Física II (4302112)
Turma T2 - noturno

Ondas em uma dimensão

Profa. Luciana V. Rizzo

Próximas atividades

12/set (2a)	Ondas 1D
14/set (4a)	Ondas 1D
16/set (6a)	Ondas 1D
19/set (2a)	Ondas 1D
21/set (4a)	Ondas sonoras
23/set (6a)	E4
26/set (2a)	Interferência 2D
28/set (4a)	Difração
30/set (6a)	E5
03/out (2a)	Exercícios P1
05/out (4a)	P1
07/out (6a)	Correção P1

Introdução

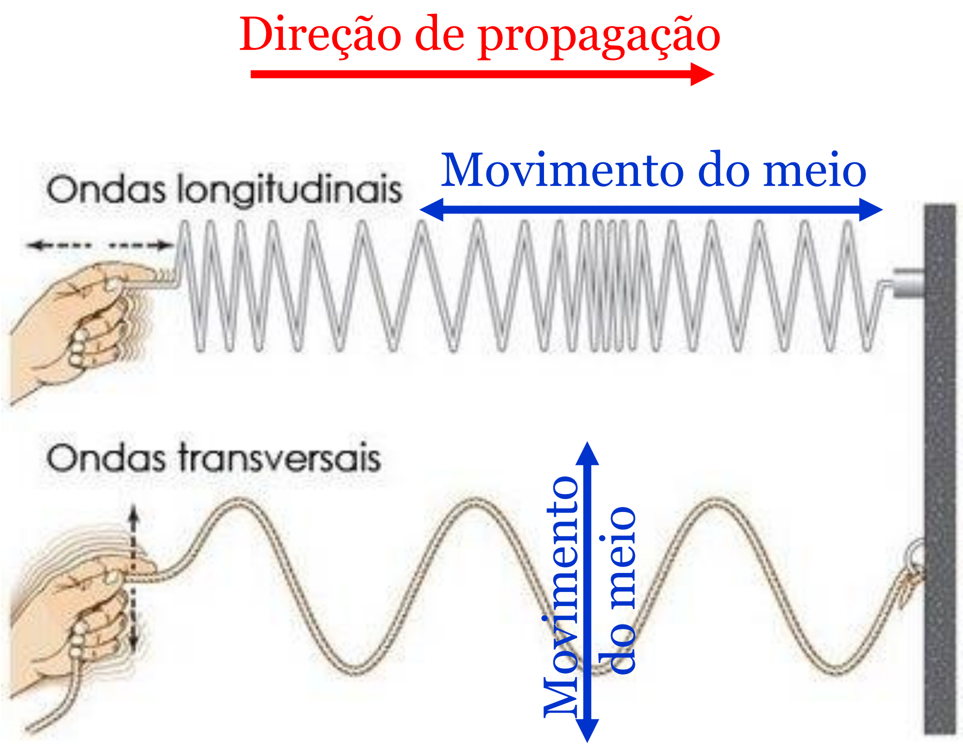
Ondas

- Transmissão de vibrações e de pulsos
- Transportam energia e quantidade de movimento, mas não transportam matéria
- Exemplos
  - Onda em uma corda
  - Som e aplicações da acústica
  - Ondas no mar, na atmosfera, ondas sísmicas
  - Ondas eletromagnéticas: luz, sinal de TV, rádio, celular
  - Radar e aplicações diversas

Ondas longitudinais X transversais

- Ondas longitudinais: o movimento do meio é paralelo à direção de propagação da onda

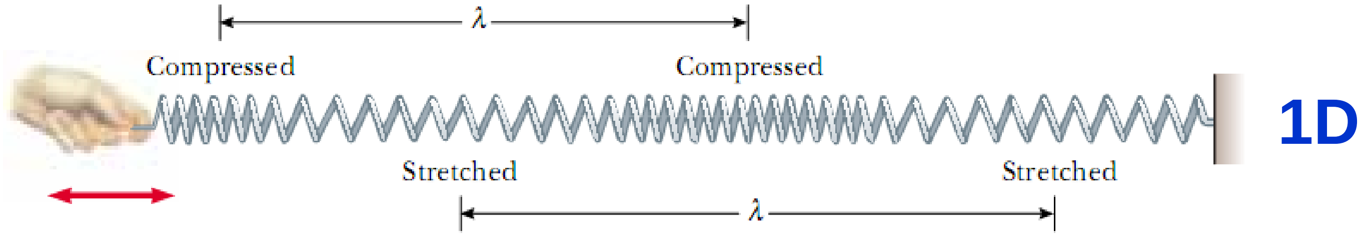
- Ondas transversais: o movimento do meio é perpendicular à direção de propagação da onda

