

PGF5312 – 1 FUNDAMENTOS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS MÉDICAS

Aula 5 – Domínio de frequências Parte 2

Paulo R. Costa

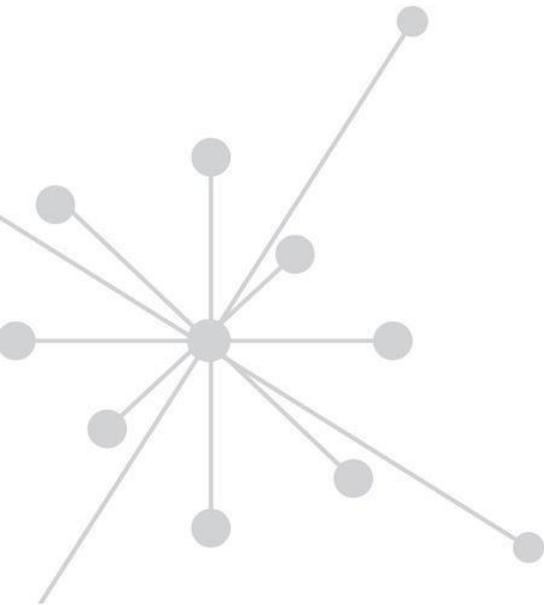
Grupo de Dosimetria das Radiações
e Física Médica

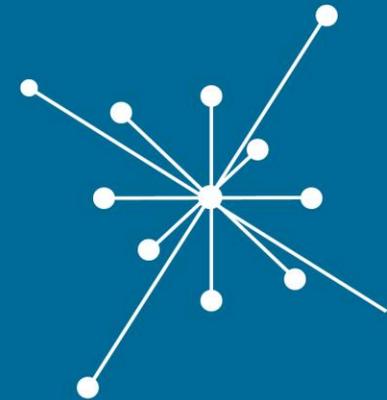
Instituto de Física - USP



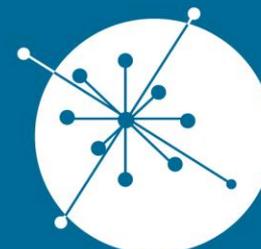
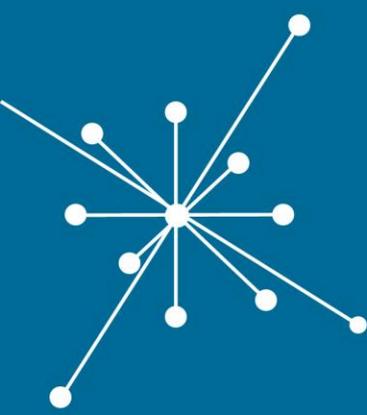
O que veremos hoje

- IMAGENS DIGITAIS
- INFORMAÇÕES NAS IMAGENS
- TEOREMA DA AMOSTRAGEM
- ALIASING





Imagens digitais

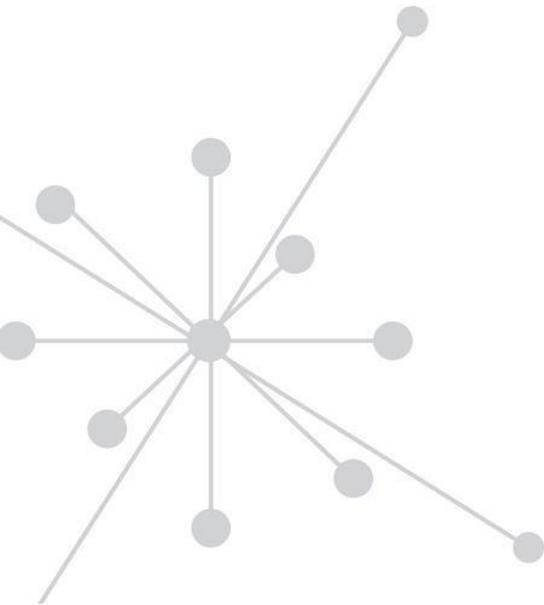


GRUPO DE
DOSIMETRIA
DAS RADIAÇÕES
e FÍSICA MÉDICA

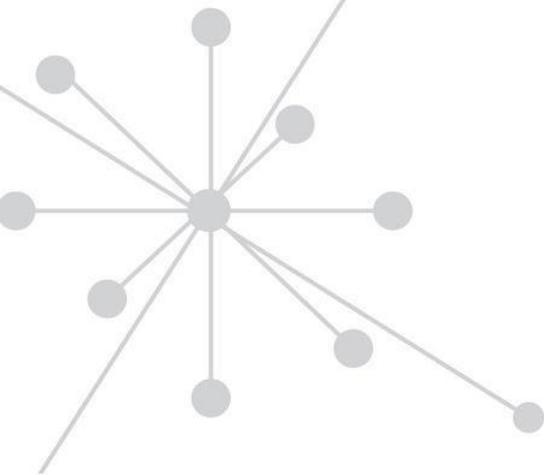
IFUSP - Instituto de Física da USP

Imagens digitais

- Estruturas mensuráveis
 - Ex: imagens \rightarrow senóides
 - Espaço de frequências e transformadas de Fourier
- Imagens médicas
 - Estruturas visíveis (luz visível) a partir de medições de energias não visíveis aos sentidos humanos



- Algumas considerações importantes
 - Limitações das tecnologias usadas para a aquisição das imagens
 - Características da percepção visual humana
 - Necessidade de simplificar ou extrair informações específicas das imagens
 - As interações complexas entre estas três características



O que é uma imagem digital?



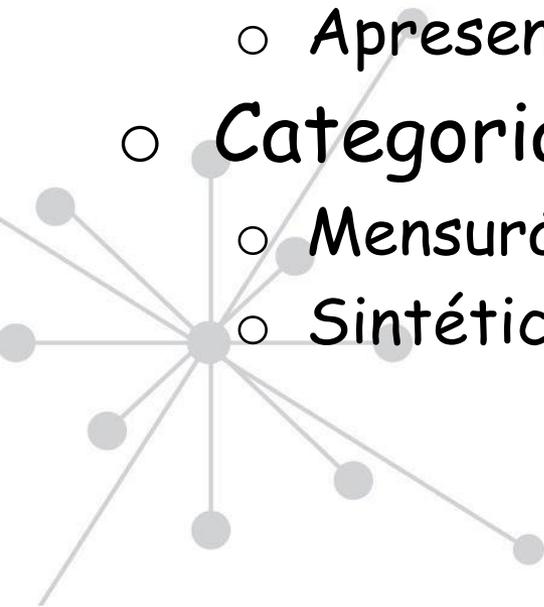
RAFAEL MARQUES PORTO

FOTOGRAFIA

<https://www.rmportofotografia.com/>

O que é uma imagem digital?

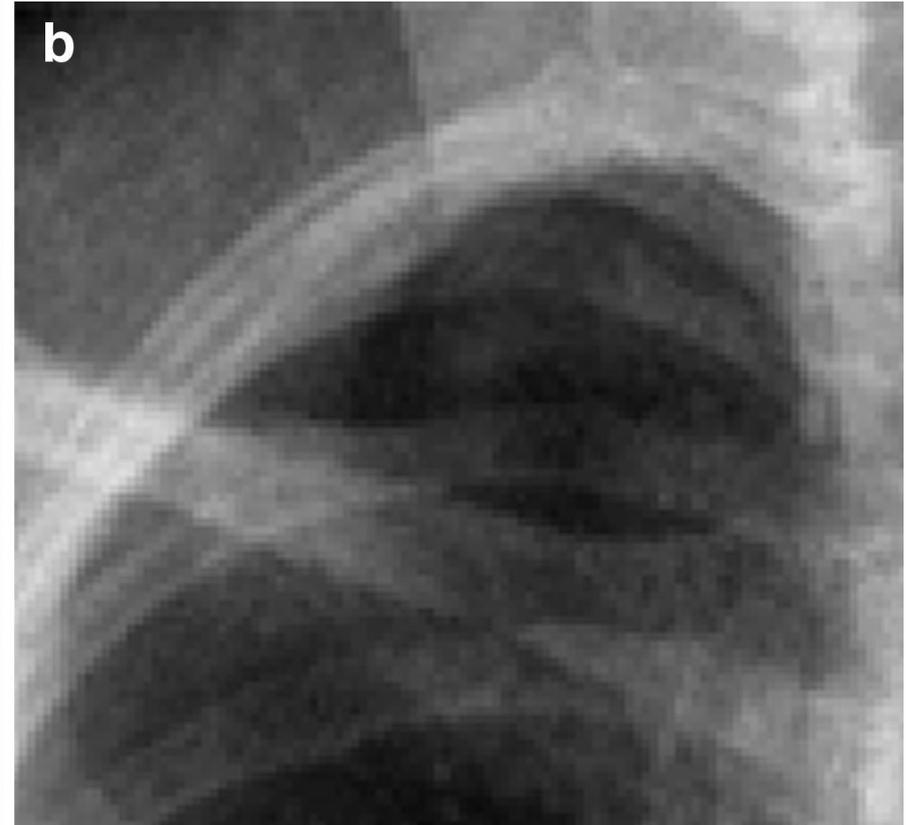
- Passos entre a captura e a apresentação
 - Transformação luz-cargas
 - Corrente elétrica
 - Binarização
 - Processamento
 - Armazenamento
 - Apresentação
- Categorias de imagens
 - Mensurável
 - Sintética



O que é uma imagem digital?

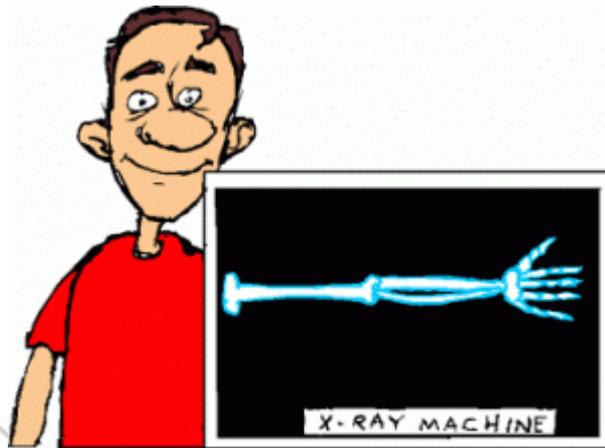
- Qual a diferença entre imagens
 - Digitais
 - Analógicas

?



O que é uma imagem digital?

- Imagens digitais podem ser
 - Armazenadas eletronicamente
 - Processadas computacionalmente
- Qual a propriedade fundamental?

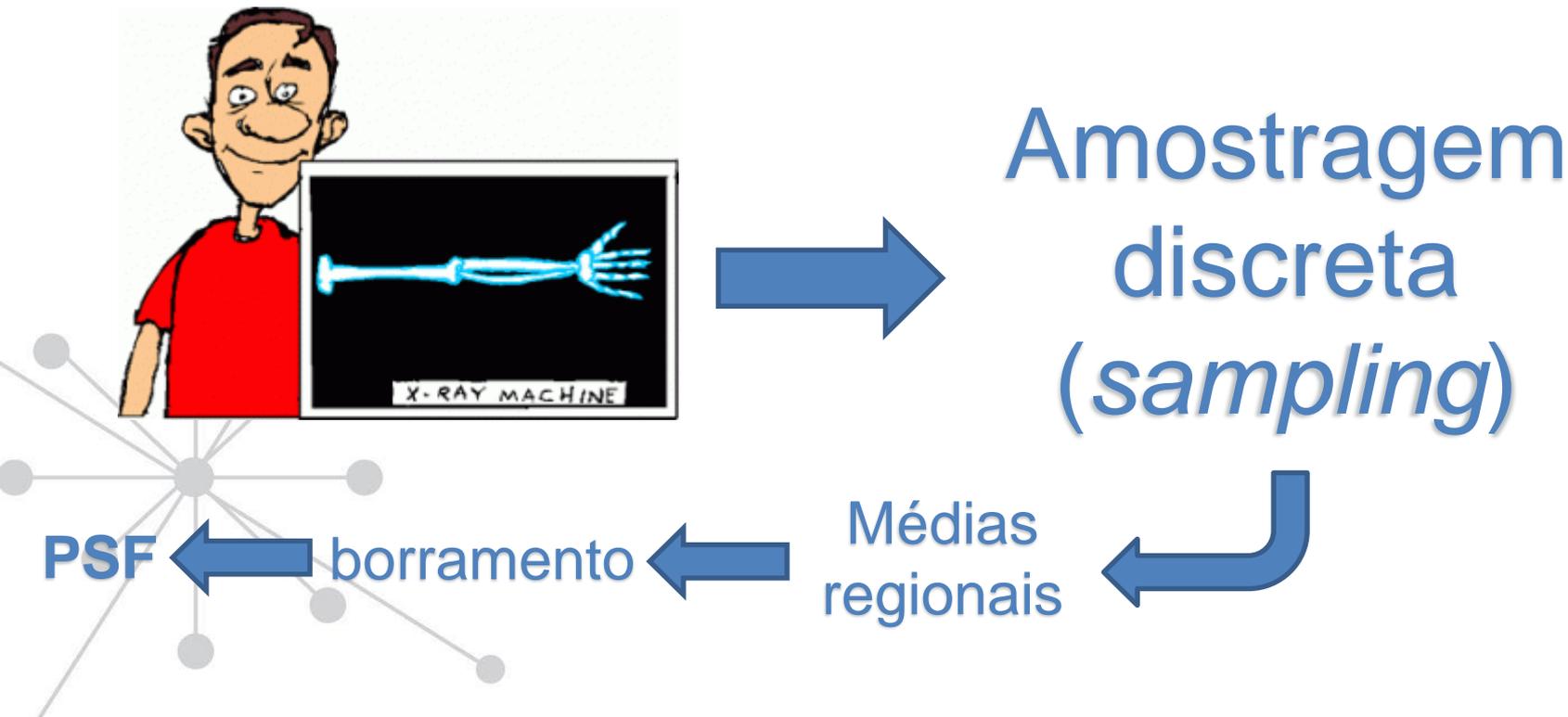


Amostragem
discreta
(*sampling*)

