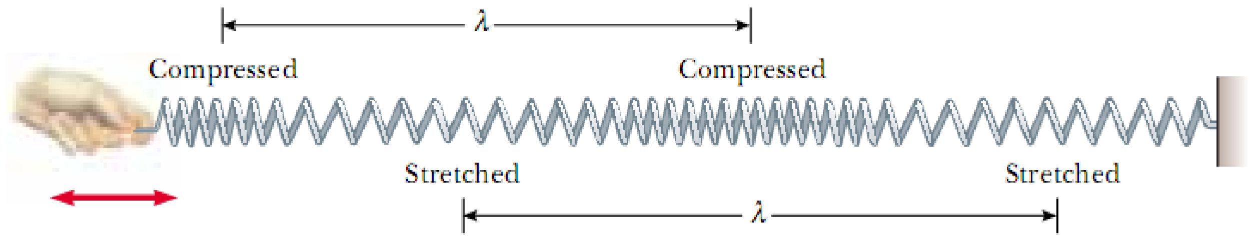
Ondas sonoras

Profa. Luciana V. Rizzo

Introdução

Ondas sonoras

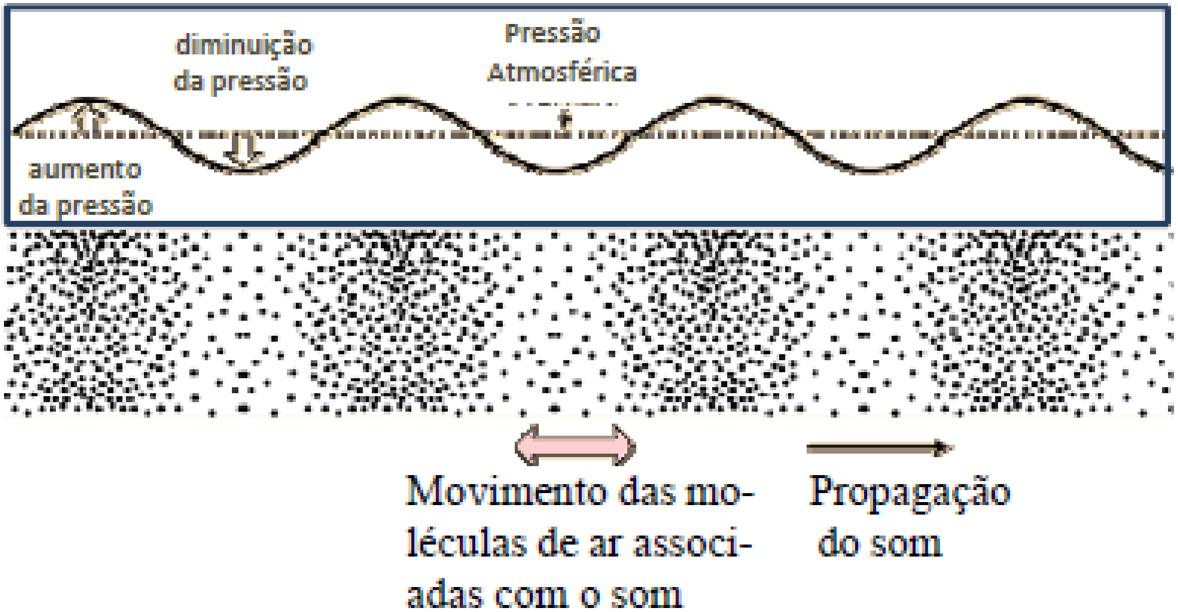
- São ondas mecânicas (não se propagam no vácuo!)
- São ondas longitudinais (oscilações ocorrem na mesma direção de propagação da onda)



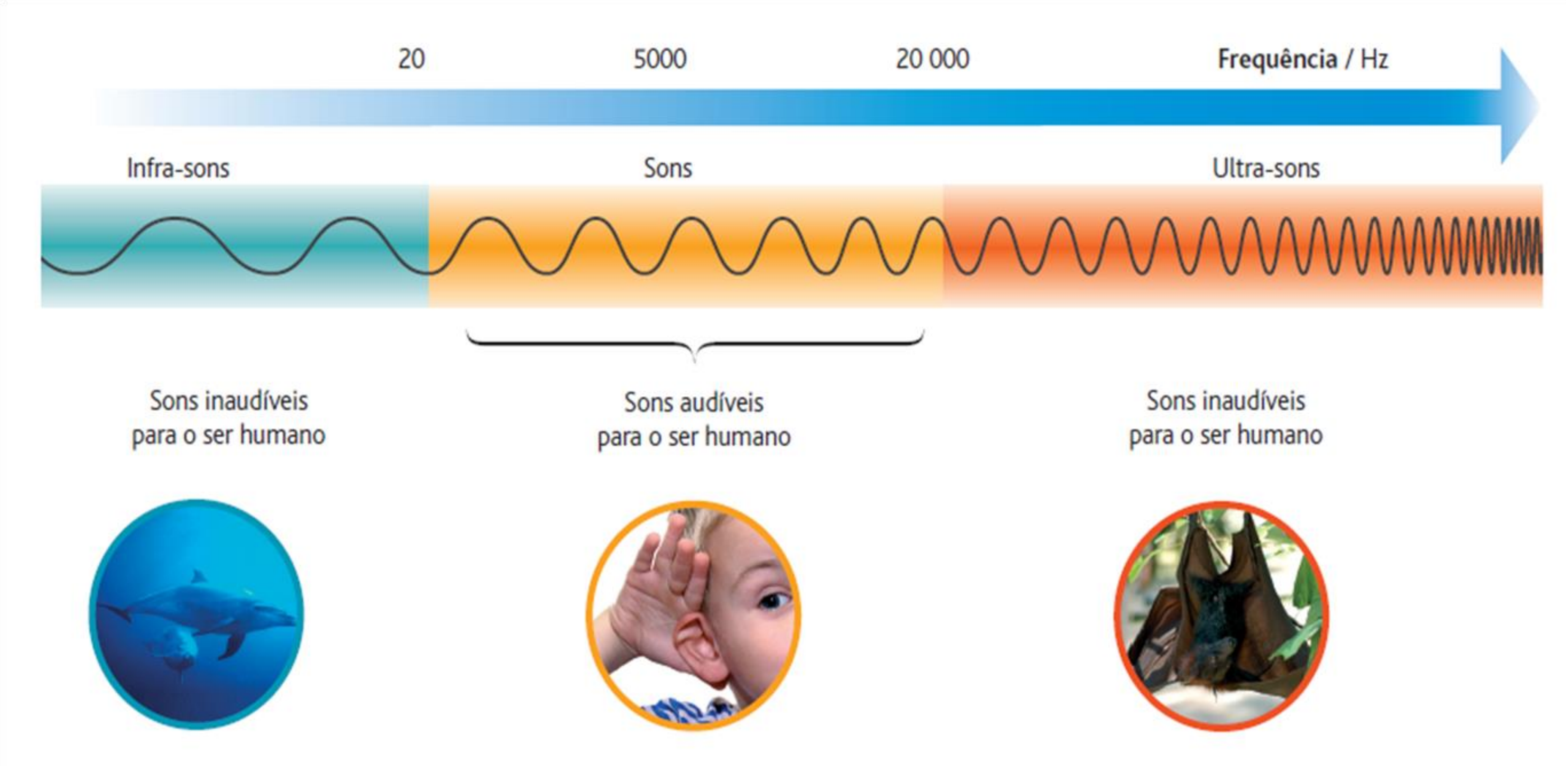
Ondas sonoras

Podem ser interpretadas de duas maneiras:

1) Onda de deslocamento (longitudinal) de moléculas do meio em relação às suas posições de equilíbrio
2) Onda de pressão (longitudinal), causada pelos deslocamentos das moléculas do meio

