

Estatística Aplicada II

- ▶ Algumas distribuições adicionais

Aula de hoje

- ▶ Tópicos

- ▶ Algumas distribuições adicionais

- ▶ Referência

- ▶ Barrow, M. Estatística para economia, contabilidade e administração. São Paulo: Ática, 2007, Cap. 6

Aula de hoje

Objetivos:

- ▶ Construir intervalos de confiança para a variância
 - ▶ Comparar valores observados e esperados
 - ▶ Analisar uma tabela de contingência
 - ▶ Testar pela igualdade de duas variâncias
 - ▶ Testar pela igualdade de média entre grupos
- ⇒ Podemos atingir esses objetivos através da utilização das distribuições χ^2 e F .

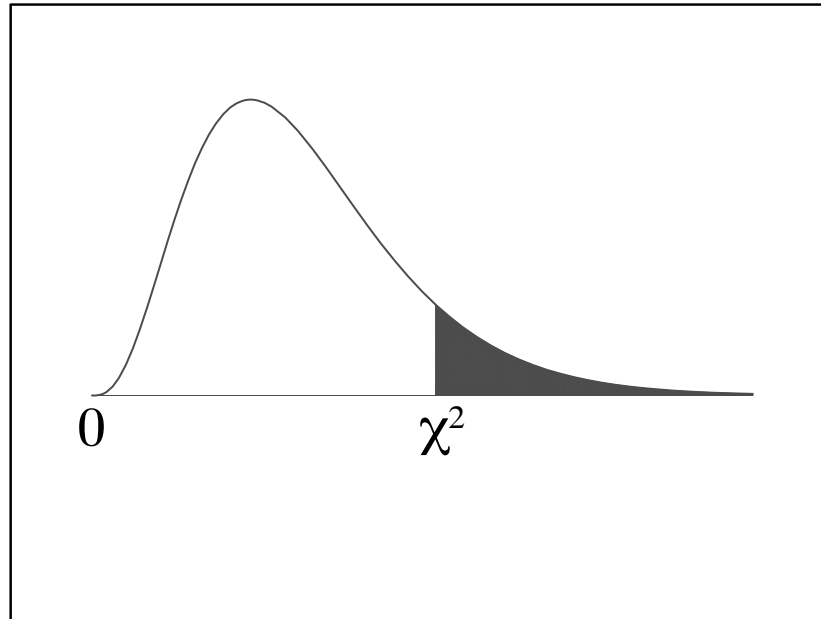
Distribuição χ^2

- ▶ **Motivação I:** Uma amostra de $n=20$ possui desvio-padrão=25. Qual é a estimativa da variância populacional?
- ▶ Estimativa pontual:
 - ▶ $E(s^2)=\sigma^2$

Distribuição χ^2

- ▶ **Motivação I:** Uma amostra de $n=20$ possui desvio-padrão=25. Qual é a estimativa da variância populacional?
- ▶ Estimativa por intervalo
 - ▶ Pergunta: qual é a distribuição de s^2 ?
 - ▶ $(n-1) s^2 / \sigma^2$ tem uma distribuição χ^2 com $n-1$ graus de liberdade

Distribuição χ^2



A região hachurada tem área equivalente a α

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Distribuição χ^2

- ▶ **Motivação II:** Suponha que um dado foi lançado 72 vezes, com resultados apresentados na tabela a seguir:

Escore	1	2	3	4	5	6
Frequencia	6	15	15	7	15	14

- ▶ Com base nesses resultados, você rejeitaria a hipótese de que o dado é não-enviesado?

Distribuição χ^2

- ▶ A estatística do teste unicaudal é:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

- ▶ Com $k-1$ graus de liberdade (em que k é o número de resultados possíveis, 6 nesse caso)

Distribuição χ^2

- ▶ A estatística do teste unicaudal é:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

- ▶ Com k-1 graus de liberdade (em que k é o número de resultados possíveis, 6 nesse caso)

Distribuição χ^2

- **Motivação III (tabelas de contingência:** Com base nos dados da tabela a seguir, há associação entre intenção de voto e classe social?

Social class	Labour	Conservative	Liberal Democrat	Total
A	10	15	15	40
B	40	35	25	100
C	30	20	10	60
Total	80	70	50	200

Distribuição χ^2

- ▶ A estatística do teste unicaudal é:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

- ▶ Com $(\text{linhas}-1) * (\text{colunas}-1)$ graus de liberdade

A dark blue vertical bar is positioned on the left side of the slide, spanning the height of the top rectangular box.