Médias
regionais

borramento

PSF



Aquisição de imagens

○ Fonte

○ ondas EM

→ Luz visível

→ Radar

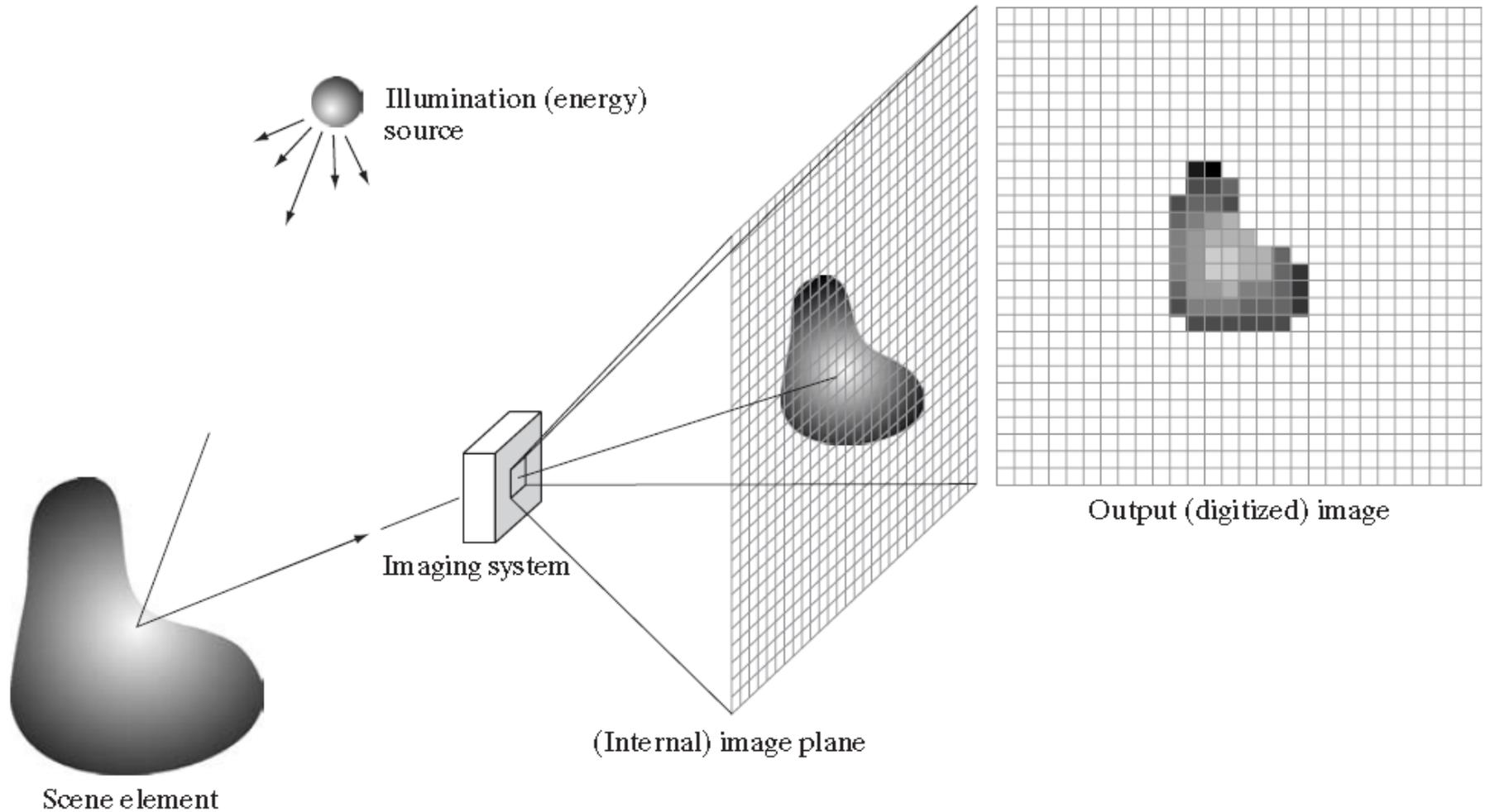
→ Raios X

→ Microondas/rádio

○ Mecânicas

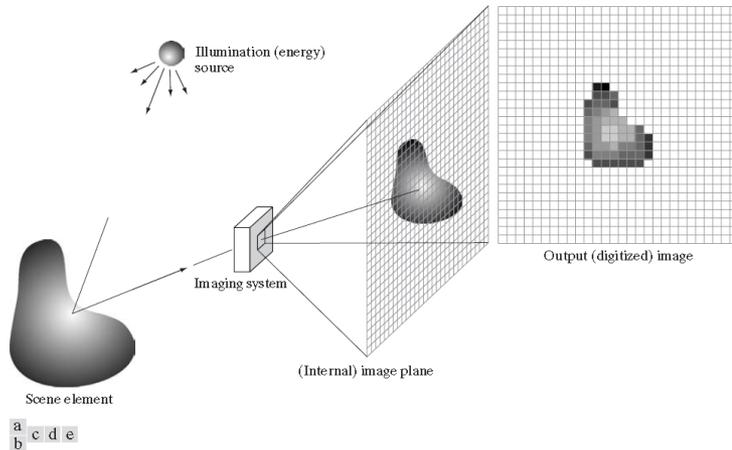
→ Ultrassom

Sistemas de detecção



a	c	d	e
b			

Modelo simplificado de formação de imagens



$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

$$0 < i(x, y) < \infty$$

$$0 < r(x, y) < 1$$

$$0 < f(x, y) < \infty$$

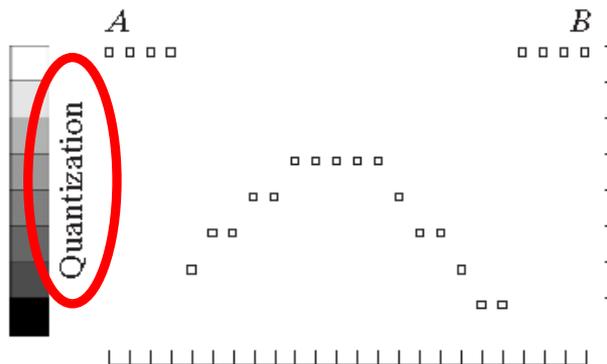
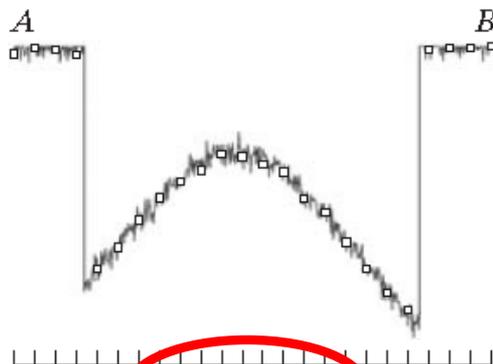
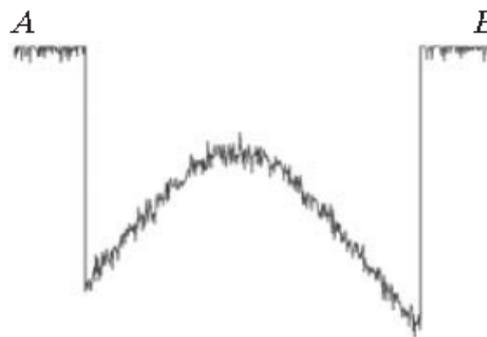
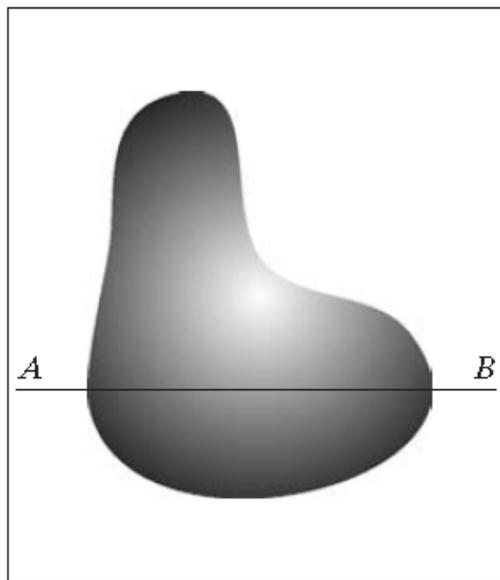
Proporcional à energia irradiada
por uma fonte física

- “ILUMINÂNCIA”
- “REFLECTÂNCIA”

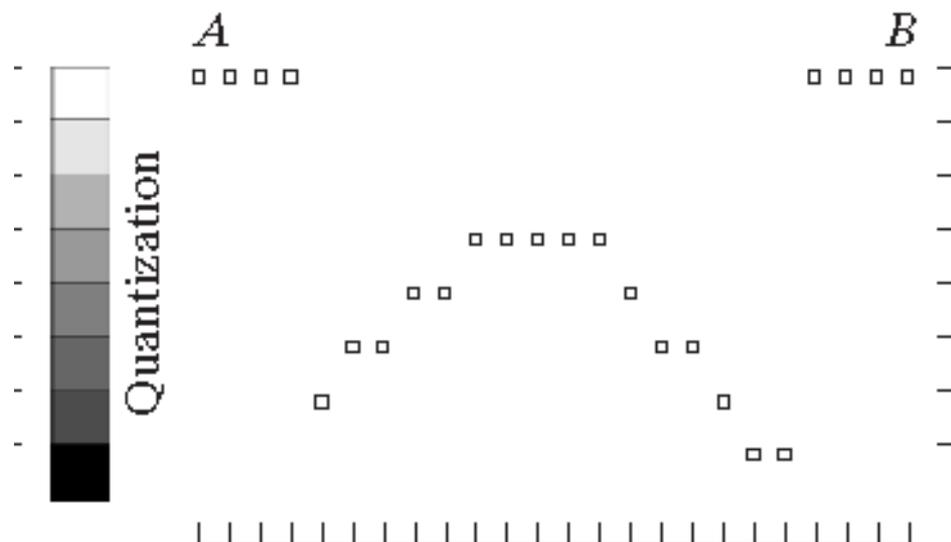
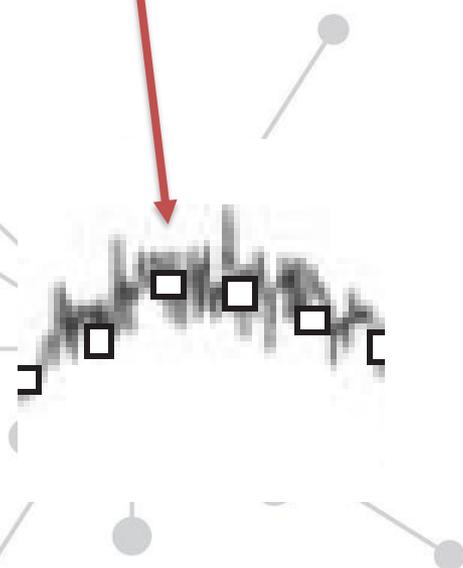
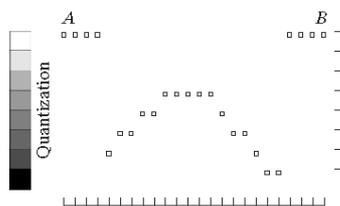
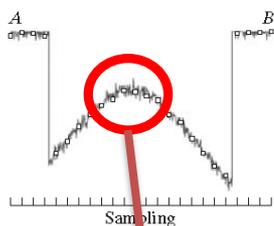
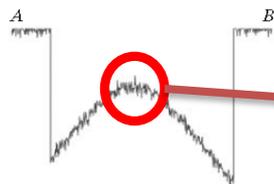
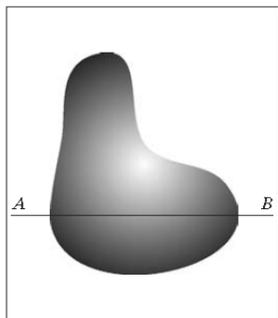
$i(x, y) \rightarrow$ características da fonte

$r(x, y) \rightarrow$ características do objeto (*para RX: transmissividade*)

Amostragem e quantização

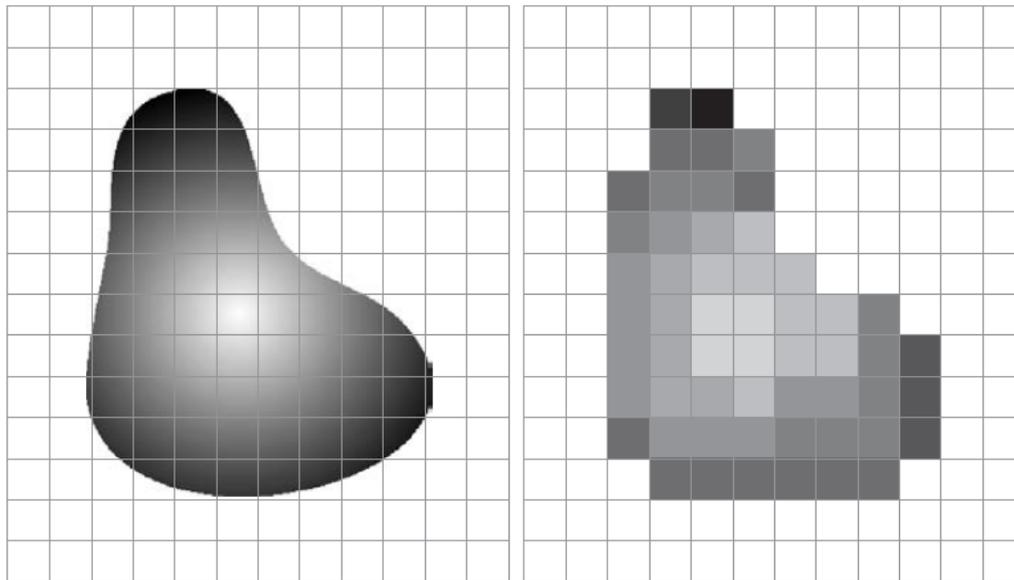


Amostragem e quantização



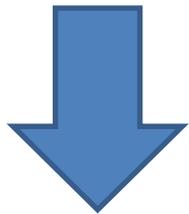
Amostragem e quantização

- Dependências
 - Tipo de detector (simples, vetor ou matriz)
 - Existência ou não de movimentos (mecânica)
 - Qualidade dos componentes "ópticos"