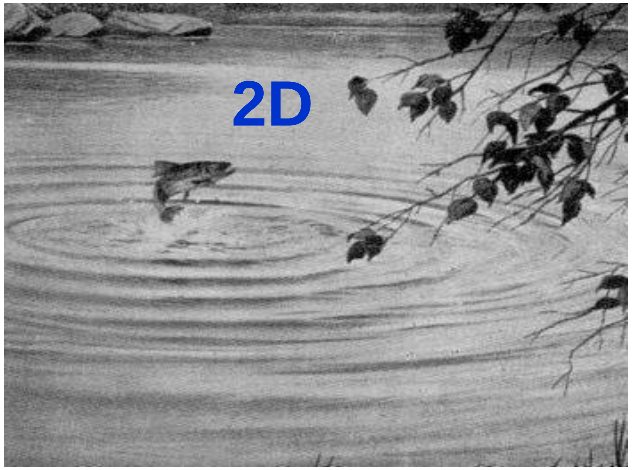


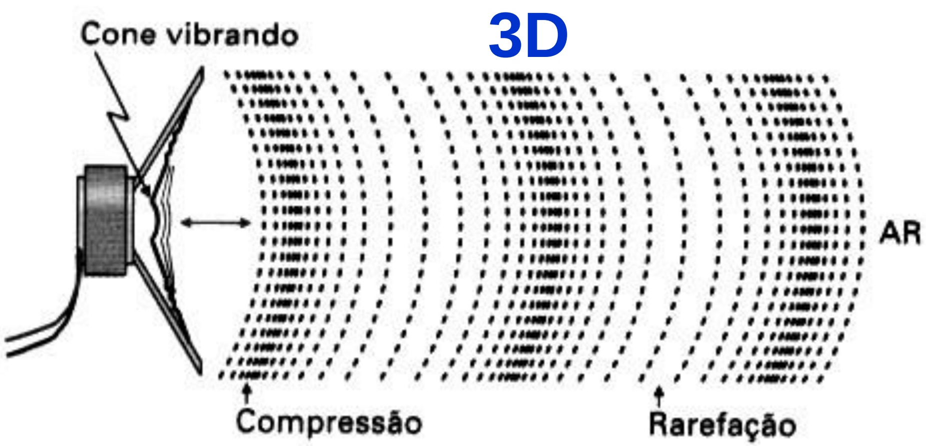
Vídeo: Onda longitudinal e transversal em uma mola
http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6602

Classificação quanto à dimensão

- Ondas unidimensionais (ex: onda em uma mola)
- Ondas bidimensionais (ex: ondas em um lago)
- Ondas tridimensionais (ex: onda sonora)