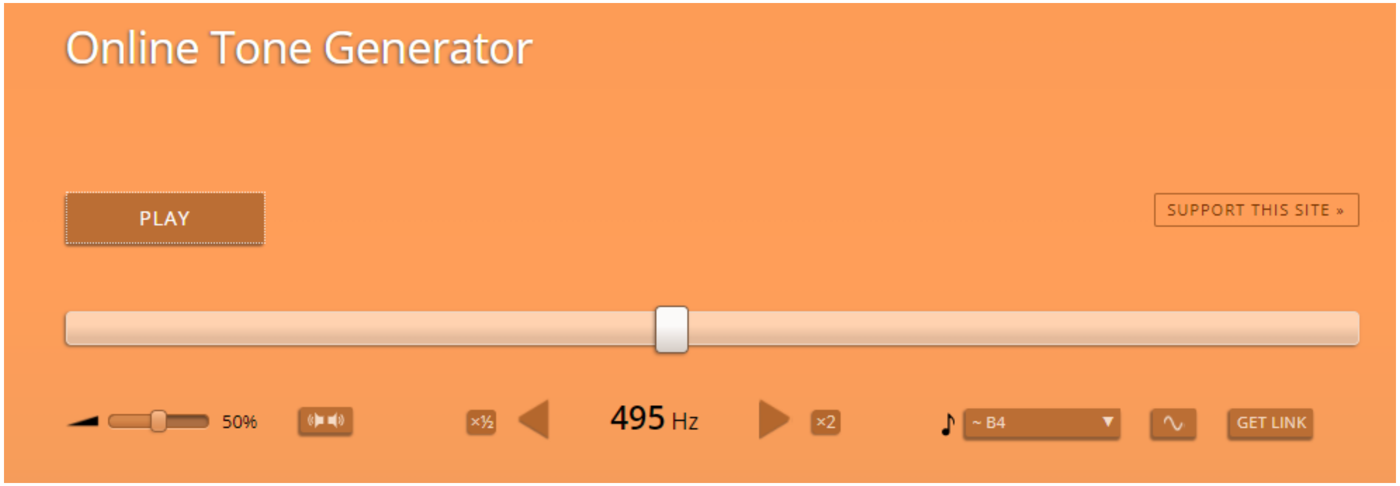


Espectro de ondas sonoras



Gerador de áudio online

http://www.szynalski.com/tone-generator/



Levitação acústica

- Suspendendo partículas no ar utilizando ondas sonoras

(Prof. Marco Andrade – IFUSP)

https://youtu.be/-j7sIcI2PIk

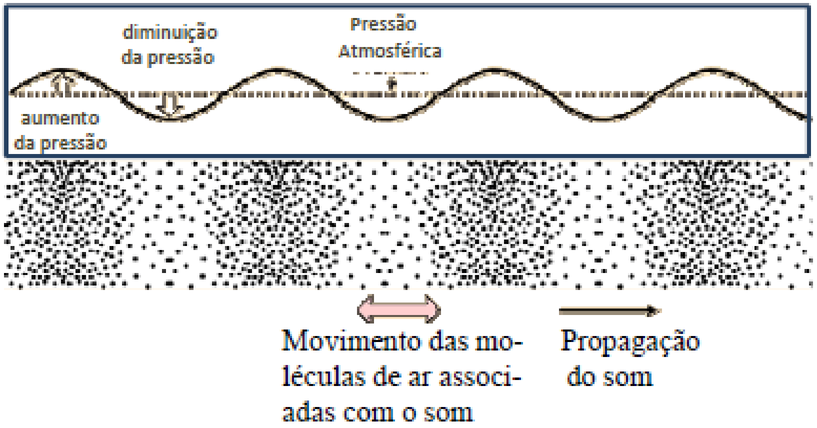
https://revistapesquisa.fapesp.br/suspenso-pelo-som/

Ondas de pressão, densidade e deslocamento

Ondas sonoras

Há 3 variáveis que podem ser utilizadas para descrever a passagem de uma onda sonora em um meio:

- Deslocamento (u) de moléculas do meio em relação às suas posições de equilíbrio (u_0)
- Densidade de um ponto do meio (ρ) em relação à sua densidade de equilíbrio (ρ_0)
- Pressão em um ponto do meio (P) em relação à pressão de equilíbrio (p_0) (pressão atmosférica)



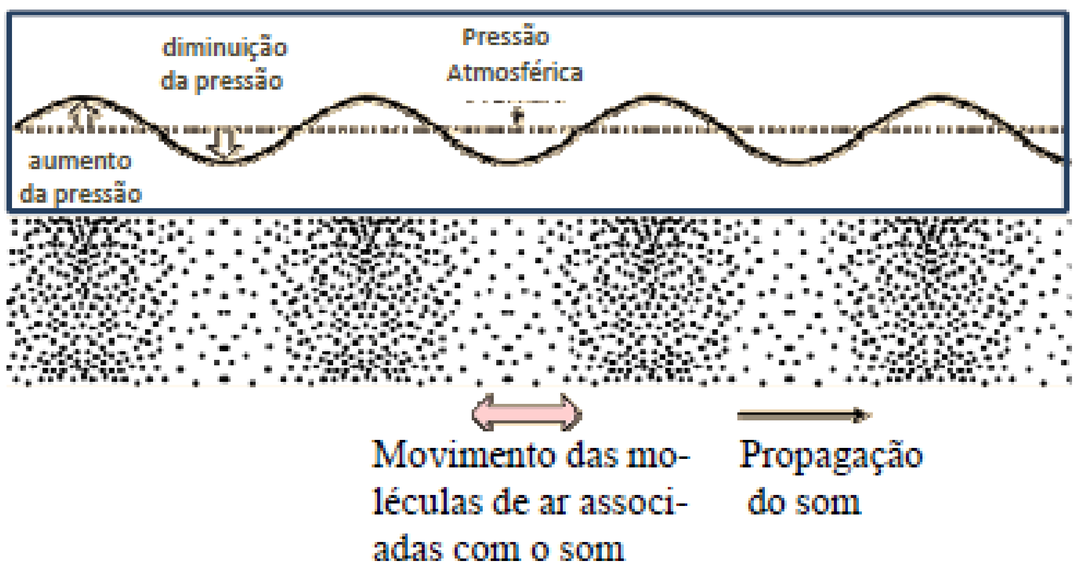
Ondas sonoras

Essas 3 variáveis estão intrinsecamente relacionadas.

Deslocamento
(u)

Variações de
pressão (P)

Variações de
densidade (ρ)



Ondas sonoras em um gás

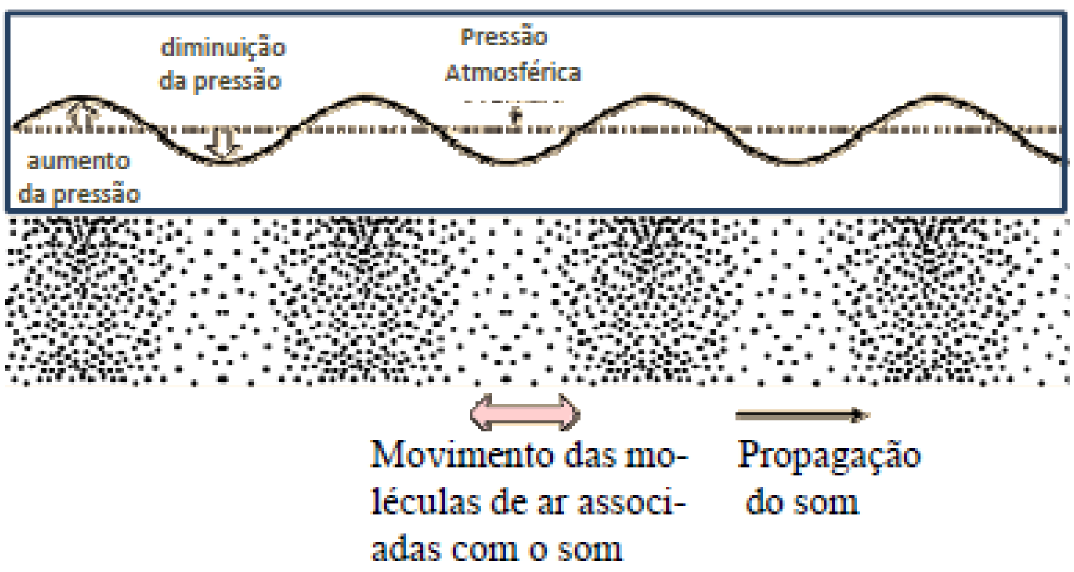
Vamos supor pequenas variações (Δ) em torno dos valores de equilíbrio:

Deslocamento: $u(x,t) = u_0 + \Delta u$, com $\Delta u \ll u_0$

Densidade: $\rho(x,t) = \rho_0 + \Delta\rho$, com $\Delta\rho \ll \rho_0$

Pressão: $P(x,t) = p_0 + \Delta p$, com $\Delta p \ll p_0$

Vamos determinar as relações entre essas variáveis para obter a equação de onda e a formulação da velocidade das ondas sonoras.



Relação entre pressão e densidade

Seja uma porção de fluido de massa m que ocupa um volume V.

$$\Delta P > 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta \rho > 0$$

(já que $\rho = m/V$)

Então P e ρ possuem uma relação direta. A forma dessa relação depende do tipo de transformação termodinâmica que vamos assumir para o aumento de pressão durante a passagem de uma onda sonora.

Uma pequena variação na pressão (Δp) em torno do equilíbrio (p_0) causa uma pequena variação na densidade ($\Delta\rho$) em torno do equilíbrio (ρ_0), logo:

(onde o subscrito 0 representa a condição de equilíbrio)

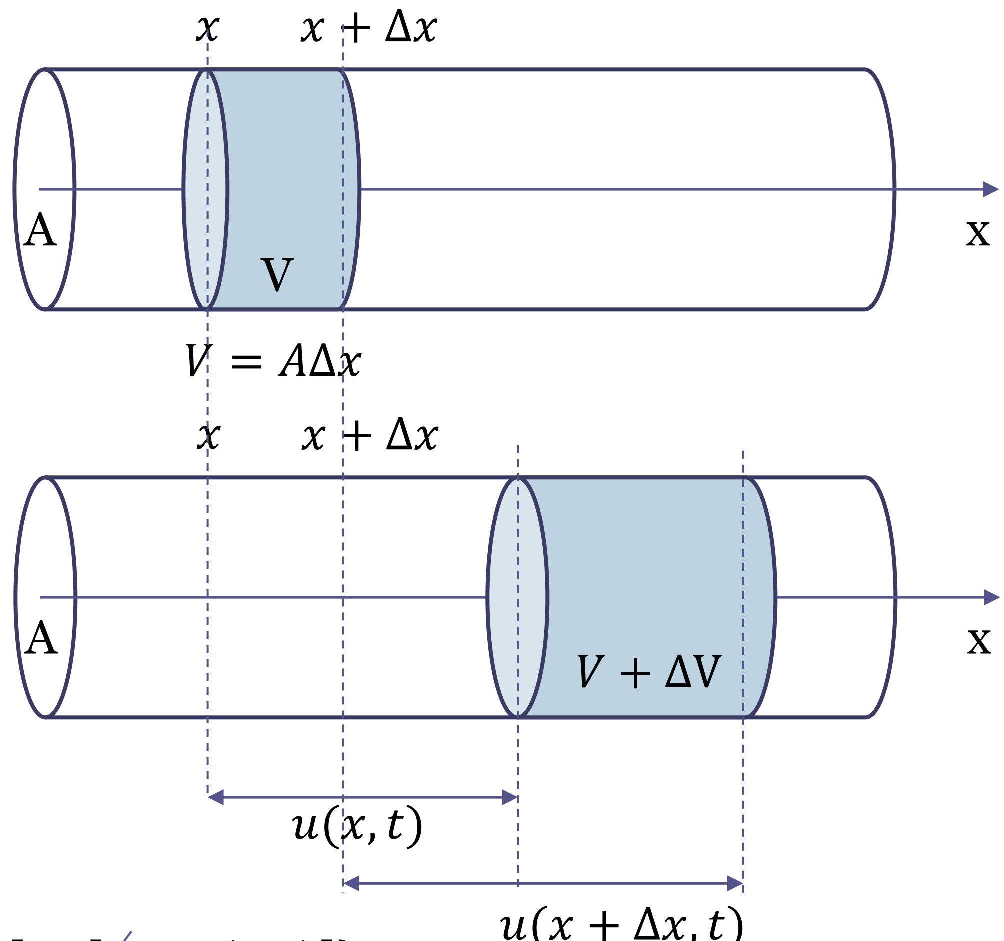
$$\boxed{\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0} \quad \text{(I)}$$

Relação entre deslocamento e densidade

Antes da passagem da onda

Volume entre x e $x + \Delta x$:

$$V = A\Delta x$$



Durante a passagem da onda

Houve uma expansão:

$x \rightarrow x + u(x, t)$

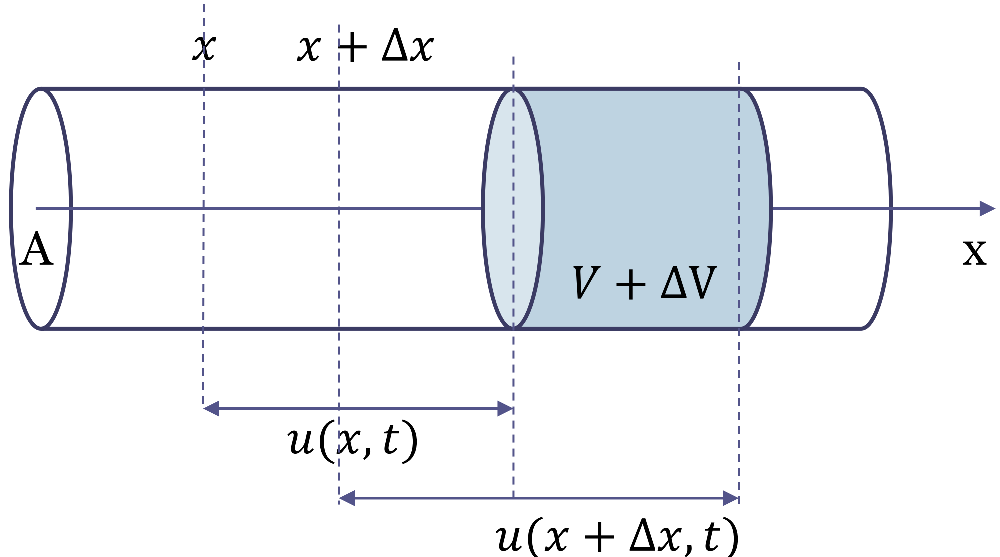
$x + \Delta x \rightarrow x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$

Novo volume: $V + \Delta V$

$$V + \Delta V = A\{[\cancel{x} + \Delta x + u(x + \Delta x, t)] - [\cancel{x} + u(x, t)]\}$$

$$V + \Delta V = A\{\Delta x + [u(x + \Delta x, t) - u(x, t)]\}$$

Relação entre deslocamento e densidade



Durante a passagem da onda

Houve uma expansão:

$x \rightarrow x + u(x,t)$

$x + \Delta x \rightarrow x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$

Novo volume: $V + \Delta V$

$$V + \Delta V = A\{[\cancel{x} + \Delta x + u(x + \Delta x, t)] - [\cancel{x} + u(x,t)]\}$$

$$V + \Delta V = A\{\Delta x + [u(x + \Delta x, t) - u(x,t)]\}$$

$$V + \Delta V = \underbrace{A\Delta x}_{= V}\left\{1 + \left[\underbrace{\frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}}_{= \frac{\partial u}{\partial x}\text{, se } \Delta x \to 0}\right]\right\}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Aqui temos uma relação entre volume e deslocamento. Como inserir a densidade aqui? Qual é a relação entre variação de densidade e variação de volume?