Representação de uma imagem digital

$f(s, t) \rightarrow$ imagem representada por
variáveis contínuas s e t



Amostragem e
quantização

$f(x, y) \rightarrow$ imagem amostrada em uma
matriz $M \times N$

domínio espacial:

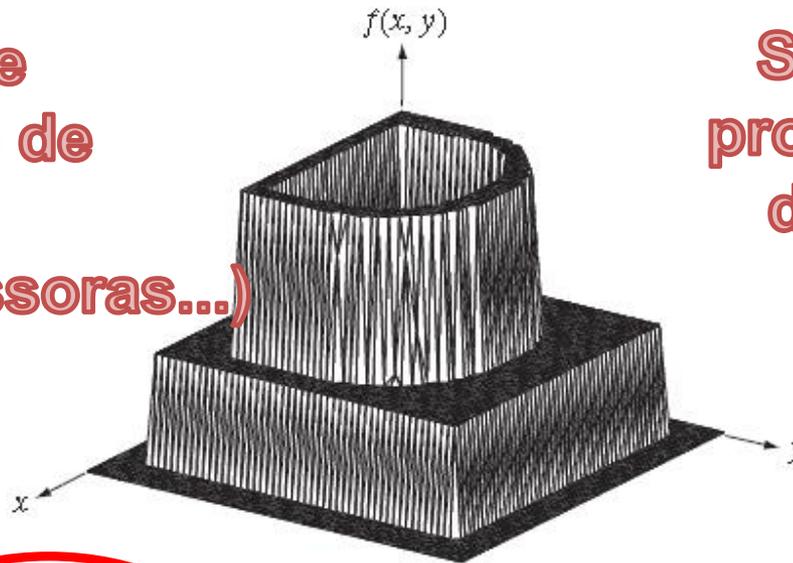
$$x = 0, 1, 2 \dots M - 1 \quad e \quad y = 1, 2 \dots N - 1$$

Representação de uma imagem digital

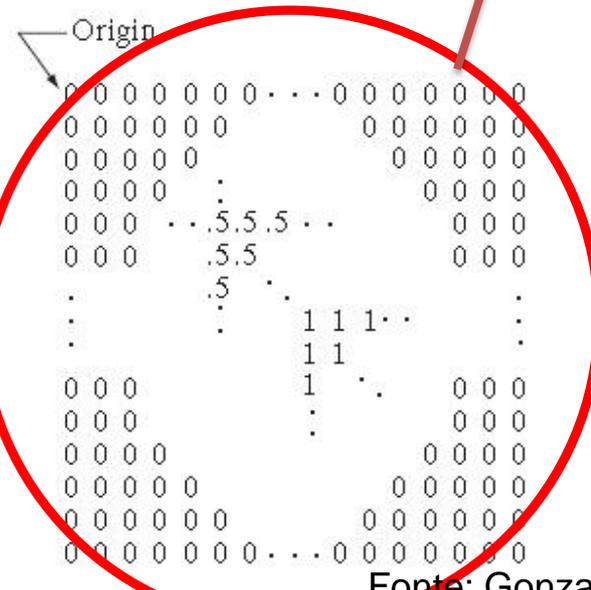
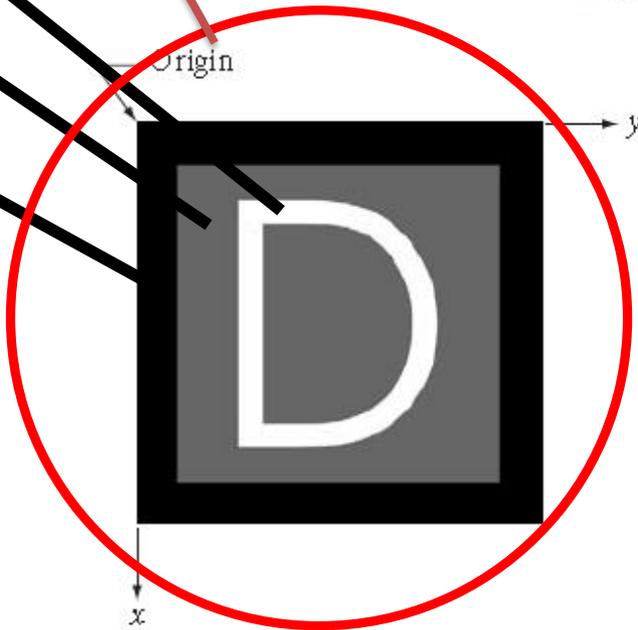
Sistemas de
apresentação de
imagens

Sistemas de
processamento
de imagens

(monitores, impressoras...)



1
0,5
0



Voltando aos conceitos iniciais



Voltando aos conceitos iniciais

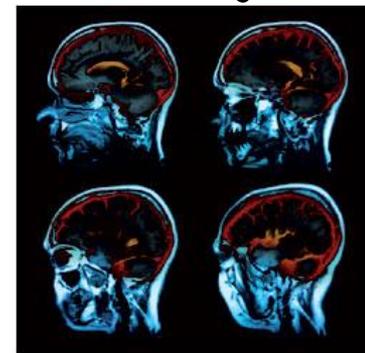
- A foto de Ansel Adams é uma imagem digital?
 - A foto original
 - grãos de prata
 - A foto impressa em um livro
 - tinta
 - A foto projetada na tela
 - sistema óptico
- E se a foto tivesse sido capturada com uma câmera digital?
 - Muitas etapas entre a captura dos fótons de luz na CCD e sua apresentação

Voltando aos conceitos iniciais

- **Imagens**

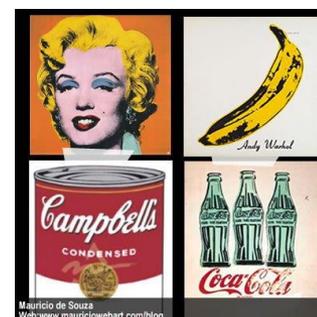
- **Medidas**

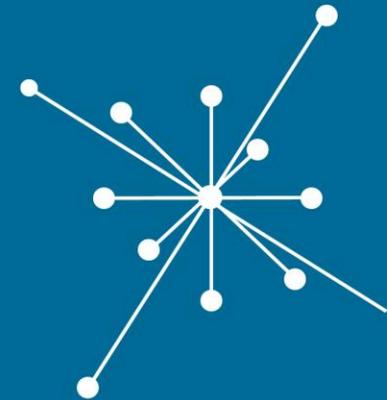
→ Obtidas utilizando algum equipamento para capturar um sinal físico proveniente de um objeto



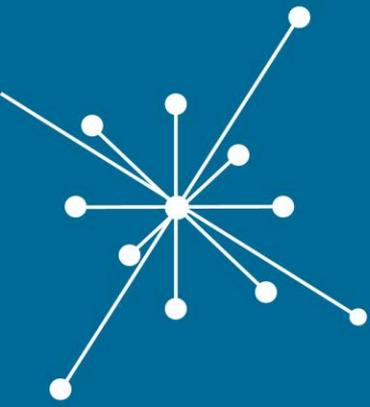
- **Sintéticas**

→ Construída ou desenhada





Informações nas imagens



GRUPO DE
DOSIMETRIA
DAS RADIAÇÕES
e FÍSICA MÉDICA

IFUSP - Instituto de Física da USP

Representação de uma imagem digital

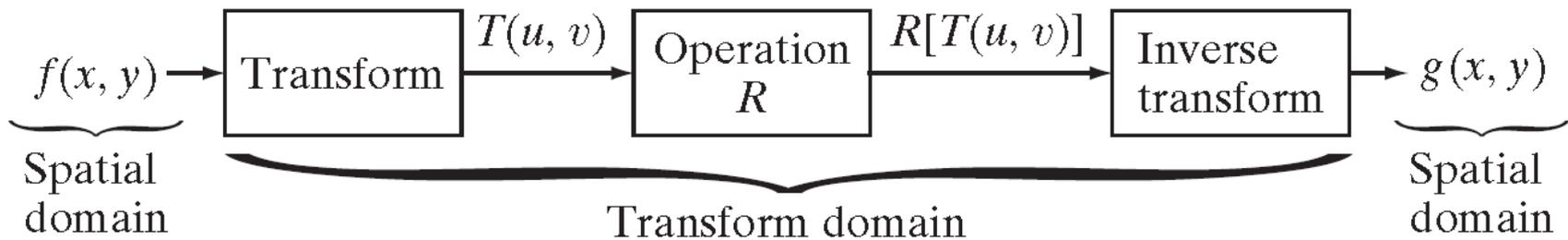
$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0, N - 1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M - 1,0) & f(M - 1,1) & \cdots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix}$$

- Elemento de imagem
- Elemento de figura
- Pixel
- Pel

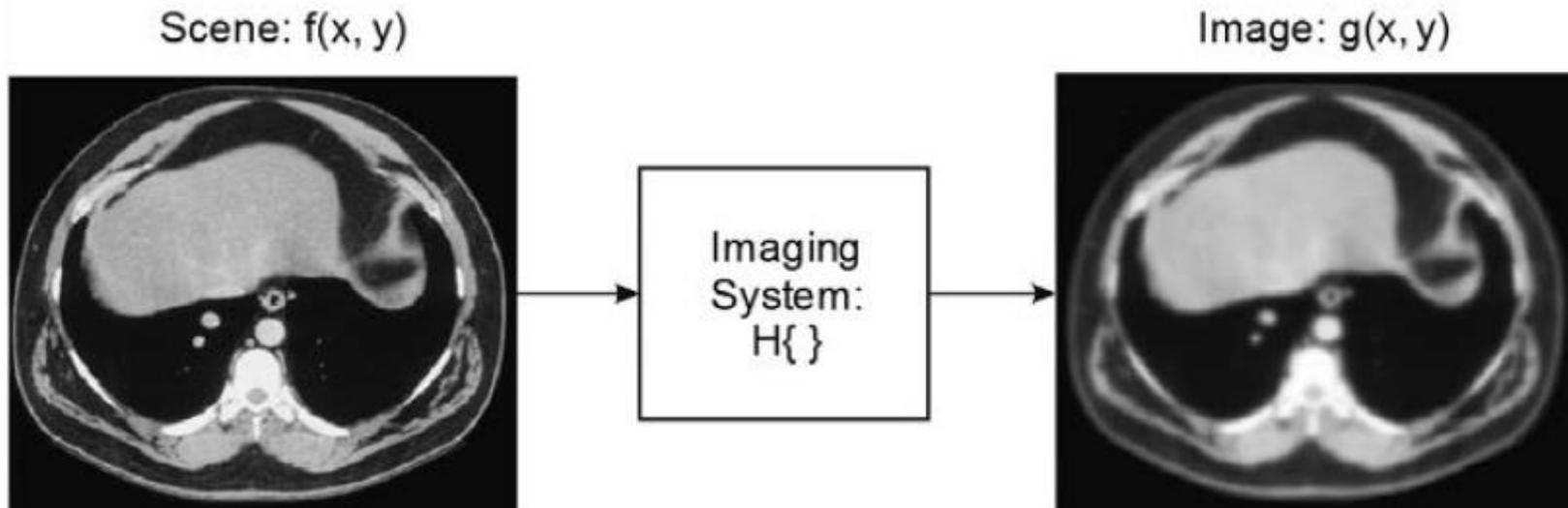
$$a_{i,j} = f(x = i, y = j) = f(i, j)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{0,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$

Informação nas imagens



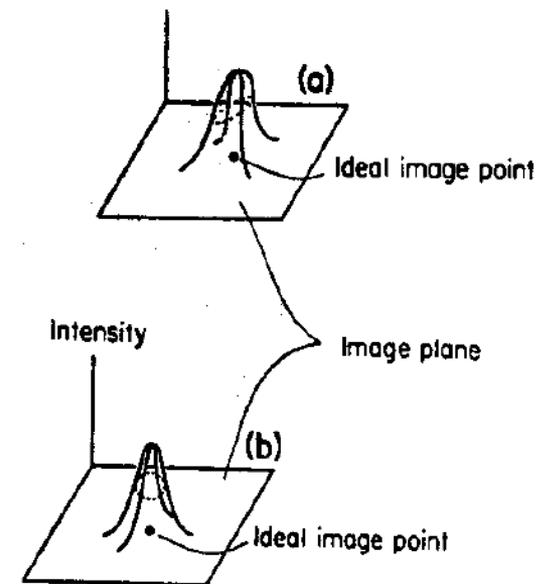
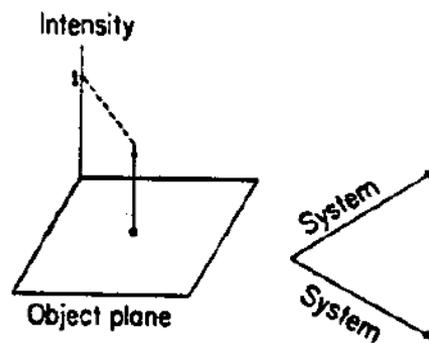
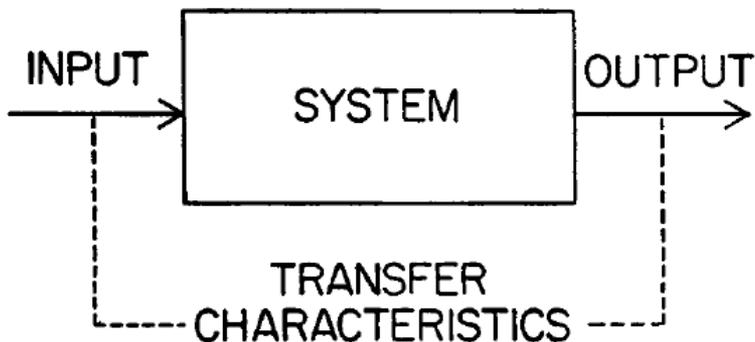
Fonte: Gonzalez&Woods – 3ª. Ed