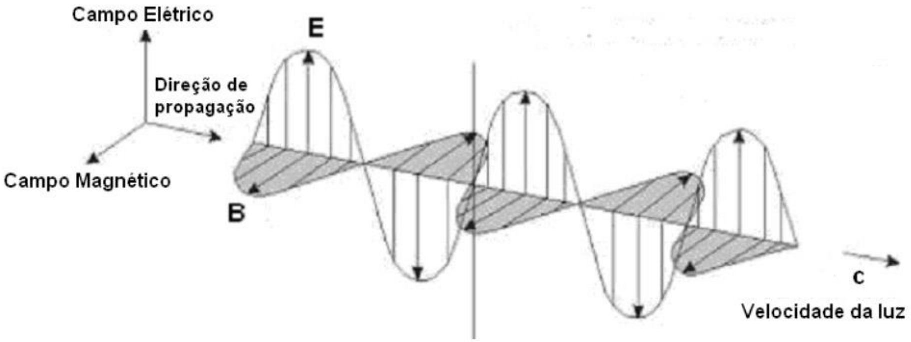




Classificação quanto à natureza da onda

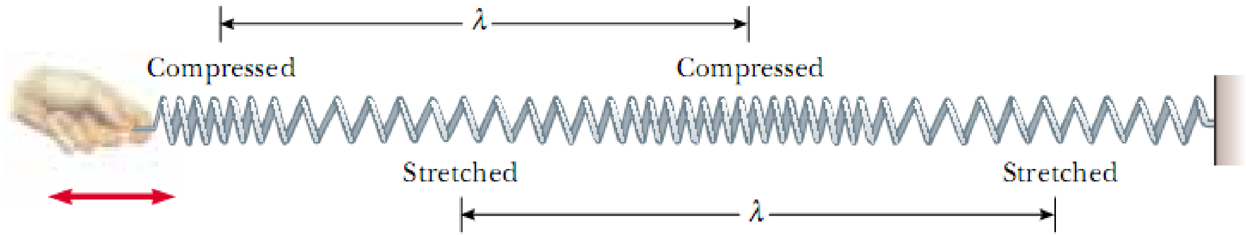
- Ondas mecânicas: precisam de um meio material para se propagarem

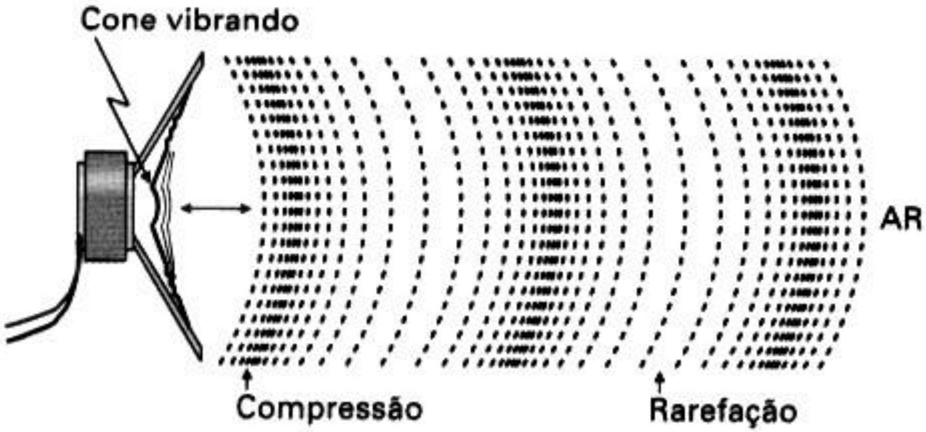
- Ondas eletromagnéticas: não precisam de um meio material, podendo propagar-se no vácuo



Transporte de energia

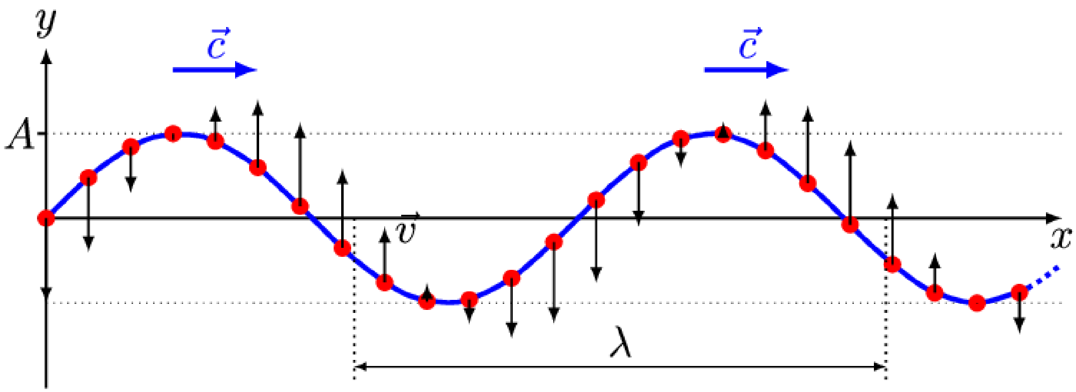
- Ondas transportam <u>energia e quantidade de movimento</u>, mas geralmente não transportam matéria
- Ondas mecânicas transportam energia mecânica (cinética + potencial)