Distribuição F



Distribuição F

Motivação:

- ▶ Nas aulas passadas, construimos testes de hipóteses para responder a:
 - ▶ “Duas populações distintas possuem as mesmas médias?”

Distribuição F

Motivação:

- ▶ Na aula de hoje, construiremos testes de hipóteses para responder a:
 - ▶ “Duas populações distintas possuem as mesmas variâncias?”
 - ▶ “Mais de duas populações distintas possuem diferenças médias significantes?”

Distribuição F

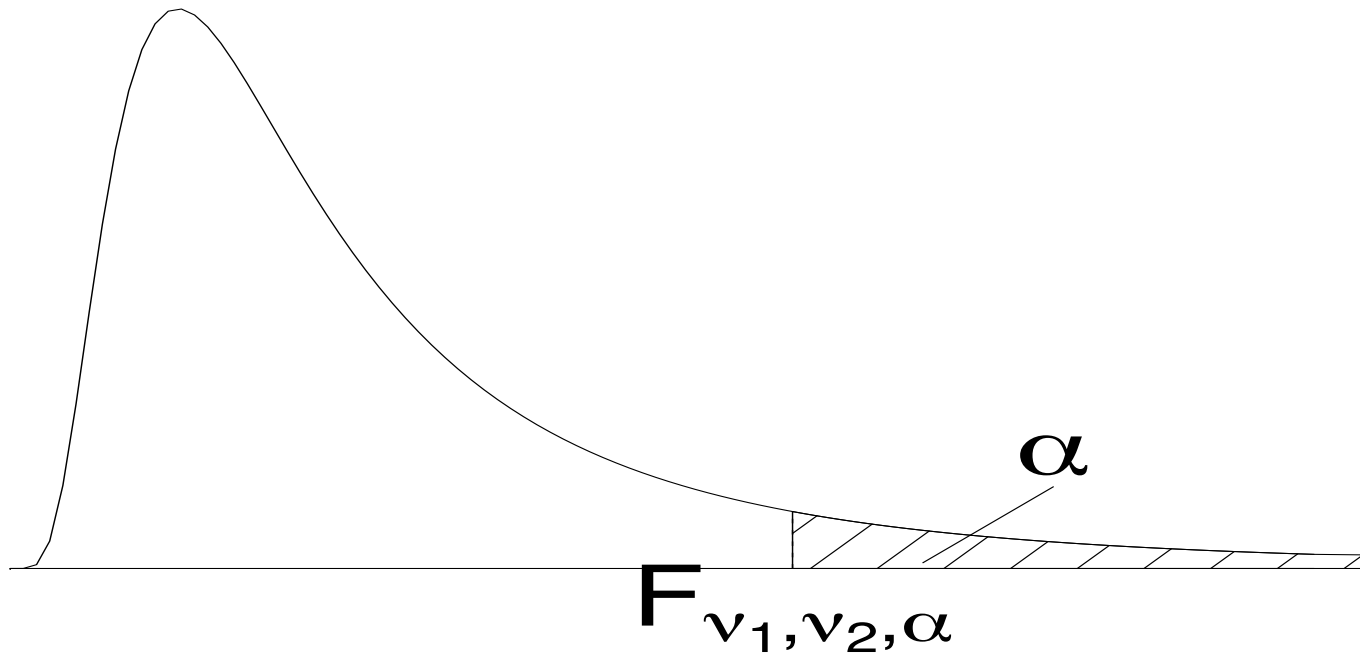
- ▶ Suponha que coletamos duas amostras aleatórias A e B, de populações distintas, com as seguintes características:
 - ▶ Ambas com 30 observações
 - ▶ O desvio-padrão amostral de A igual 25
 - ▶ O desvio-padrão amostral de B igual 20
- ▶ Com base nessas amostras, como podemos testar se as duas populações possuem as mesmas variâncias?