Fonte: Diagnostic Radiology Physics_A Handbook for Teachers and Students, IAEA, 2013

$$I_{saida}(x, y) = I_{entrada}(x, y) \otimes PSF(x, y)$$

Informação nas imagens



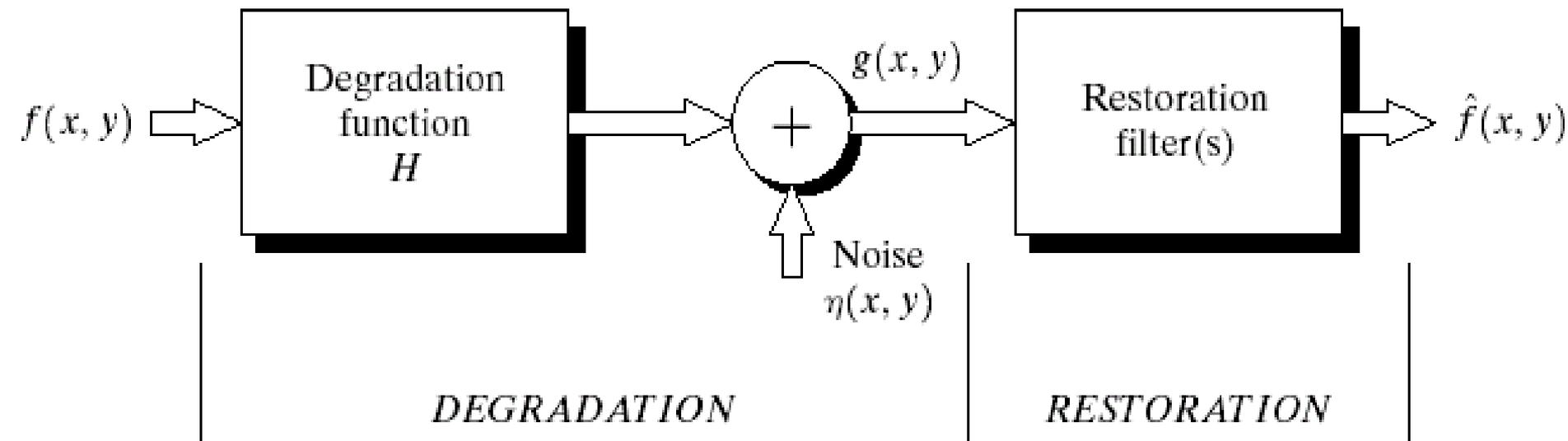
Point Spread-Function, Line Spread-Function,
and Modulation Transfer Function

Tools for the Study of Imaging Systems¹

KURT ROSSMANN, Ph.D.

RADIOLOGY 93: 257-272, August 1969.

Informação nas imagens

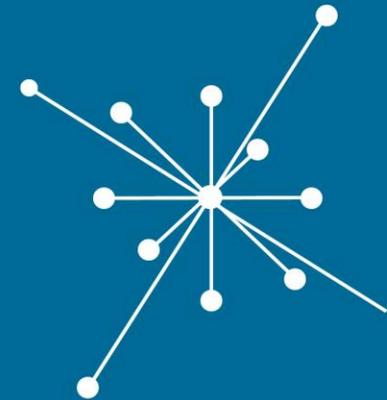


$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + \eta(x, y)$$

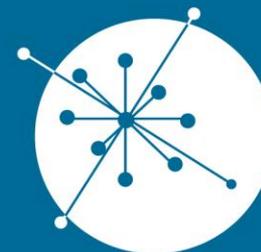
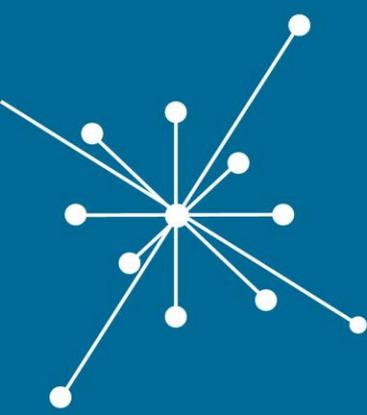
Informação nas imagens

- Conteúdo de informações em uma imagem
 - Mais importante que seu formato físico
 - Deve ser o máximo que o sistema de aquisição e armazenamento é capaz de registrar
 - Dependências em uma imagem digital
 - Quantidade de pixels
 - Quantidade de informações por pixel
 - Intensidades
 - Cores
 - A quantidade REAL apresentada é sempre inferior à máxima possível
 - PSF
 - Ruído

VAMOS DETALHAR ISSO NAS PRÓXIMAS AULAS



Teorema da amostragem

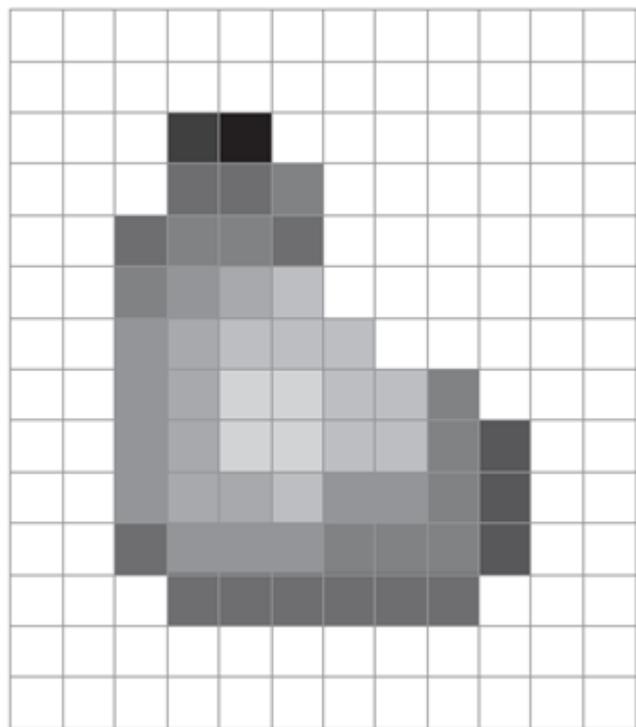


GRUPO DE
DOSIMETRIA
DAS RADIAÇÕES
e FÍSICA MÉDICA

IFUSP - Instituto de Física da USP

Voltando à ideia da amostragem ESPACIAL

esta



$I_{saida}(x, y)$

É uma boa

representação



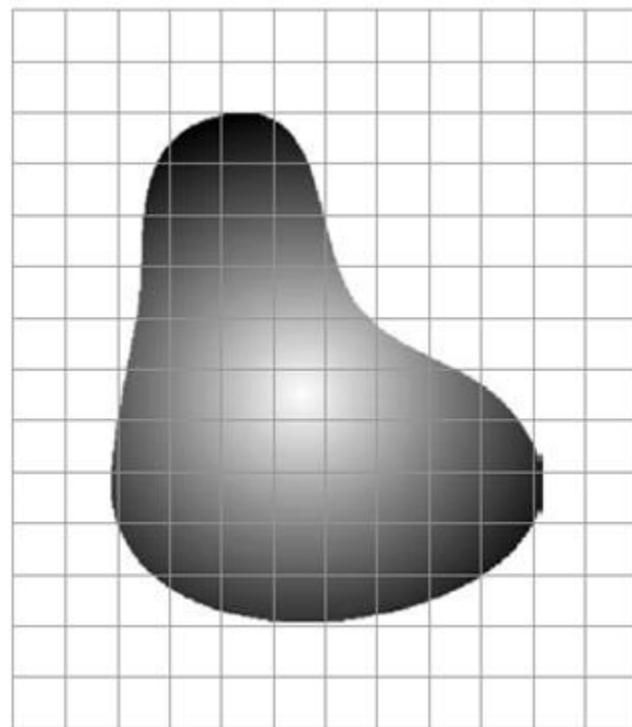
$$I_{entrada}(x, y) \otimes PSF(x, y)$$



+ amostragem



desta ???



$I_{entrada}(x, y)$

AMOSTRAGEM E TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO AMOSTRADA

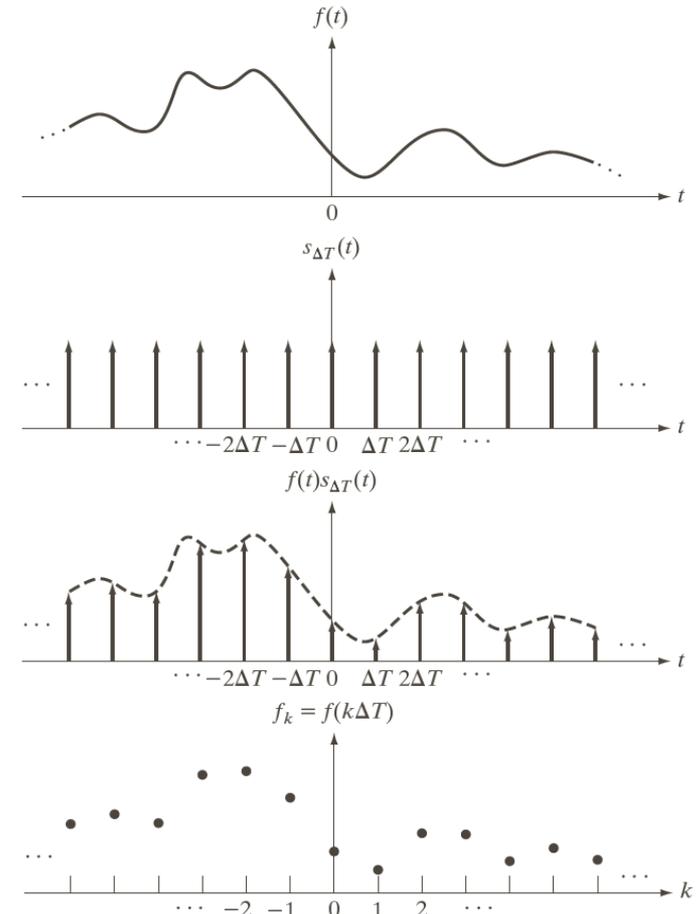
Para simplificar, vamos pensar inicialmente em funções 1D

Discretização

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

Sifting ou peneiramento

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T) dt = f(k\Delta T)$$



IMPULSOS E A PROPRIEDADE DE SEPARAÇÃO (*SIFTING*)

O conceito de impulso e sua propriedade de *sifting* (“peneirar”), é central ao estudo de sistemas lineares e transformada de Fourier.

Um impulso unitário de uma variável contínua t localizada em $t=0$, denotado $\delta(t)$, é definido como

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

e deve satisfazer também a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Fisicamente, se t é considerado tempo, um impulso pode ser visto como um pico de amplitude infinita e duração zero, tendo área unitária.

Um impulso tem a propriedade de *sifting* com respeito a integração

IMPULSOS E A PROPRIEDADE DE SEPARAÇÃO (SIFTING)

De uma forma mais geral, a propriedade de *sifting* (“peneirar”) envolve um impulso localizado num ponto arbitrário t_0 , denotado por $\delta(t - t_0)$.

Neste caso, a propriedade de *sifting* fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

Seja x uma variável discreta. O impulso unitário discreto $\delta(x)$ funciona da mesma forma que em variáveis contínuas, e é definido como

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

E a definição satisfaz o equivalente discreto:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

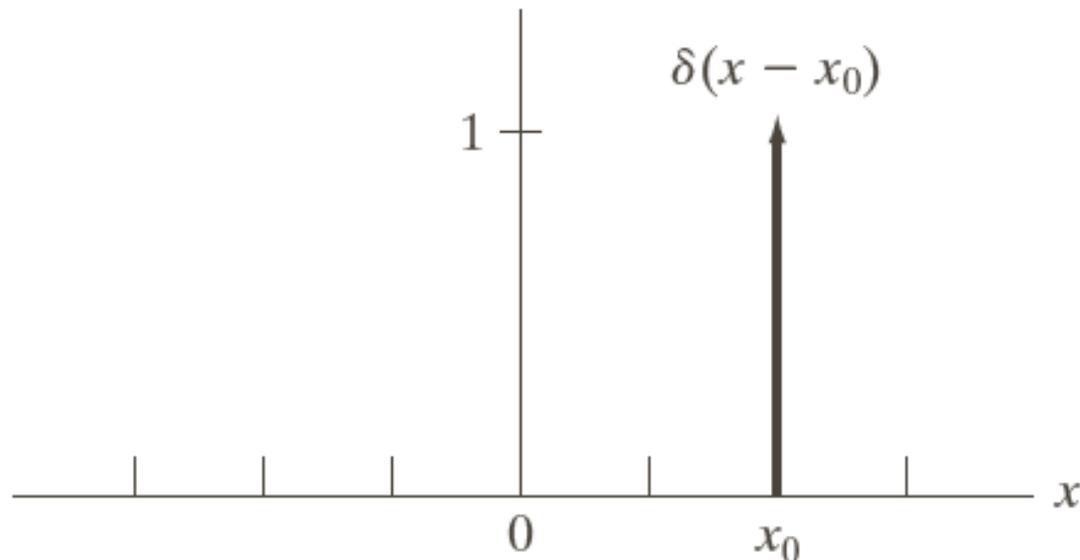
IMPULSOS E A PROPRIEDADE DE SEPARAÇÃO (SIFTING)

A propriedade de *sifting* para variáveis discretas tem a forma

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) = f(0)$$

ou mais genericamente, usando o impulso discreto em $x = x_0$,

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)$$

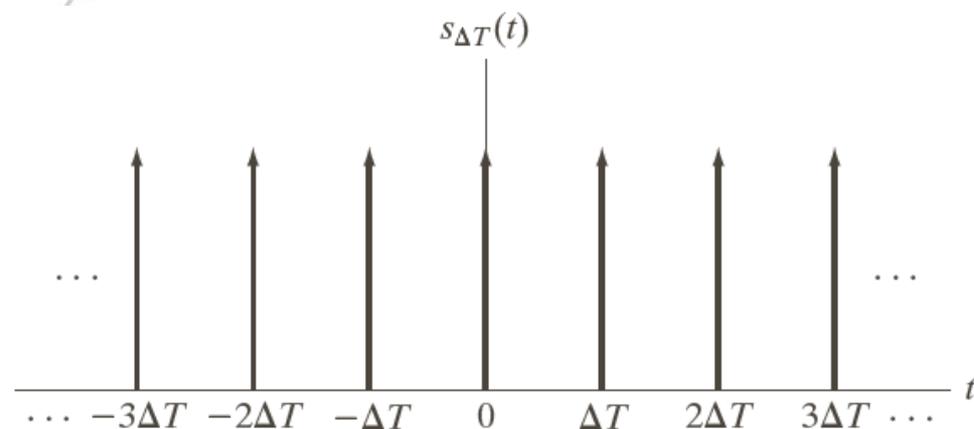


É de interesse particular um trem de impulsos,

$$s_{\Delta T}(t)$$

definido como a soma de infinitos impulsos, localizados em posições $n\Delta T$.