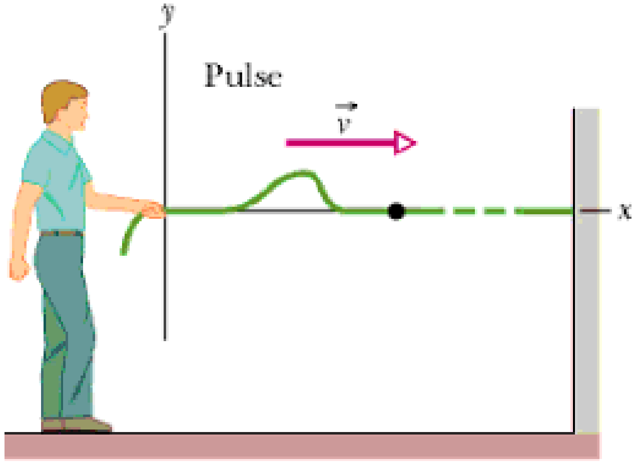


Formato da onda

- Onda periódica (ex: ondas harmônicas)

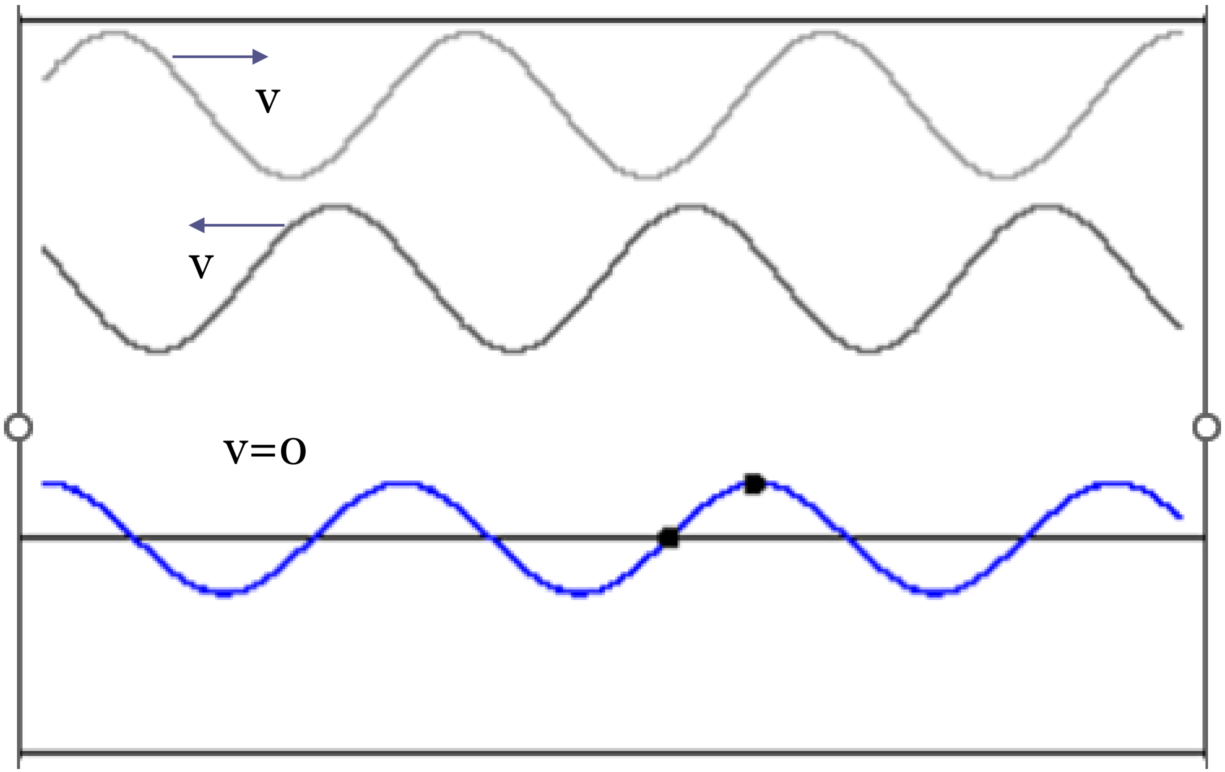


- Pulso de onda



Onda progressiva X estacionária

Exemplo:



Onda progressiva

Onda progressiva

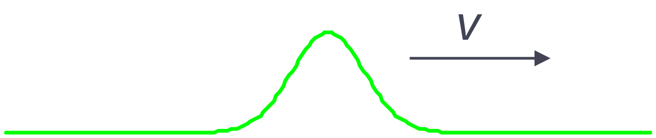
Onda estacionária

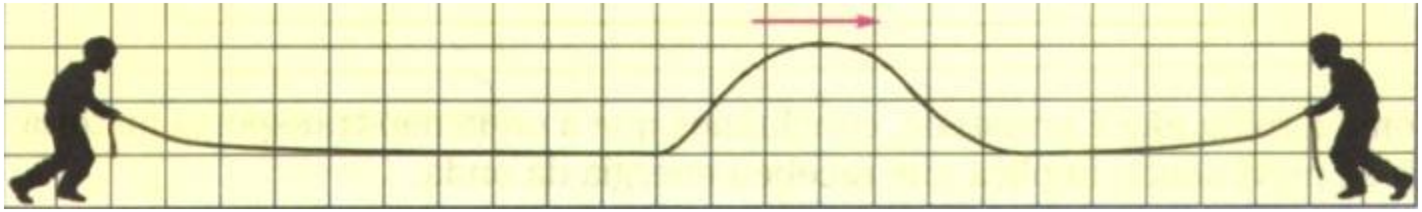
Pulsos de onda

Pulsos de onda

Exemplo: onda em uma corda

Podemos ter pulsos causados por uma perturbação pontual em uma das extremidades da corda

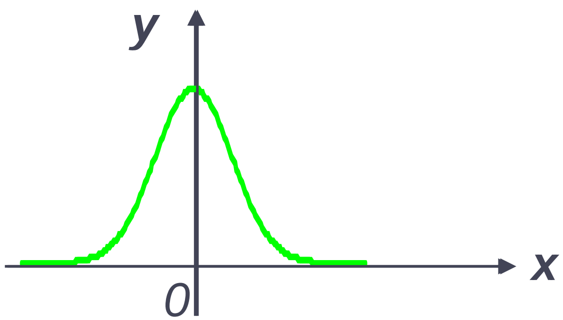




Como descrever o perfil da onda? $y(x,t)$

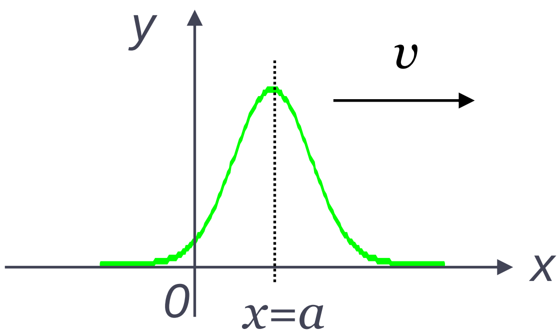
Como descrever o movimento de um pulso que se propaga em uma corda com velocidade constante v?

Suponha um pulso de onda descrito por uma função qualquer $y = f(x)$

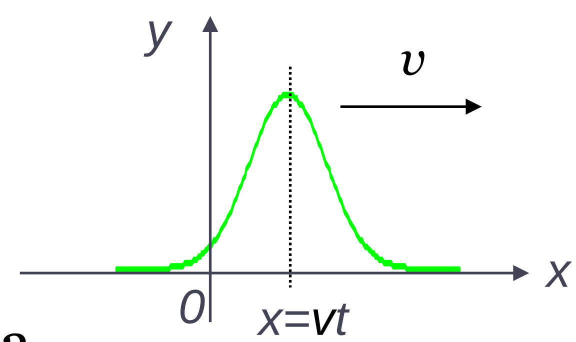


O pulso de onda se locomove para a direita, de modo que num certo instante t, está centrado em $x=a$. Como deslocar a função $f(x)$ para a posição $x=a$, sem alterar sua forma?

$f(x-a)$ tem a mesma forma, só que deslocada de uma distância a à direita.



Seja $a=vt$. Então $f(x-vt)$ descreve o pulso de onda movendo-se para a direita com velocidade v.