Relação entre deslocamento e densidade

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Aqui temos uma relação entre volume e deslocamento. Como inserir a densidade aqui? Qual é a relação entre variação de densidade e variação de volume? (supondo massa constante)

Diferencial:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial m}\underbrace{dm}_{0} + \frac{\partial \rho}{\partial V}dV = -\frac{m}{V^2}dV = -\frac{\rho}{V}dV$$

$$\Delta\rho = -\frac{\rho}{V}\Delta \mathrm{V}$$

$$-\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta \mathrm{V}}{V}$$

$$-\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

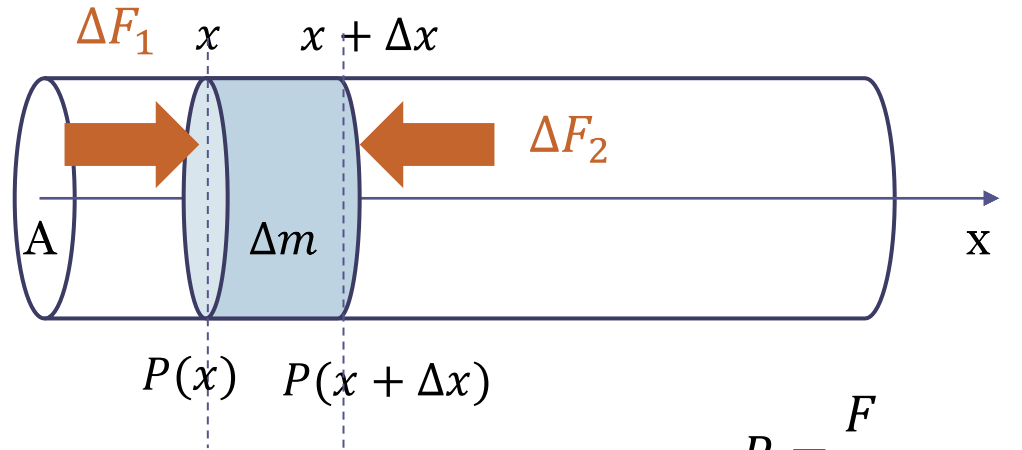
$$-\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$\boxed{\Delta\rho = -\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}$$

(II)

Relação entre Pressão e Deslocamento

Considerando as forças que atuam sobre uma parcela de fluido de massa Δm, podemos escrever a 2ª Lei de Newton:



$$P = \frac{F}{A}$$

$$\Delta m = \rho . \Delta V$$

$$\Delta m \approx \rho_0 . \mathrm{A} . \Delta x$$

$$\Delta F = \Delta \mathrm{m} . \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$$

$$\Delta F_1 - \Delta F_2 = (\rho_0 . \mathrm{A} . \Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\cancel{\mathrm{A}}[P(x) - P(x + \Delta x)] = (\rho_0 . \cancel{\mathrm{A}} . \Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\left[\underbrace{\frac{P(x) - P(x + \Delta x)}{\Delta x}}_{= -\frac{\partial P}{\partial x}\text{ , se } \Delta x \to 0}\right] = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \xrightarrow[\frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x}]{P(x,t) = p_0 + \Delta p \text{ , com } \Delta p \ll p_0} \boxed{-\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad \text{(III)}$$

Deduzindo a equação de onda

Combinando as equações I, II e III, e eliminando as variáveis Δp e $\Delta\rho$, obteremos uma equação em termos do deslocamento u:

$$\boxed{\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0}$$

(I)

$$\boxed{\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}$$

(II)

$$\boxed{-\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

(III)

(II) → (I) $\quad \Delta p = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad$ (IV)

Derivando (IV) em relação a x e substituindo em (III):

$$\boxed{\frac{1}{(\partial P/\partial\rho)_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

$$\boxed{v_{som} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0}}$$

Igual à equação de onda que deduzimos anteriormente para uma onda transversal:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Deduzindo a equação de onda

Combinando as equações I, II e III, é possível escrever a equação de onda em termos de u, de Δp ou de $\Delta\rho$:

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2} = 0}$$

$$\boxed{v_{som} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0}}$$

E possível descrever uma onda sonora em termos de variações no deslocamento, variações na pressão ou variações de densidade em torno da condição de equilíbrio.

Velocidade do som em um gás ideal

Com a passagem da onda sonora, a compressão e a expansão do gás ocorre rapidamente, de modo que não há tempo para trocas de calor. Assim, as transformações termodinâmicas podem ser consideradas adiabáticas.

Relação entre P e ρ em uma transformação adiabática:

$$P = b\rho^{\gamma}$$

Constante adiabática
($\gamma = 1{,}4$ no caso do ar)

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = b\gamma\rho^{\gamma-1} = b\gamma\frac{\rho^{\gamma}}{\rho} = \gamma\frac{P}{\rho} \longrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}$$

$$\boxed{v_{som} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0} = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{v_{som} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M_M}}}$$

$$PV = nRT = \frac{m}{M_M}RT \quad \rightarrow \quad P = \frac{m}{V}\frac{RT}{M_M} = \rho\frac{RT}{M_M}$$

Velocidade do som em um gás ideal

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

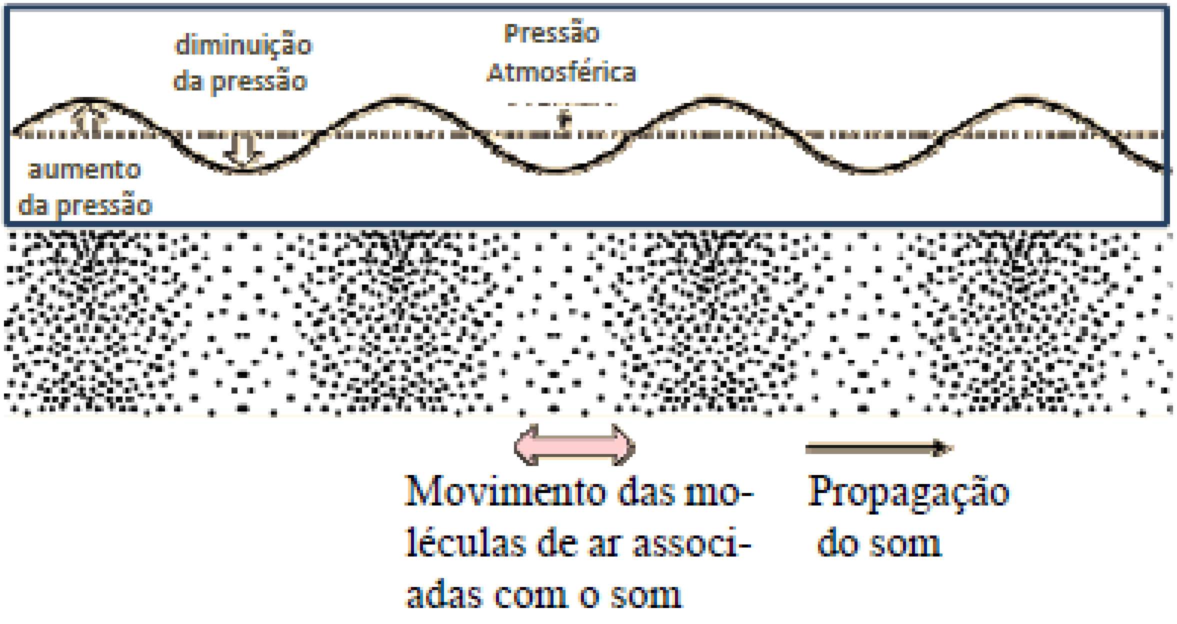
γ: constante adimensional que depende do tipo de gás (1,4 para o ar)