Distribuição F

- ▶ A estatística do teste bicaudal é:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Distribuição F



Valores críticos da Distribuição F para $\alpha=0,025$

Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647.7890	799.5000	864.1630	899.5833	921.8479	937.1111	948.2169	956.6562	963.2846
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136

Valores críticos da Distribuição F para $\alpha=0,025$

Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	968.6274	973.0252	976.7079	979.8368	982.5278	984.8668	986.9187	988.7331	990.3490
2	39.3980	39.4071	39.4146	39.4210	39.4265	39.4313	39.4354	39.4391	39.4424
3	14.4189	14.3742	14.3366	14.3045	14.2768	14.2527	14.2315	14.2127	14.1960
4	8.8439	8.7935	8.7512	8.7150	8.6838	8.6565	8.6326	8.6113	8.5924
5	6.6192	6.5678	6.5245	6.4876	6.4556	6.4277	6.4032	6.3814	6.3619
6	5.4613	5.4098	5.3662	5.3290	5.2968	5.2687	5.2439	5.2218	5.2021
7	4.7611	4.7095	4.6658	4.6285	4.5961	4.5678	4.5428	4.5206	4.5008
8	4.2951	4.2434	4.1997	4.1622	4.1297	4.1012	4.0761	4.0538	4.0338
9	3.9639	3.9121	3.8682	3.8306	3.7980	3.7694	3.7441	3.7216	3.7015
10	3.7168	3.6649	3.6209	3.5832	3.5504	3.5217	3.4963	3.4737	3.4534
11	3.5257	3.4737	3.4296	3.3917	3.3588	3.3299	3.3044	3.2816	3.2612
12	3.3736	3.3215	3.2773	3.2393	3.2062	3.1772	3.1515	3.1286	3.1081
13	3.2497	3.1975	3.1532	3.1150	3.0819	3.0527	3.0269	3.0039	2.9832
14	3.1469	3.0946	3.0502	3.0119	2.9786	2.9493	2.9234	2.9003	2.8795
15	3.0602	3.0078	2.9633	2.9249	2.8915	2.8621	2.8360	2.8128	2.7919
16	2.9862	2.9337	2.8890	2.8506	2.8170	2.7875	2.7614	2.7380	2.7170
17	2.9222	2.8696	2.8249	2.7863	2.7526	2.7230	2.6968	2.6733	2.6522
18	2.8664	2.8137	2.7689	2.7302	2.6964	2.6667	2.6404	2.6168	2.5956
19	2.8172	2.7645	2.7196	2.6808	2.6469	2.6171	2.5907	2.5670	2.5457
20	2.7737	2.7209	2.6758	2.6369	2.6030	2.5731	2.5465	2.5228	2.5014
21	2.7348	2.6819	2.6368	2.5978	2.5638	2.5338	2.5071	2.4833	2.4618
22	2.6998	2.6469	2.6017	2.5626	2.5285	2.4984	2.4717	2.4478	2.4262
23	2.6682	2.6152	2.5699	2.5308	2.4966	2.4665	2.4396	2.4157	2.3940
24	2.6396	2.5865	2.5411	2.5019	2.4677	2.4374	2.4105	2.3865	2.3648
25	2.6135	2.5603	2.5149	2.4756	2.4413	2.4110	2.3840	2.3599	2.3381
26	2.5896	2.5363	2.4908	2.4515	2.4171	2.3867	2.3597	2.3355	2.3137
27	2.5676	2.5143	2.4688	2.4293	2.3949	2.3644	2.3373	2.3131	2.2912
28	2.5473	2.4940	2.4484	2.4089	2.3743	2.3438	2.3167	2.2924	2.2704
29	2.5286	2.4752	2.4295	2.3900	2.3554	2.3248	2.2976	2.2732	2.2512
30	2.5112	2.4577	2.4120	2.3724	2.3378	2.3072	2.2799	2.2554	2.2334
40	2.3882	2.3343	2.2882	2.2481	2.2130	2.1819	2.1542	2.1293	2.1068
60	2.2702	2.2159	2.1692	2.1286	2.0929	2.0613	2.0330	2.0076	1.9846
120	2.1570	2.1021	2.0548	2.0136	1.9773	1.9450	1.9161	1.8900	1.8663
∞	2.0483	1.9927	1.9447	1.9027	1.8656	1.8326	1.8028	1.7759	1.7515