$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt)}$$ Função de onda

Função de onda (ou perfil de onda)

- Pulso de onda unidimensional movendo-se no sentido positivo de x

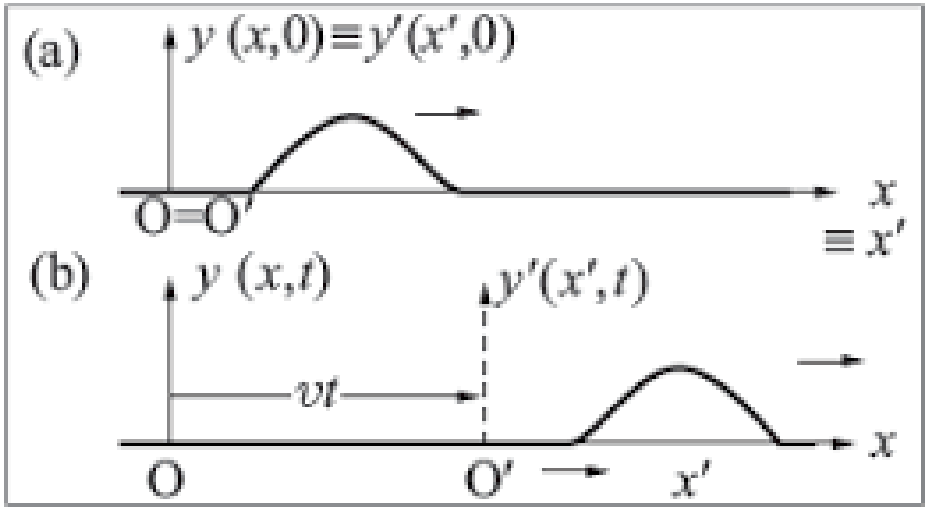
$$y(x,t) = f(x - vt)$$

- Pulso de onda unidimensional movendo-se no sentido negativo de x

$$y(x,t) = g(x + vt)$$

Como descrever o movimento de um pulso que se propaga em uma corda com velocidade constante v? (outro jeito de pensar)

Vamos acompanhar o pulso em outro referencial inercial S', que se desloca com velocidade constante v ao longo do eixo x.



Suponha que os referenciais S e S' coincidem em t=0.

Relação entre as coordenadas no referencial S (x, y, t) e no referencial S' (x', y', t'):

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$t' = t$$

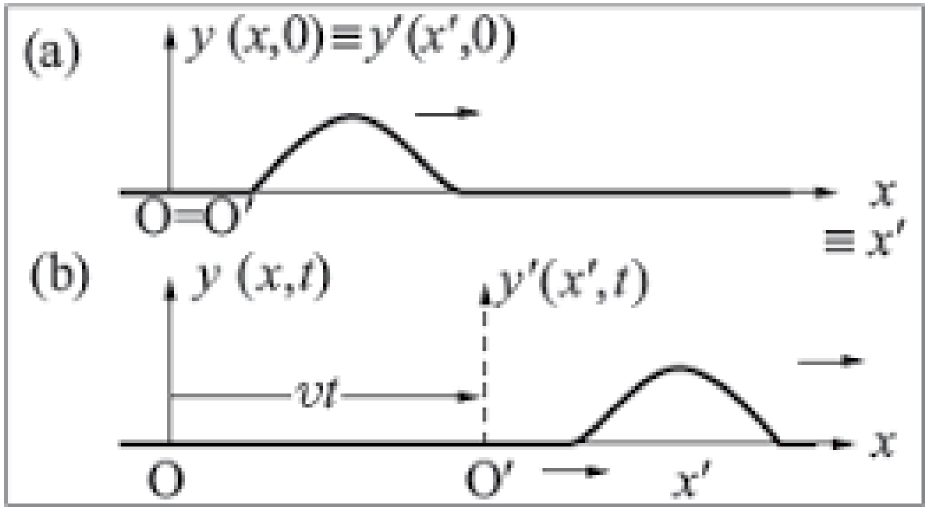
Transformação de Galileu

Como descrever o movimento de um pulso que se propaga em uma corda com velocidade constante v? (outro jeito de pensar)