R: constante universal dos gases (8,3145 J/mol/K)

T: temperatura do fluido em K

M: massa molar do gás ($29{,}0\text{x}10^{-3}$ kg/mol para o ar seco)

Som

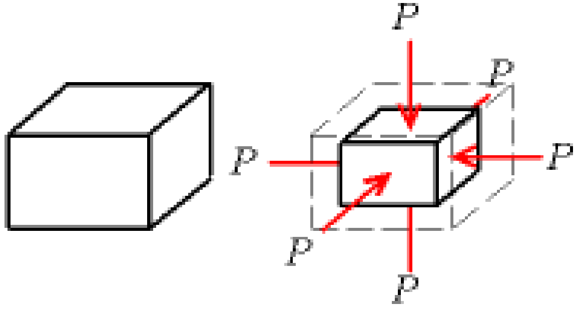


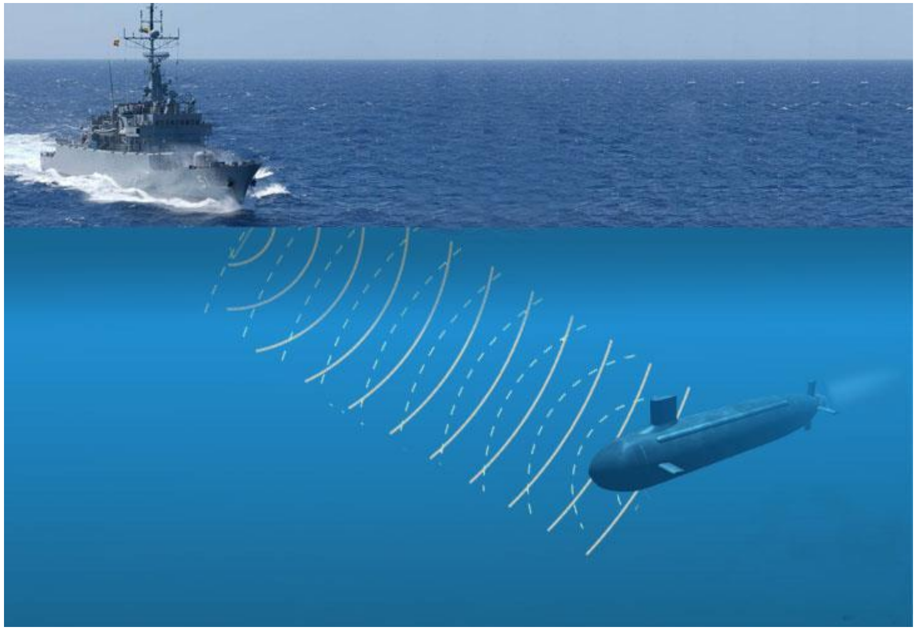
Velocidade do som em um líquido

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Módulo volumétrico (ou módulo de elasticidade): relação entre variações de pressão e volume do fluido

Densidade do fluido





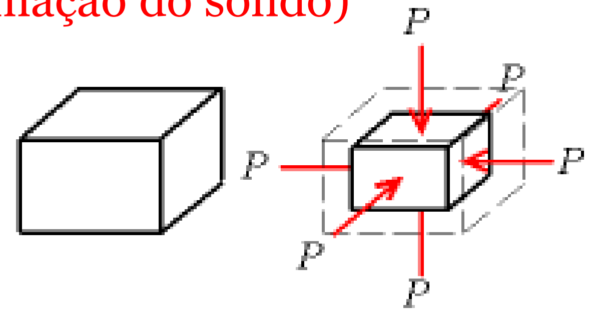
$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

Velocidade do som em um sólido

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Módulo de Young ou módulo de elasticidade (razão entre tensão e deformação do sólido)

Densidade do sólido



Ondas sonoras emitidas pelo trem viajam muito mais rápido pelo trilho do que pelo ar.

Exemplo: velocidade do som em vários meios de propagação

Meio de propagação	Velocidade ($m.s^{-1}$)
Dióxido de carbono (0 °C)	258
Oxigênio	317
Ar (0 °C)	331,5
Ar (10 °C)	337,5
Ar (20 °C)	343,4
Ar (30 °C)	349,2
Hélio (20 °C)	927
Álcool etílico	1180
Chumbo	1200
Hidrogênio (0 °C)	1270

Meio de propagação	Velocidade ($m.s^{-1}$)
Mercúrio	1450
Água (20 °C)	1480
Borracha	1500
Água do mar	1522
Latão	3500
Cobre	3900
Alumínio	4420
Betão	5000
Aço	6000

Ondas sonoras harmônicas

Ondas sonoras harmônicas

Se o deslocamento obedece à equação de onda, podemos representar uma onda sonora harmônica da seguinte forma:

$$\boxed{u(x,t) = U\cos(kx - \omega t + \delta)}$$

Da equação (IV), obtemos a função de onda em termos da variação de pressão Δp:

$$\Delta p = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho_0 v^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho_0 v^2 kU\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

$$\boxed{\Delta p(x,t) = \wp\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)}$$

Da equação (II), obtemos a função de onda em termos da variação de densidade $\Delta\rho$:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho_0 kU\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

$$\boxed{\Delta\rho(x,t) = \zeta\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)}$$

Ondas sonoras harmônicas

A onda de deslocamento e a onda de pressão apresentam uma diferença de fase de $\pi/2$

Deslocamento

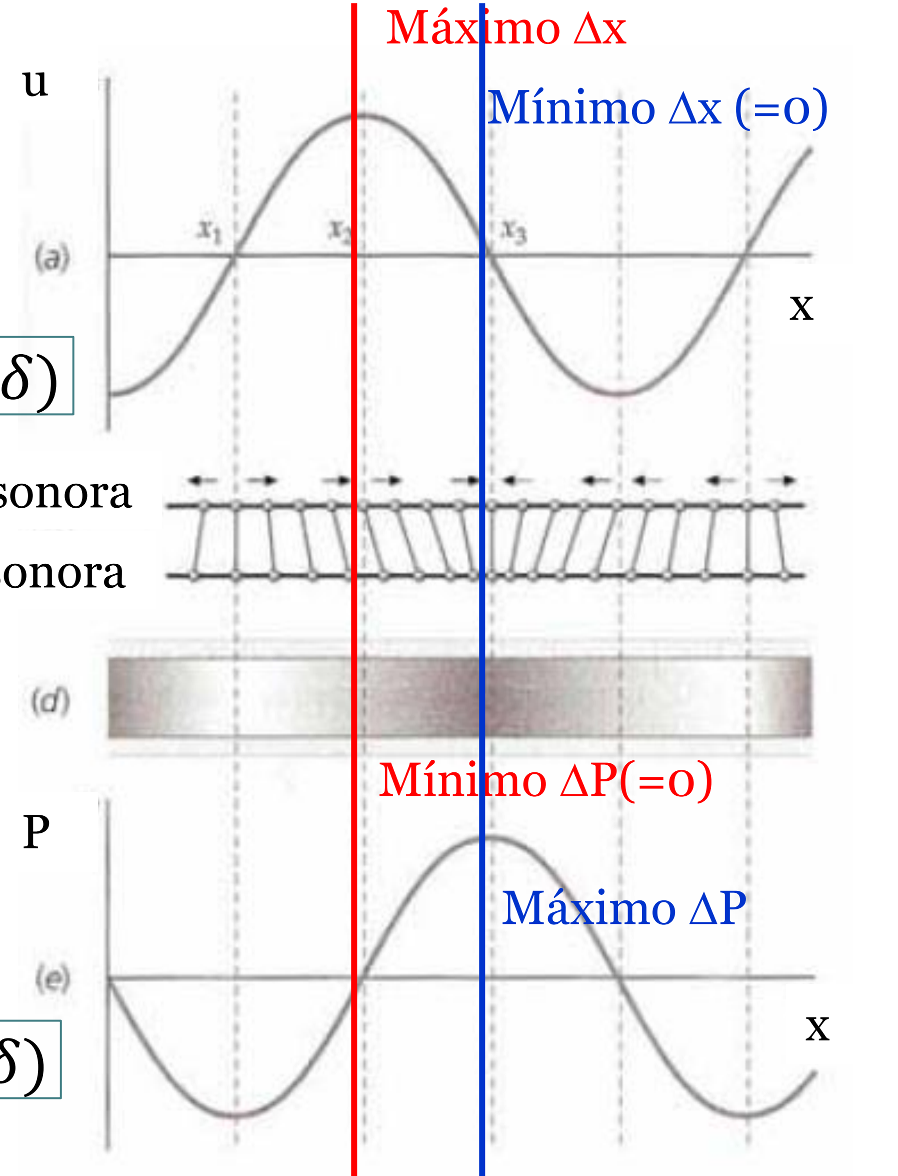
$$\boxed{u(x,t) = U\cos(kx - \omega t + \delta)}$$