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



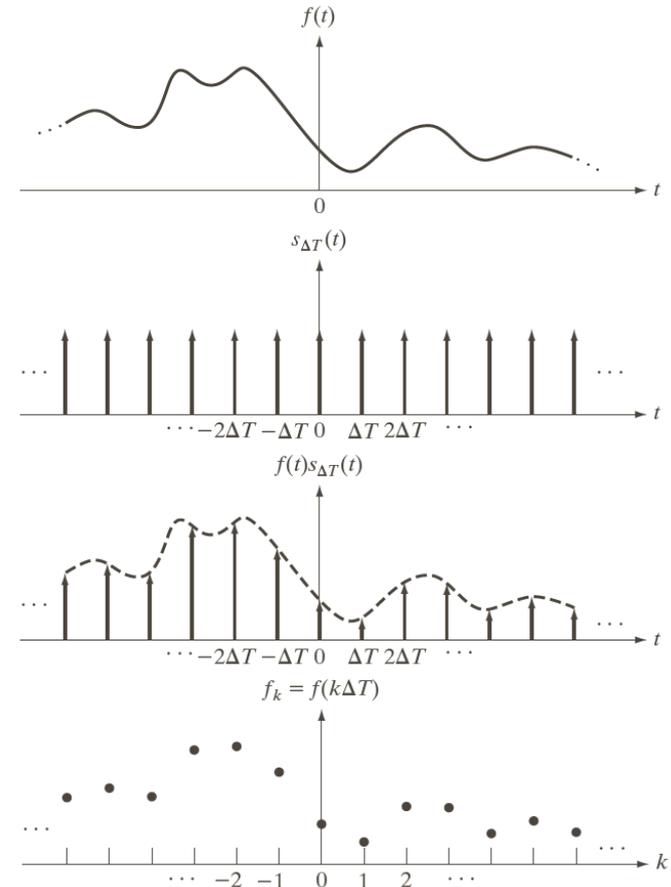
Voltando ao caso da função 1D

Discretização

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T) dt = f(k\Delta T)$$

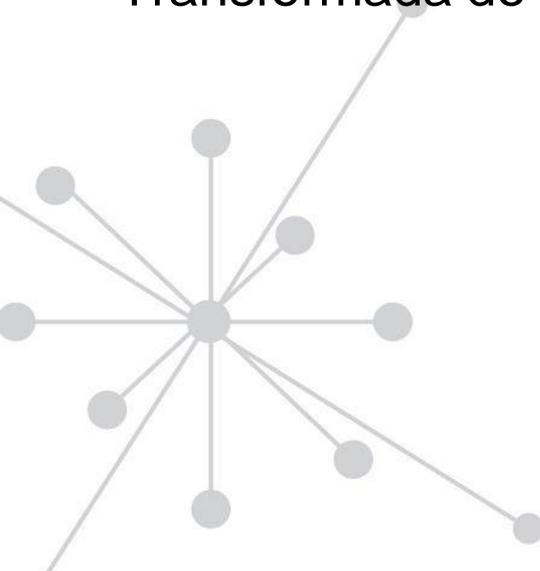
**MAS QUEREMOS
TRABALHAR NO
DOMÍNIO DAS
FREQUÊNCIAS, CERTO?**



A transformada de Fourier de um impulso unitário localizado na origem

$$\begin{aligned}F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi\mu t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\mu t} \delta(t) dt \\&= e^{-i\pi\mu 0} = e^0 = 1\end{aligned}$$

Transformada de Fourier de um impulso localizado em $t = t_0$


$$\begin{aligned}F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i2\pi\mu t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\mu t} \delta(t - t_0) dt \\&= e^{-i\pi\mu t_0} = \cos(2\pi\mu t_0) - i \sin(2\pi\mu t_0)\end{aligned}$$

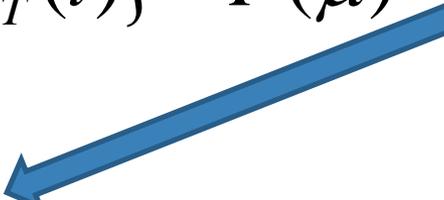
A transformada de Fourier de um trem de impulsos com período ΔT é também um trem de impulsos, $S(\mu)$ cujo período é $1/\Delta T$.

$$S(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

AMOSTRAGEM E TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO AMOSTRADA

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) * F(\mu)$$

$$\tilde{F}(\mu) = \mathfrak{F}\left\{\tilde{f}(t)\right\} = \mathfrak{F}\left\{f(t)s_{\Delta T}(t)\right\} = F(\mu) * S(\mu)$$


$$S(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

AMOSTRAGEM E TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO AMOSTRADA

A convolução de $F(\mu)$ com $S(\mu)$ pode ser obtida usando

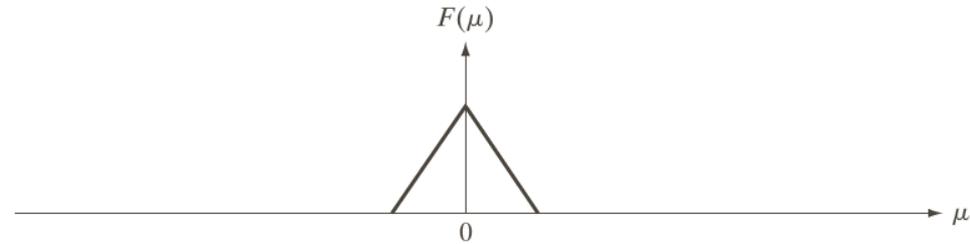
$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= F(\mu) * S(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)\end{aligned}$$

Nota-se que apesar da função amostrada ser uma função discreta, a sua transformada de Fourier é uma função contínua pois consiste de cópias de $F(\mu)$ que é contínua.

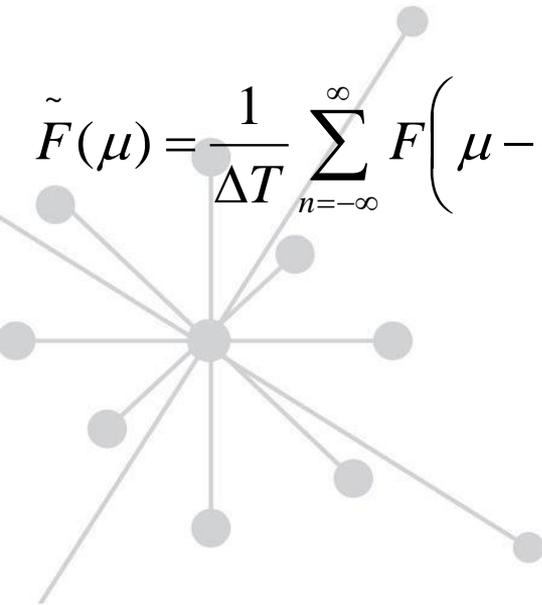
AMOSTRAGEM E TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO AMOSTRADA

$$\tilde{F}(\mu) \rightarrow$$

FUNÇÃO LIMITADA POR BANDA
OU DE FREQUÊNCIA LIMITADA

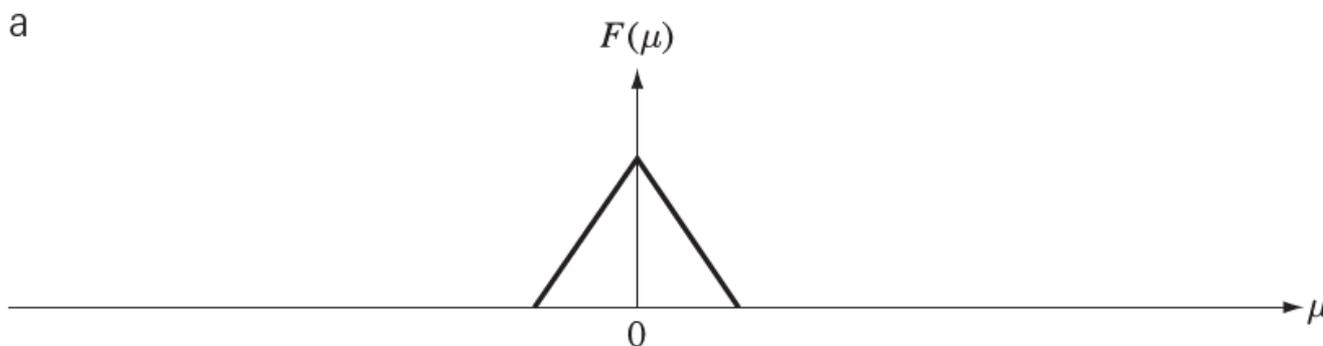


$$\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$



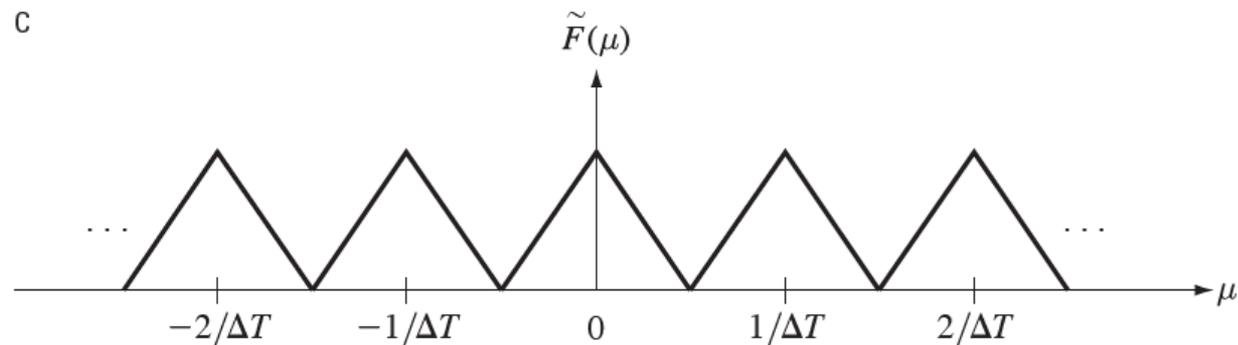
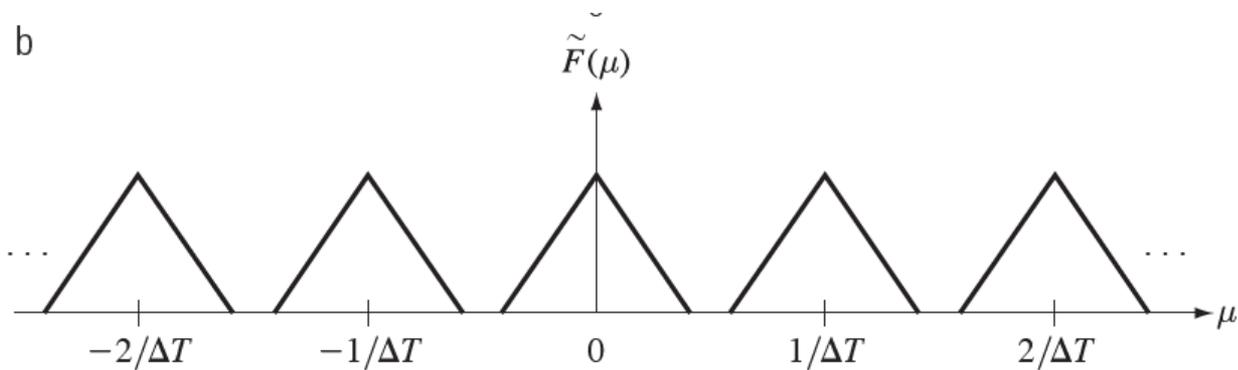
TEOREMA DA AMOSTRAGEM

- Uma função $f(t)$ cuja transformada de Fourier é zero para valores de frequência fora um intervalo finito $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ em torno da origem é chamada função de banda limitada (*band-limited*), ou limitada em frequência.



TEOREMA DA AMOSTRAGEM

- Podemos recuperar $f(t)$ da versão amostrada, se podemos isolar uma cópia de $F(\mu)$ da sequência periódica.