Valores críticos da Distribuição F para $\alpha=0,025$

Numerator Degrees of Freedom

	Numerator Degrees of Freedom						
	19	20	24	30	40	60	120
1	991.7973	993.1028	997.2492	1001.4144	1005.5981	1009.8001	1014.0202
2	39.4453	39.4479	39.4562	39.4646	39.4729	39.4812	39.4896
3	14.1810	14.1674	14.1241	14.0805	14.0365	13.9921	13.9473
4	8.5753	8.5599	8.5109	8.4613	8.4111	8.3604	8.3092
5	6.3444	6.3286	6.2780	6.2269	6.1750	6.1225	6.0693
6	5.1844	5.1684	5.1172	5.0652	5.0125	4.9589	4.9044
7	4.4829	4.4667	4.4150	4.3624	4.3089	4.2544	4.1989
8	4.0158	3.9995	3.9472	3.8940	3.8398	3.7844	3.7279
9	3.6833	3.6669	3.6142	3.5604	3.5055	3.4493	3.3918
10	3.4351	3.4185	3.3654	3.3110	3.2554	3.1984	3.1399
11	3.2428	3.2261	3.1725	3.1176	3.0613	3.0035	2.9441
12	3.0896	3.0728	3.0187	2.9633	2.9063	2.8478	2.7874
13	2.9646	2.9477	2.8932	2.8372	2.7797	2.7204	2.6590
14	2.8607	2.8437	2.7888	2.7324	2.6742	2.6142	2.5519
15	2.7730	2.7559	2.7006	2.6437	2.5850	2.5242	2.4611
16	2.6980	2.6808	2.6252	2.5678	2.5085	2.4471	2.3831
17	2.6331	2.6158	2.5598	2.5020	2.4422	2.3801	2.3153
18	2.5764	2.5590	2.5027	2.4445	2.3842	2.3214	2.2558
19	2.5265	2.5089	2.4523	2.3937	2.3329	2.2696	2.2032
20	2.4821	2.4645	2.4076	2.3486	2.2873	2.2234	2.1562
21	2.4424	2.4247	2.3675	2.3082	2.2465	2.1819	2.1141
22	2.4067	2.3890	2.3315	2.2718	2.2097	2.1446	2.0760
23	2.3745	2.3567	2.2989	2.2389	2.1763	2.1107	2.0415
24	2.3452	2.3273	2.2693	2.2090	2.1460	2.0799	2.0099
25	2.3184	2.3005	2.2422	2.1816	2.1183	2.0516	1.9811
26	2.2939	2.2759	2.2174	2.1565	2.0928	2.0257	1.9545
27	2.2713	2.2533	2.1946	2.1334	2.0693	2.0018	1.9299
28	2.2505	2.2324	2.1735	2.1121	2.0477	1.9797	1.9072
29	2.2313	2.2131	2.1540	2.0923	2.0276	1.9591	1.8861
30	2.2134	2.1952	2.1359	2.0739	2.0089	1.9400	1.8664
40	2.0864	2.0677	2.0069	1.9429	1.8752	1.8028	1.7242
60	1.9636	1.9445	1.8817	1.8152	1.7440	1.6668	1.5810
120	1.8447	1.8249	1.7597	1.6899	1.6141	1.5299	1.4327
∞	1.7291	1.7085	1.6402	1.5660	1.4835	1.3883	1.2684

Denominator Degrees of Freedom

Análise de Variância (ANOVA)

- Suponha agora que coletamos três amostras aleatórias 1, 2, e 3 sobre a produção de três firmas:

Observation	Factory 1	Factory 2	Factory 3
1	415	385	408
2	430	410	415
3	395	409	418
4	399	403	440
5	408	405	425
6	418	400	
7		399	

Análise de Variância (ANOVA)

- ▶ Como devemos testar se o nível de produção das três firmas são equivalentes?

Análise de Variância (ANOVA)

► Intuição do teste:

- Primeiramente, devemos calcular a variância entre grupos e dentro de cada grupo.
- Se a variância entre grupos for maior do que a variância dentro de cada grupo, devemos rejeitar a hipótese nula

Análise de Variância (ANOVA)

► Cálculos:

- Para encontrar a variância total, devemos somar os quadrados dos desvios de todas as observações em relação à média total

$$SQT = \sum_{ij} \left(X_{ij} - \bar{X} \right)^2$$

Análise de Variância (ANOVA)

► Cálculos:

- Para encontrar a variância “entre grupos”, devemos somar os quadrados dos desvios das médias de cada firma em relação à média total

$$SQE = \sum_i \left(\bar{X}_i - \bar{X} \right)^2$$

Análise de Variância (ANOVA)

► Cálculos:

- Para encontrar a variância “dentro dos grupos”, devemos somar os quadrados dos desvios das observações em relação à média de seu grupo

$$SQD = \sum_{ij} \left(X_{ij} - \bar{X}_i \right)^2$$

Análise de Variância (ANOVA)

- ▶ A estatística do teste unicaudal é:

$$F = \frac{SQE/(k-1)}{SQD/(n-k)}$$

- ▶ distribuída com $k-1, n-k$ graus de liberdade