Moléculas antes da chegada da onda sonora

Moléculas depois da chegada da onda sonora

Pressão

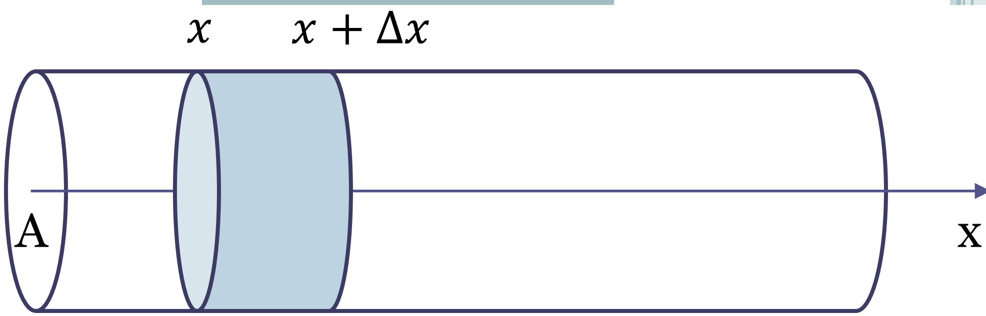
$$\boxed{\Delta p(x,t) = \wp\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)}$$



Intensidade e nível sonoro

Intensidade

$$I = \frac{\overline{Pot}}{A}$$



Força:

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}.\,\Delta p(x,t) = A.\wp\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

Potência instantânea:

$$\mathrm{Pot} = \mathrm{F}.\frac{\partial u}{\partial t} = [A.\wp\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)].\frac{\partial u}{\partial t}[U\cos(kx - \omega t + \delta)]$$

$$\mathrm{Pot} = \omega A \wp U\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$$

Potência média:

$$\overline{\mathrm{Pot}} = \omega A \wp U\,\overline{\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)} = \frac{1}{2}\omega A \wp U$$

Intensidade

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\omega \wp U}$$

$$U = \frac{\wp}{\rho_0 v^2 k} = \frac{\wp}{\rho_0 v^2 \omega / v}$$

ou

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\frac{\wp^2}{\rho_0 v}}$$

$$\wp = \rho_0 v^2 k U = \rho_0 v^2 \frac{\omega}{v} U$$

ou

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho_0 v \omega^2 U^2}$$

Intensidade de ondas sonoras

$$\mathrm{I} = \frac{P_{med}}{Área} = \frac{1}{2}\rho_0 v \omega^2 U^2$$

onde ρ_o é a densidade do meio, v é a velocidade de propagação da onda, ω é a sua frequência angular, e U é a amplitude de deslocamento.

Unidade de intensidade no SI: W/m².

Novamente: **energia e potência são proporcionais ao quadrado de A e ω.**

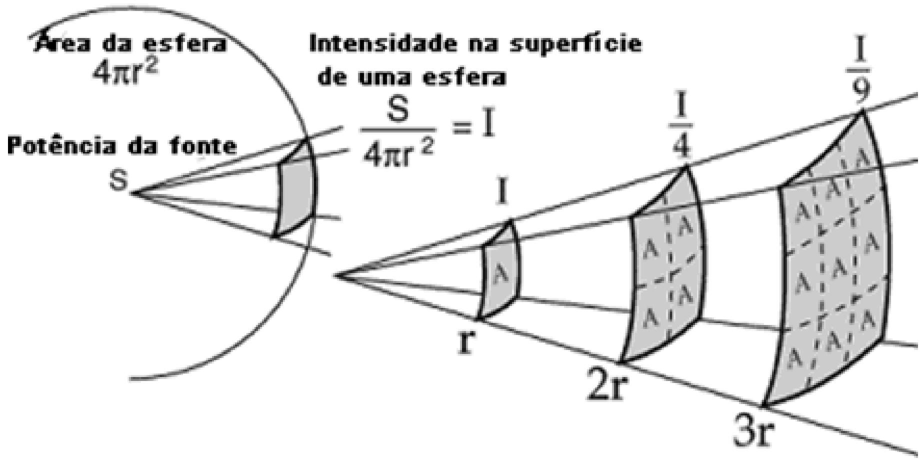
Intensidade (I) em função da distância (r)

- Se uma fonte pontual emite ondas uniformemente em todas as direções, então a energia a uma distância r da fonte é distribuída uniformemente em uma superfície esférica de área $A = 4\pi r^2$.
- I(r):

$$I = \frac{P_{med}}{4\pi r^2}$$

Potência média

Unidade de área



- Unidade no SI: W/m^2.

Qual é a ordem de grandeza dessas variáveis no caso de ondas sonoras no ar ?

- Limiar de audibilidade: $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$
- Limiar de dor: $I_0 = 1\,\frac{W}{m^2}$
- Amplitude da variação de pressão no limiar de audibilidade:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\wp^2}{\rho_0 v} \rightarrow 10^{-12} = \frac{1}{2}\frac{\wp^2}{1{,}3.340} \rightarrow \boxed{\wp \sim 3.10^{-5} Pa}$$

- Amplitude do deslocamento no limiar de audibilidade para um som de frequência 10 kHz:

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 v \omega^2 U^2 \rightarrow 10^{-12} = \frac{1}{2} 1{,}3\,.\,340\,.\,(2\pi 10^3)^2.\,U^2 \rightarrow \boxed{U \sim 1{,}1.10^{-11} m}$$

Nível sonoro (decibéis)

- Amplitude de deslocamento ouvido humano: 10^{-5} a 10^{-11} m. Ou seja, ouvimos uma grande faixa de intensidades sonoras.