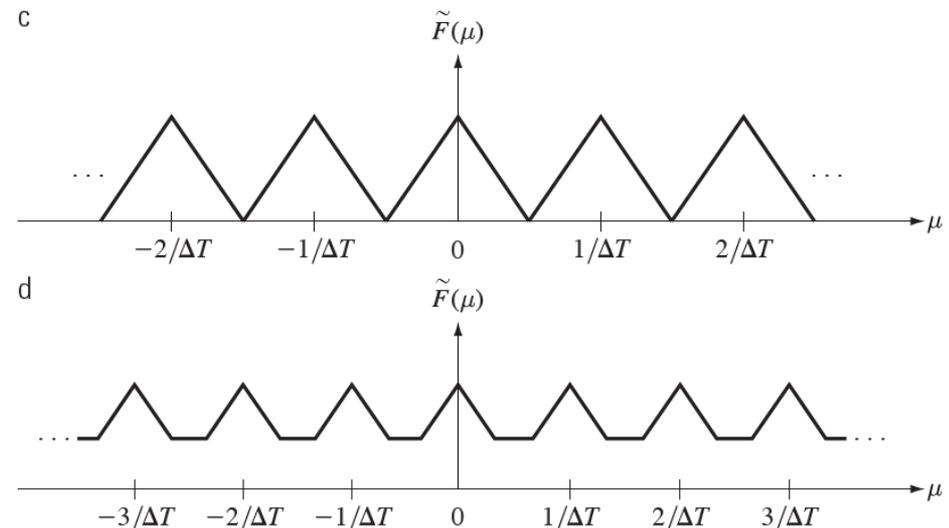
TEOREMA DA AMOSTRAGEM

- A extração dos valores da função de um único período que seja igual a $F(\mu)$ é possível se a separação entre as cópias é suficiente. Essa separação é garantida para

$$\mu_{max} < \frac{1}{2\Delta T} \quad \leftrightarrow \quad \Delta T < \frac{1}{2\mu_{max}} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$

Ou seja, uma função contínua de banda limitada pode ser completamente recuperada ao fazer a amostragem na taxa maior que duas vezes a maior frequência contida na função.

Esse resultado é conhecido como teorema da amostragem.



TEOREMA DA AMOSTRAGEM

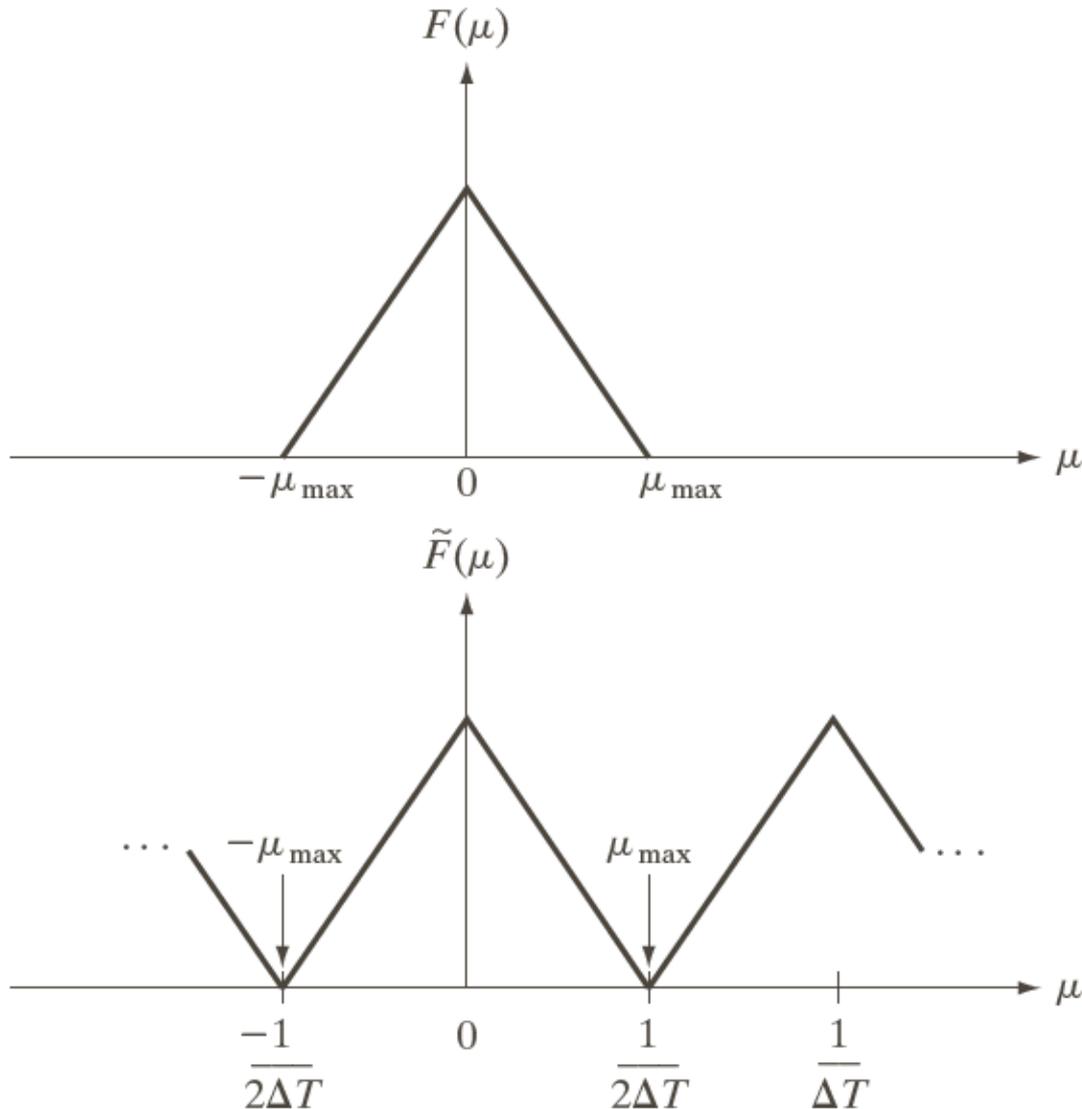
Any band-limited function having infinite extent and no component frequencies at frequencies greater than $u = u_{max}$ can be fully determined from an infinite set of discrete samples if sampled at a frequency greater than $u_{Ny} = 2u_{max}$ where u_{Ny} is called the Nyquist sampling frequency.

Uma outra interpretação do teorema de amostragem é que a máxima frequência que pode ser capturada de um sinal amostrado na frequência de $1/\Delta T$ é $\mu_{max} = 1/2\Delta T$.

O teorema de amostragem foi formulado em 1928 por Harry Nyquist, um cientista e engenheiro da Bell Labs.

Claude E. Shannon, também da Bell Labs. provou o teorema formalmente em 1949.

TEOREMA DA AMOSTRAGEM



a
b

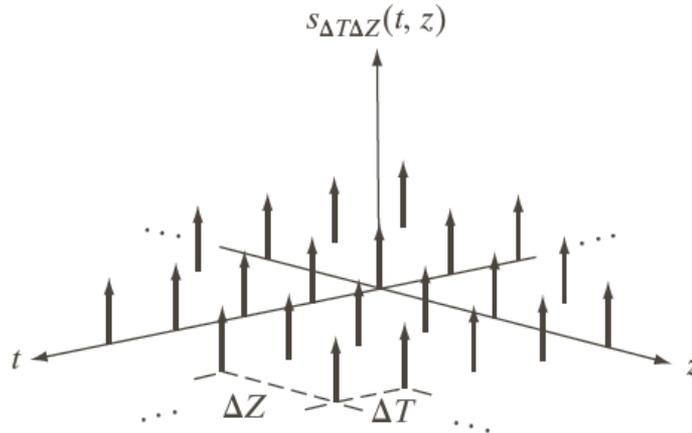
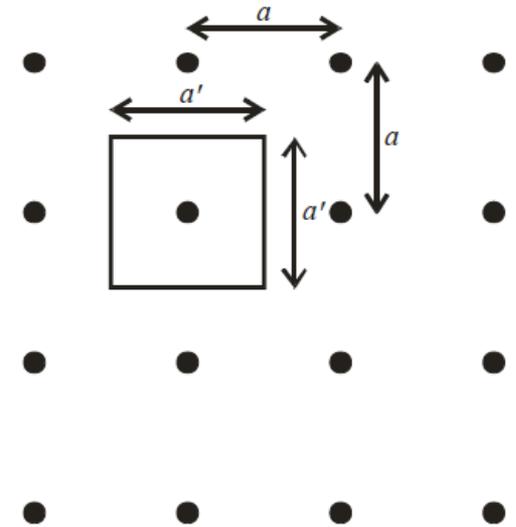
FIGURE 4.7

(a) Transform of a band-limited function.

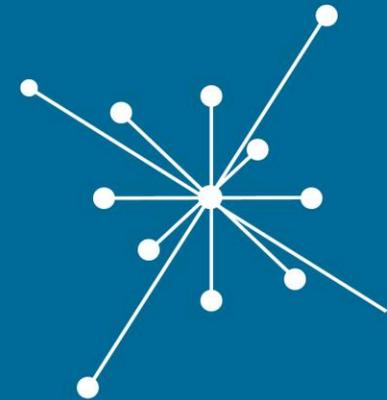
(b) Transform resulting from critically sampling the same function.

E NO CASO 2D ???

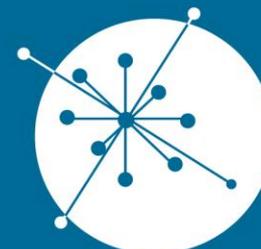
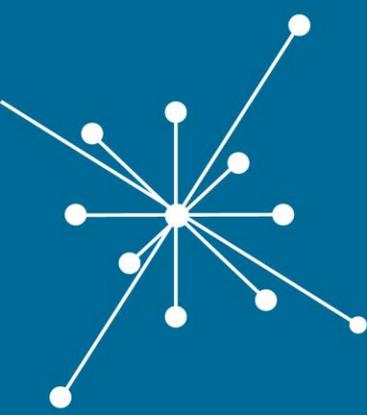
$$f(x_i, y_j) = \iint f(x, y) A(x - x_i a, y - y_j a) dx dy$$



$$(\tilde{f} * \text{comb}_{1/a})(u, v) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(u - \frac{j}{a}, v - \frac{k}{a}\right)$$



ALIASING

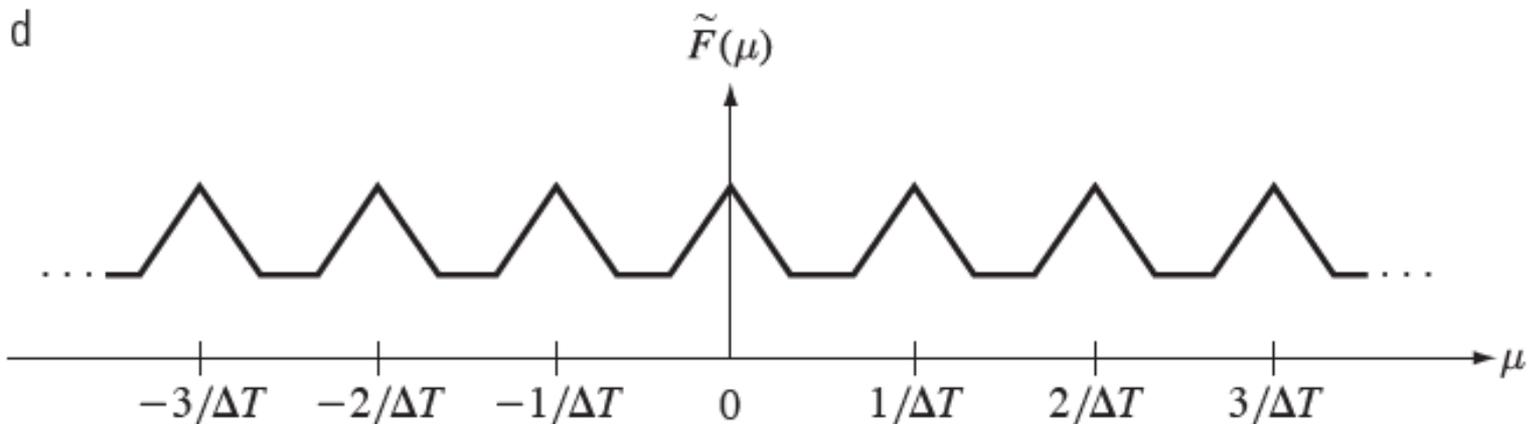


GRUPO DE
DOSIMETRIA
DAS RADIAÇÕES
e FÍSICA MÉDICA

IFUSP - Instituto de Física da USP

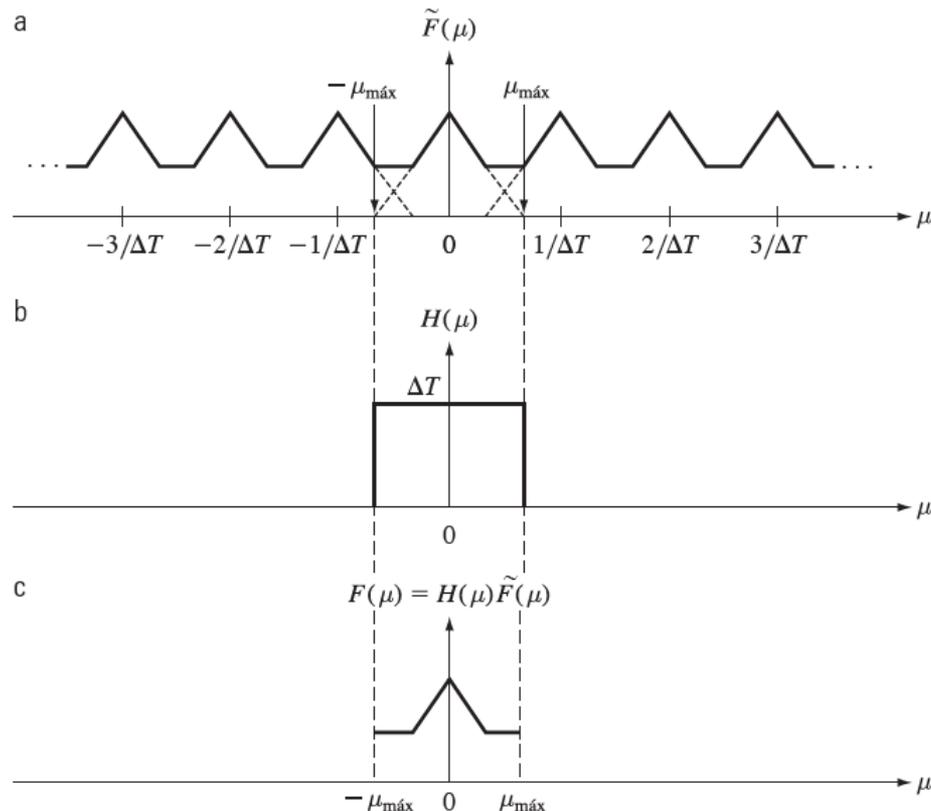
ALIASING

- O que acontece se uma função limitada em banda é amostrada numa taxa menor que duas vezes a maior frequência?
- Isso corresponde ao caso de sub-amostragem (*under-sampling*)