$$\beta = 10 \ \log_{10} \frac{I}{I_0} \qquad (dB)$$

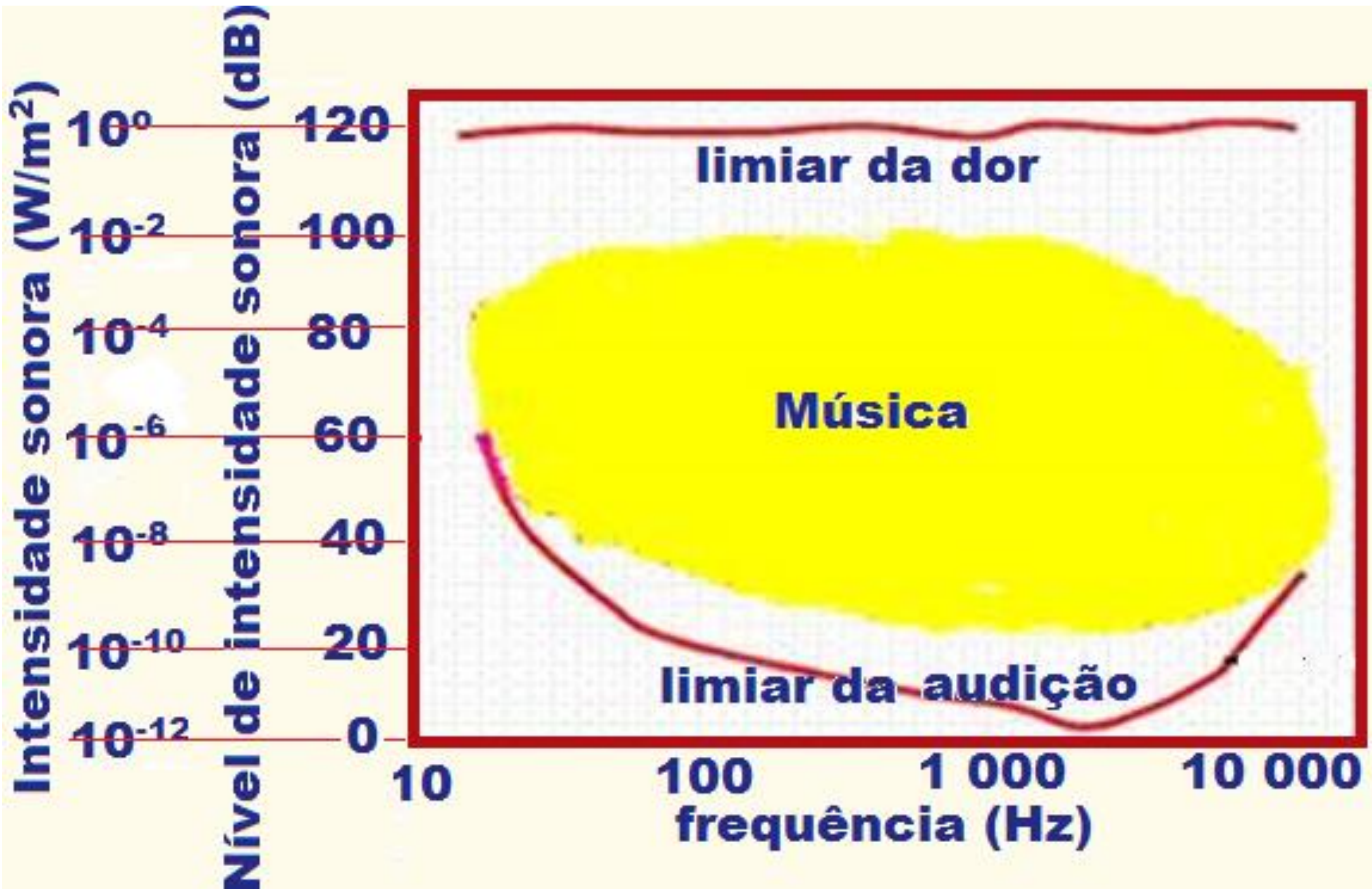
10^{-12} W/m²
(intensidade de referência)

Sem perda auditiva	Comprometimento auditivo	Perda da audição

Intensidade sonora (db)	Situação
0-10	Limiar da audição humana
10-20	Sussurro, estúdio de radiodifusão
20-30	Estúdio de gravação, conversa baixa
30-40	Quarto silencioso
40-50	Escritório silencioso, geladeira
50-60	Voz falada, sala com televisão
60-70	Conversa em grupo
70-80	Rua congestionada
80-90	Aspirador de pó, liquidificador
90-100	Discoteca, Banda de Bossa
100-110	Banda de rock, buzina de carro
110-120	Aeroporto, motocicleta, trovão
120-130	Broca pneumática
130-150	Decolagem de avião, tiro
Acima de 150	Decolagem de foguete

β depende não só da amplitude (A) do som, mas depende também de sua frequência

$$\beta = 10\ \log_{10}\frac{I_{som}}{10^{-12}} \qquad (dB) \qquad\qquad I_{som} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 U^2$$



Exercício

Uma fonte sonora com frequência de 300 Hz tem uma intensidade de 1,0 μW/m². Determine:

a) O nível sonoro correspondente em decibéis
b) A amplitude de pressão da onda sonora
c) A amplitude de deslocamento da onda sonora

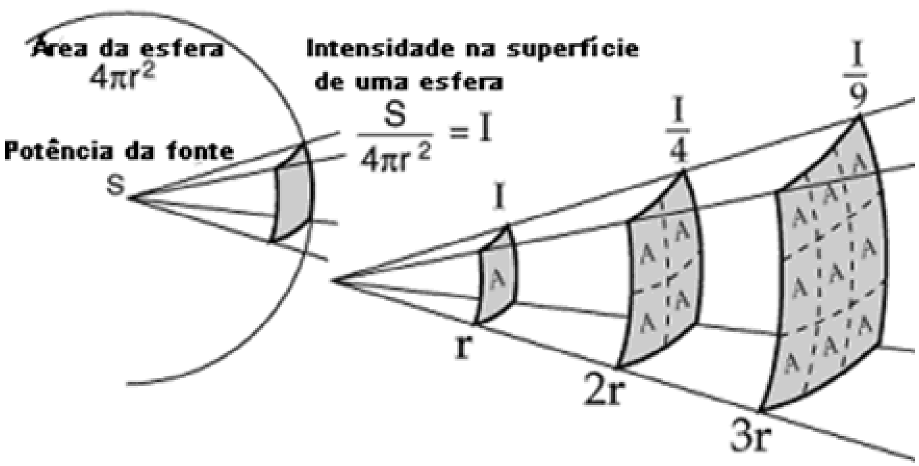
Considere que a densidade do ar é de 1,3 kg/m² e que a velocidade do som no ar é de 340 m/s.

Respostas:
a) 60 dB
b) $2{,}97.10^{-2}$ Pa
c) 35,7 nm

Exercício

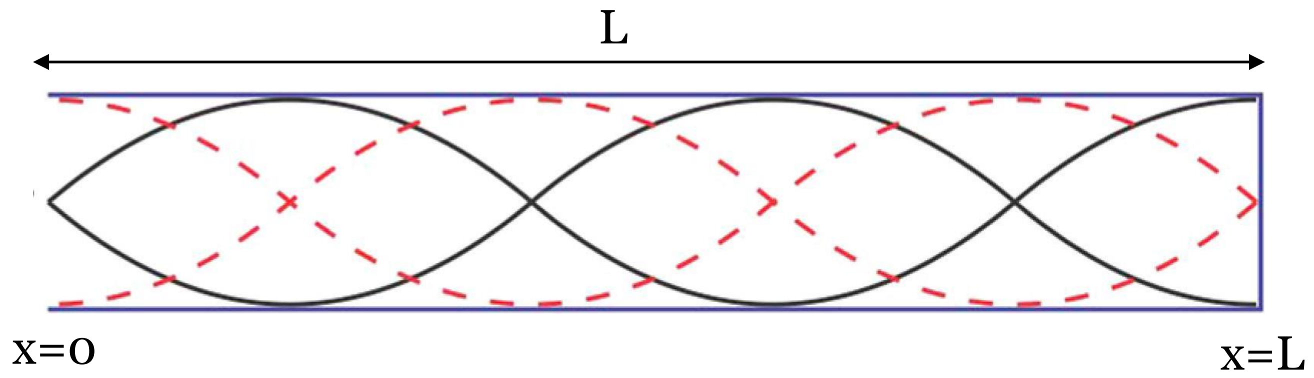
Uma fonte pontual de 1,0 W de potência média emite ondas sonoras de maneira isotrópica. Supondo que não há dissipação de energia, determine a intensidade e o nível sonoro a 2,5 m de distância da fonte.