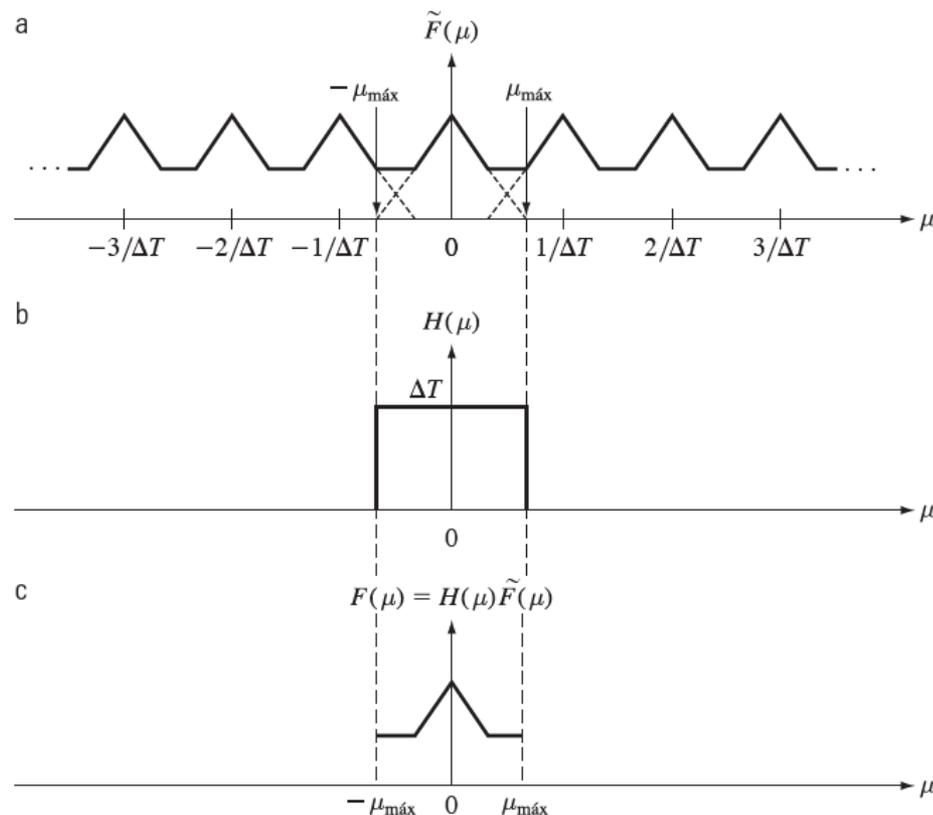
ALIASING

- Usando um filtro de passa baixa ideal resulta numa transformada que é corrompida pelas frequências de períodos adjacentes
- A transformada inversa produz uma função corrompida.



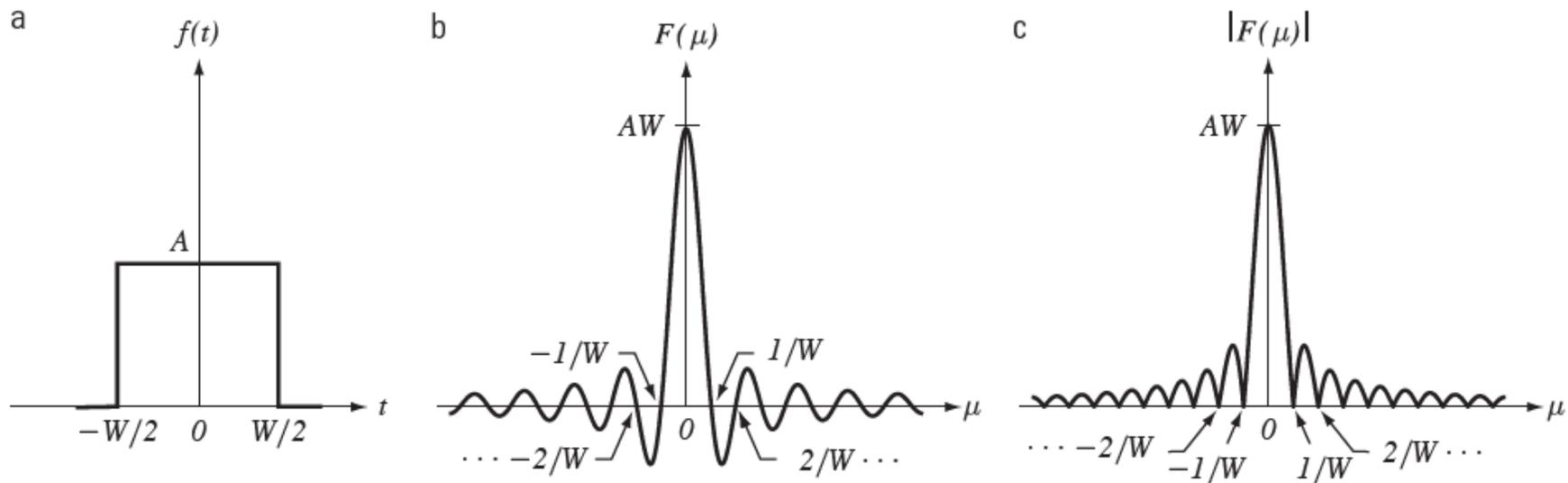
ALIASING

- Esse efeito causado pelo *under-sampling* é chamado de *frequency aliasing* ou simplesmente *aliasing*.
- O efeito é de componentes de alta frequência serem mascarados como frequências baixas na função amostrada. Isso é consistente como o termo *alias* que significa identidade falsa.



ALIASING

Aliasing SEMPRE ocorre na prática, pois as funções (ou imagens) precisam ser limitadas temporal ou espacialmente



Aliasing pode ser reduzido pela suavização das bordas, atenuando-se as frequências mais altas

ALIASING

<https://youtu.be/VNftf5qLpiA>

https://youtu.be/YFZsxY_2_I4



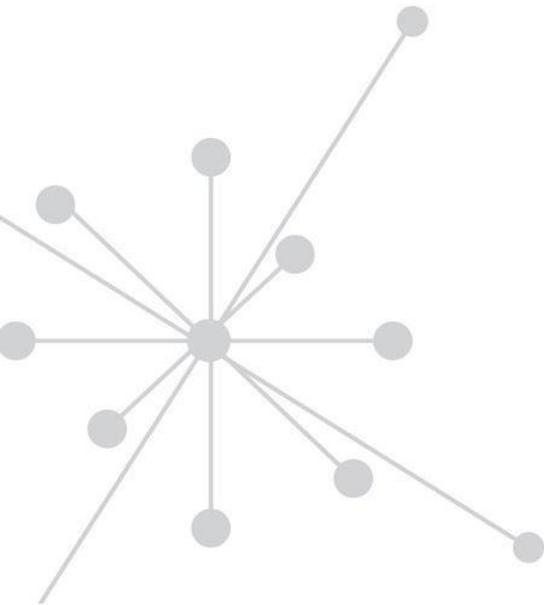
PAR DE TRANSFORMADA DE FOURIER CONTINUA

Seja $f(t, z)$ uma função contínua de duas variáveis, t e z . O par de transformadas de Fourier é dado por

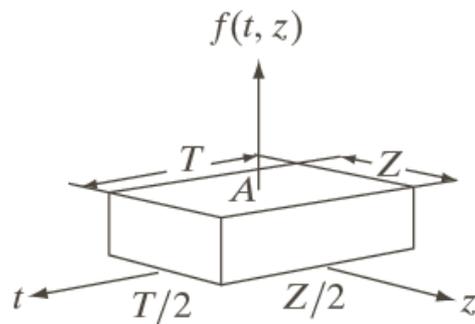
$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-i2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

e

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{i2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

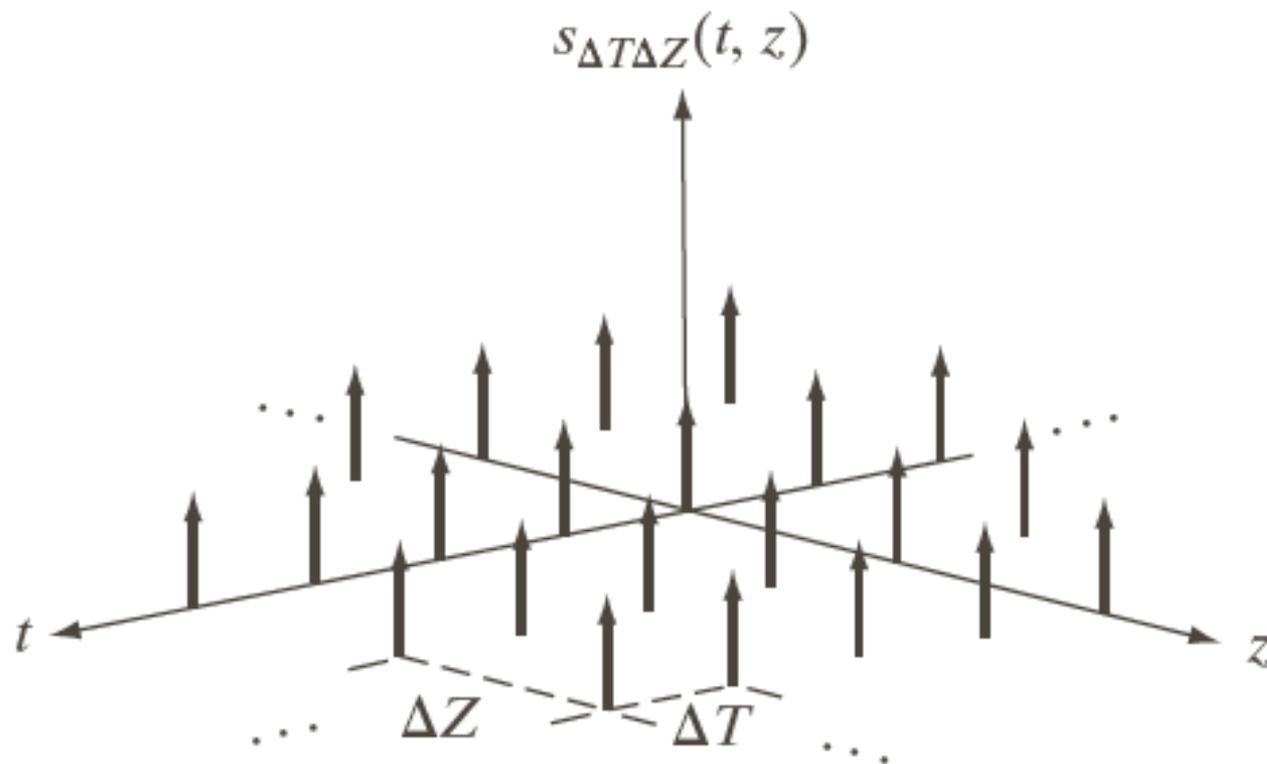


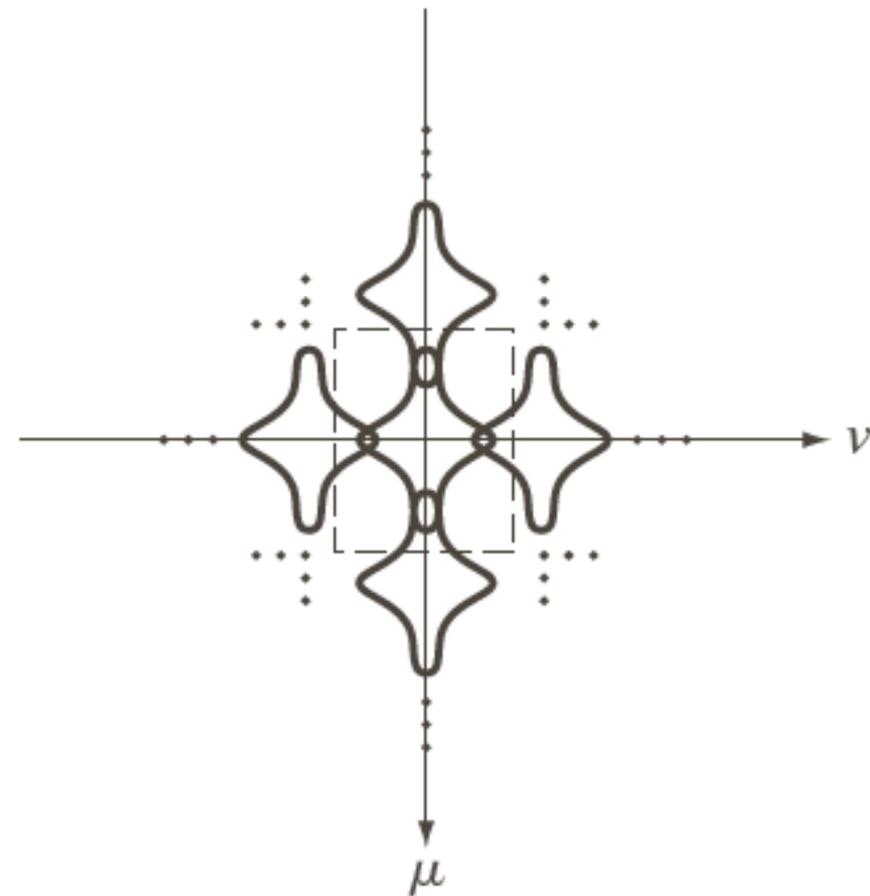
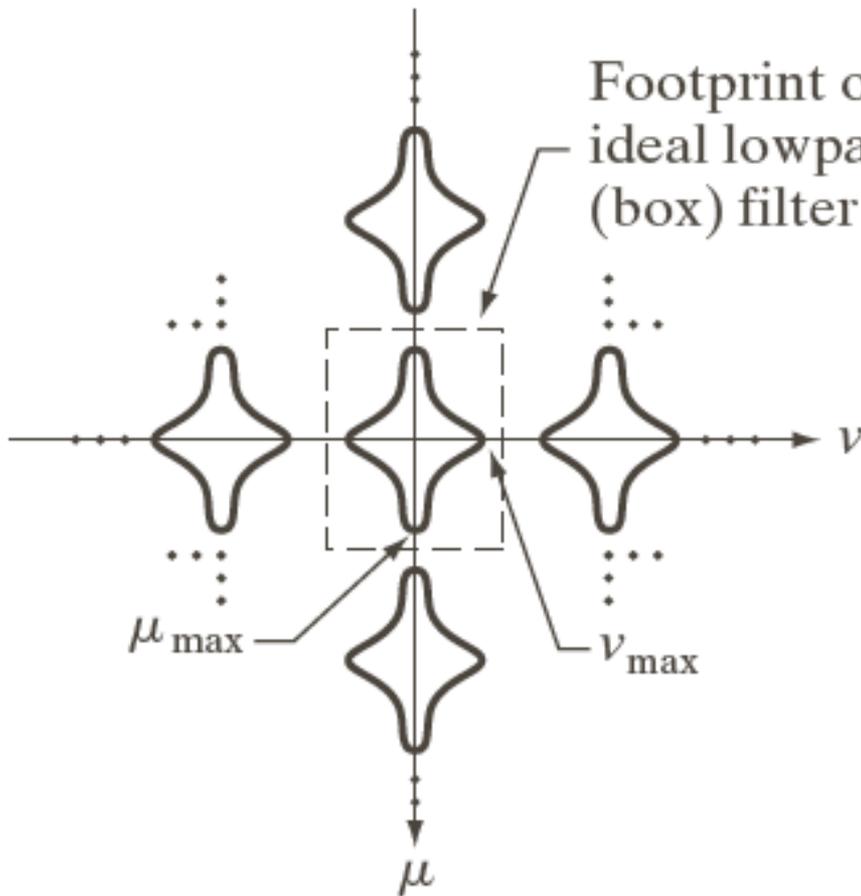
$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-i2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz = \int_{-Z/2}^{Z/2} \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-i2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$



a b

FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t -axis, so the spectrum is more “contracted” along the μ -axis. Compare with Fig. 4.4.

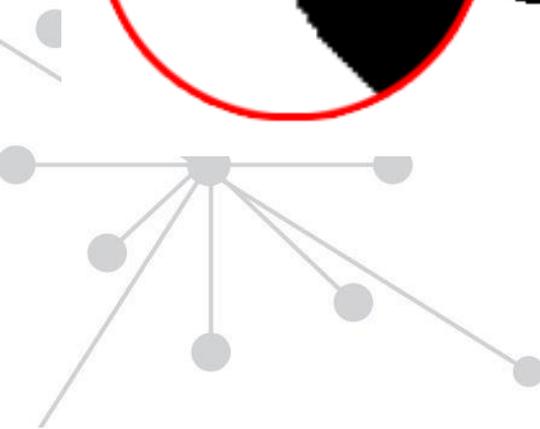
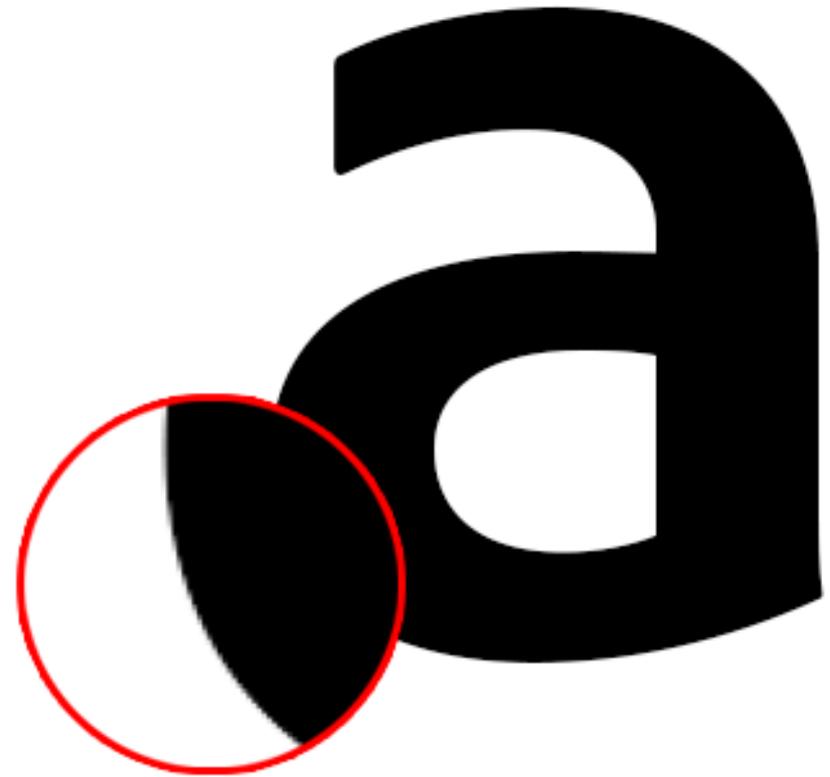
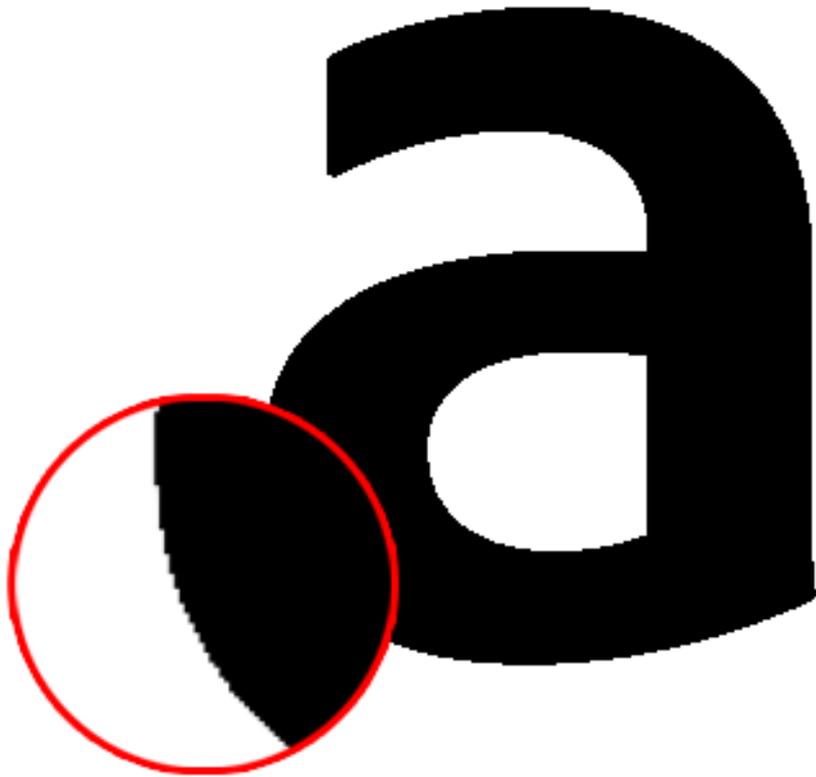




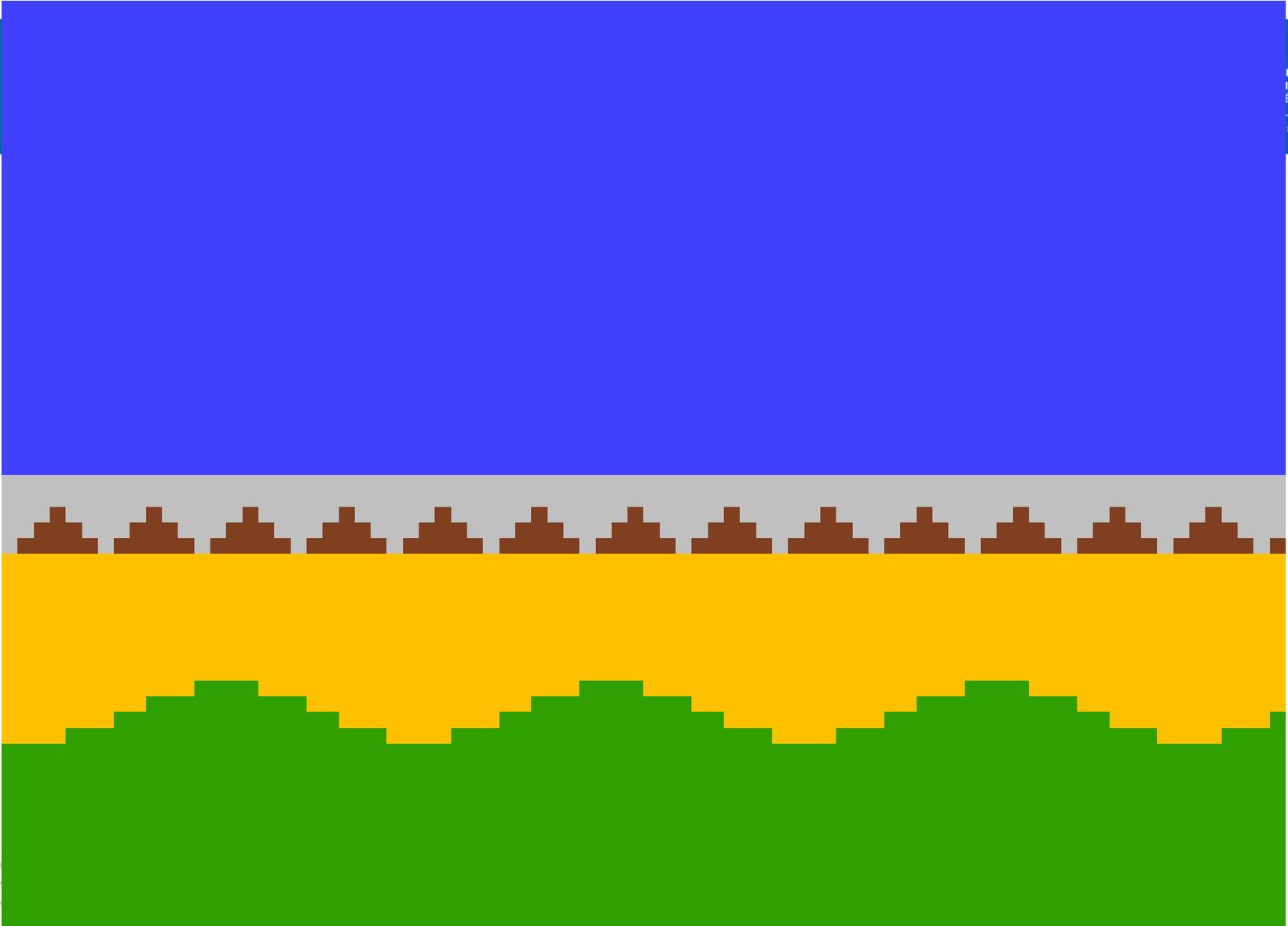


a b c

Figura 4.17 Ilustração do *aliasing* em imagens reamostradas. (a) Imagem digital com *aliasing* visual desprezível. (b) Resultado do redimensionamento da imagem para 50% de seu tamanho original por meio da exclusão de pixels. O *aliasing* é claramente visível. (c) Resultado do borramento da imagem em (a) com um filtro de média 3×3 antes do redimensionamento. A imagem é ligeiramente mais borrada do que (b), mas o *aliasing* deixa de ser visível. (Imagem original: cortesia de Laboratório de Compressão de Sinal, Universidade da Califórnia, Santa Barbara.)



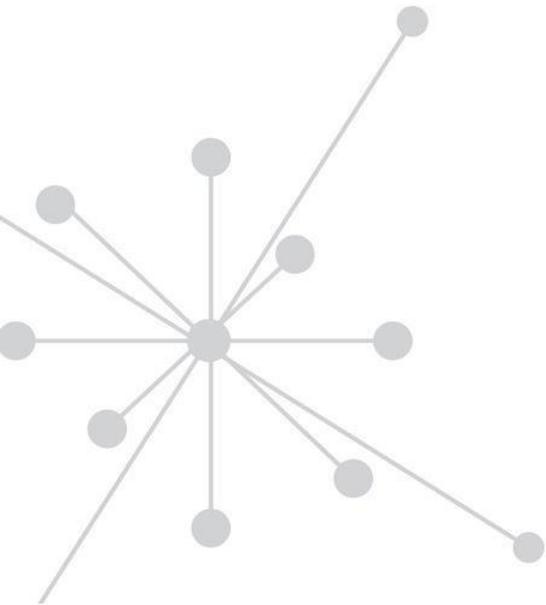


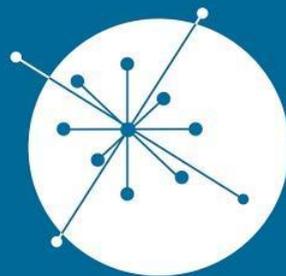


The motion of the 'camera' at a constant shutter speed creates temporal aliasing known as the wagon wheel effect. The speed of the "camera", moving towards the right, constantly increases at the same rate with the objects sliding to the left. Halfway through the 24-second loop, the objects appear to suddenly shift and head in the reverse direction, towards the left.

Vejam também

https://youtu.be/O0j_Lvld0dM





GRUPO DE
**DOSIMETRIA
DAS RADIAÇÕES**
e FÍSICA MÉDICA

IFUSP - Instituto de Física da USP