Resposta:
0,0127 W/m^2
101 dB



Modos normais de vibração em uma coluna de ar

O que acontece quando uma onda sonora atinge a extremidade fechada de um tubo? Acontece uma reflexão, assim como uma onda em uma corda de comprimento finito.



Linha vermelha: deslocamento

Máximo na extremidade aberta
Zero na extremidade fechada

Condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad ; \quad u(L,t) = 0$$

Linha preta: pressão

Zero na extremidade aberta
$(P = P_0 \ \rightarrow \Delta p = 0)$
Máximo na extremidade fechada

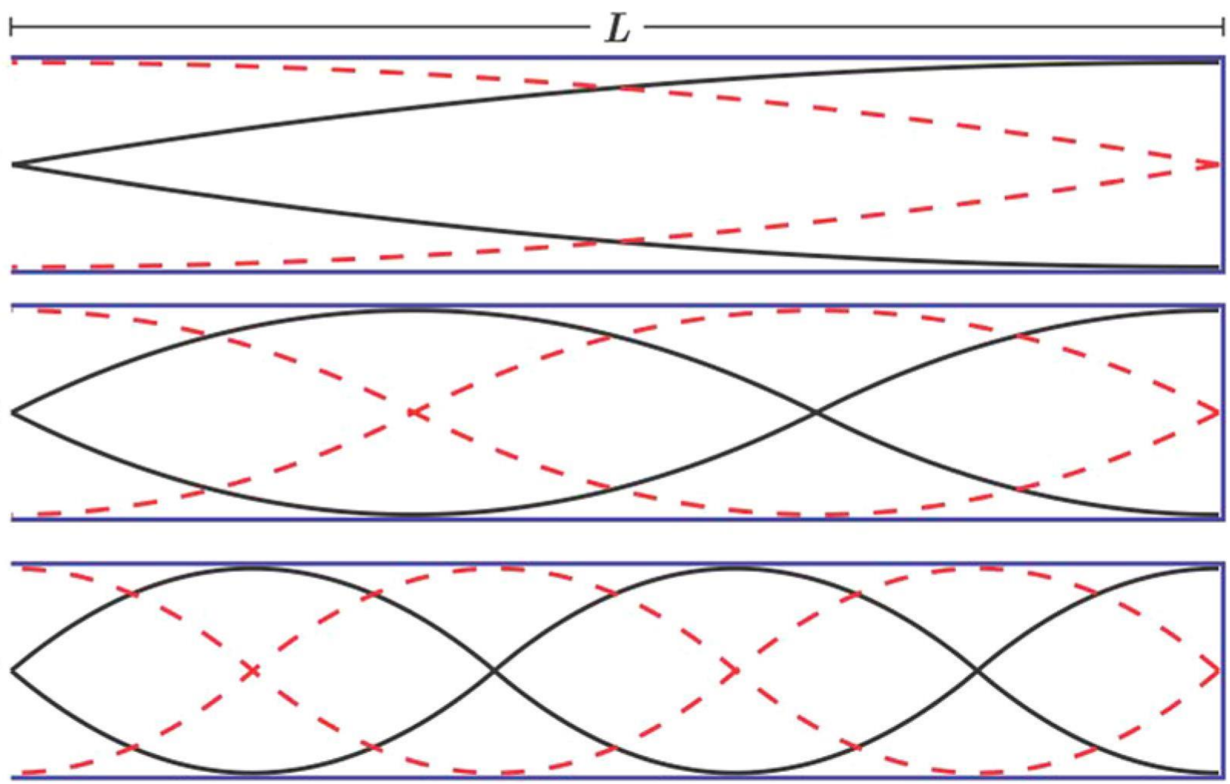
Condições de contorno:

$$\Delta p(0,t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Delta p}{\partial x}(L,t) = 0$$

Tubo aberto em uma extremidade

Três primeiros modos normais dentro de um tubo semiaberto de comprimento L.
Linha preta contínua: pressão
Linha vermelha tracejada: deslocamento das moléculas

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$



$n = 1$ $\lambda_1 = 4L$

$n = 2$ $\lambda_2 = \frac{4L}{3}$

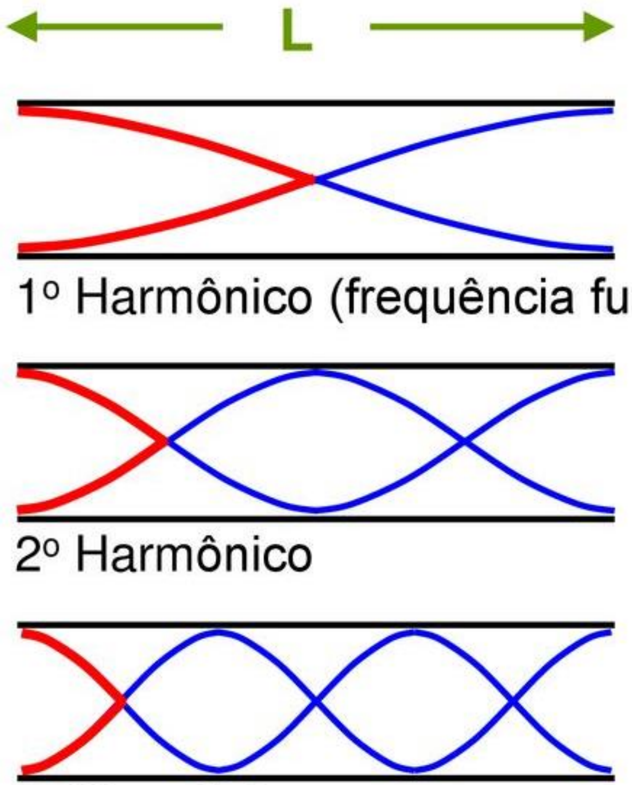
$n = 3$ $\lambda_3 = \frac{4L}{5}$

Pizzeta et al., 2017
https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0264

Tubo aberto nas duas extremidades

Problema similar ao da corda com duas extremidades fixas.
A figura representa as ondas estacionárias de deslocamento

$$\boxed{f_n = n\frac{V}{2L}\,;}\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$



1º Harmônico (frequência fundamental)

2º Harmônico

3º Harmônico

$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow f_1 = \frac{V}{2L}$$

$$L = 2\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = L \Rightarrow f_2 = \frac{V}{L}$$

$$L = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\frac{L}{3} \Rightarrow f_3 = 3\frac{V}{2L}$$

Exercício

Que comprimento deve ter um tubo de orgão, aberto numa extremidade e fechado na outra, para produzir, como tom fundamental, a nota dó da escala musical média, $\nu = 262$ Hz a 15 °C quando a velocidade do som no ar é de 341 m/s? Qual é a variação de frequência $\Delta\nu$ quando a temperatura sobe para 25 °C? Dados: $m_{\mathrm{Ar}} = 28,9\,\mathrm{g/mol}$, $\gamma_{\mathrm{Ar}} = 1,4$ e $R = 8,314\mathrm{J/(mol\,K)}$.

Resposta:
L = 32,5 cm
$\Delta\nu = 3,8\ Hz$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M_M}}$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$