No referencial S', o perfil da onda (y') é constante:

$$y'(x',t') = y'(x',0) = f(x')$$

Como y=y' e t=t', o perfil da onda no referencial S, pode ser escrito como:



$$y(x,t) = y'(x',t) = f(x') \leftarrow x' = x - vt$$

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt)}$$ Perfil de onda que se propaga para a direita

Para descrever uma onda que se propaga para a esquerda, basta fazer $v \rightarrow -v$:

$$\boxed{y(x,t) = g(x + vt)}$$ Perfil de onda que se propaga para a esquerda

Função de onda (ou perfil de onda)

- Onda unidimensional movendo-se no sentido positivo de x

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

- Onda unidimensional movendo-se no sentido negativo de x

$$y(x,t) = g(x + vt)$$

Atenção: esse é um resultado geral, pois não assumimos nenhum formato específico para as funções f e g.

- Exemplos de funções que caberiam na definição $f(x - vt)$:

$$\cos(x - vt) \qquad (x - vt)^2 \qquad e^{(x-vt)}$$

Equação de onda unidimensional

Equação de onda unidimensional

Vimos que a função $y(x,t) = f(x - vt)$ descreve o movimento de uma onda progressiva qualquer.

Qual é a equação de movimento correspondente?
As equações diferenciais que desenvolvemos para oscilações partiam da 2ª Lei de Newton, onde aparece a aceleração.

Vamos construir a equação de movimento a partir da sua solução:

$$y(x,t) = f(x') = f(x - vt) \quad \text{com} \quad x' = x - vt$$

Equação de onda unidimensional

Como a aceleração sempre aparece nas equações de movimento, vamos obtê-la derivando $y(x,t)$:

$$y(x,t) = f(x') = f(x - vt) \quad \text{com} \quad x' = x - vt$$

Regra da cadeia

Velocidade: $$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{= -v} = -v \frac{df}{dx'}$$

Aceleração: $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{df}{dx'}\right) = -v \frac{d^2 f}{dx'^2} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{= -v} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

Equação de onda unidimensional

Mas $y(x,t)$ também depende de x. Vamos calcular a 2ª derivada em relação a x:

$$y(x,t) = f(x') = f(x - vt) \quad \text{com} \quad x' = x - vt$$

Regra da cadeia

Inclinação da corda:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} = \frac{df}{dx'}$$

Concavidade da corda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dx'}\right) = -v\frac{d^2 f}{dx'^2}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

Equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

Eliminando o termo em comum, vem:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Equação diferencial parcial (EDP) de 2ª ordem, linear, homogênea a coeficientes constantes

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

Velocidade de propagação da onda

A velocidade v depende de características do meio em que a onda se propaga

Equação de onda unidimensional

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Vale para <u>qualquer</u> onda unidimensional, seja ela periódica ou não, transversal ou longitudinal, progressiva ou estacionária.

A solução da equação de onda é a função de onda da qual partimos:

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

(onde f é uma função qualquer)

A solução geral de uma EDP de 2ª ordem é a combinação linear de 2 funções independentes:

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

Equação de onda unidimensional

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Vale para qualquer onda unidimensional, seja ela periódica ou não, transversal ou longitudinal, progressiva ou estacionária.

Solução geral:

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

Condição inicial:

Posição inicial de todos os pontos do meio: $y(x,0)$

Velocidade inicial de todos os pontos do meio: $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$

A condição inicial não é uma constante, e sim uma função de x

Ondas harmônicas

Ondas harmônicas

<u>Caso particular</u> em que a função de onda tem a forma de uma senoide.

Exemplo: função de onda harmônica unidimensional progressiva que se desloca para a direita:

$$y(x,t) = f(x - vt) = A\cos[k(x - vt) + \delta]$$

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)}$$

onde $kv = \omega$

Quando uma onda harmônica se propaga em um meio, todos os pontos oscilam em um movimento harmônico simples (MHS)

Função de onda harmônica (1D)

- Descreve o movimento vertical de todos os pontos da corda
  - Onda progressiva (propaga-se no sentido + de x):

$$y(x,t) = A cos(kx - \omega t + \delta)$$

  - Onda regressiva (propaga-se no sentido - de x):

$$y(x,t) = A cos(kx + \omega t + \delta)$$

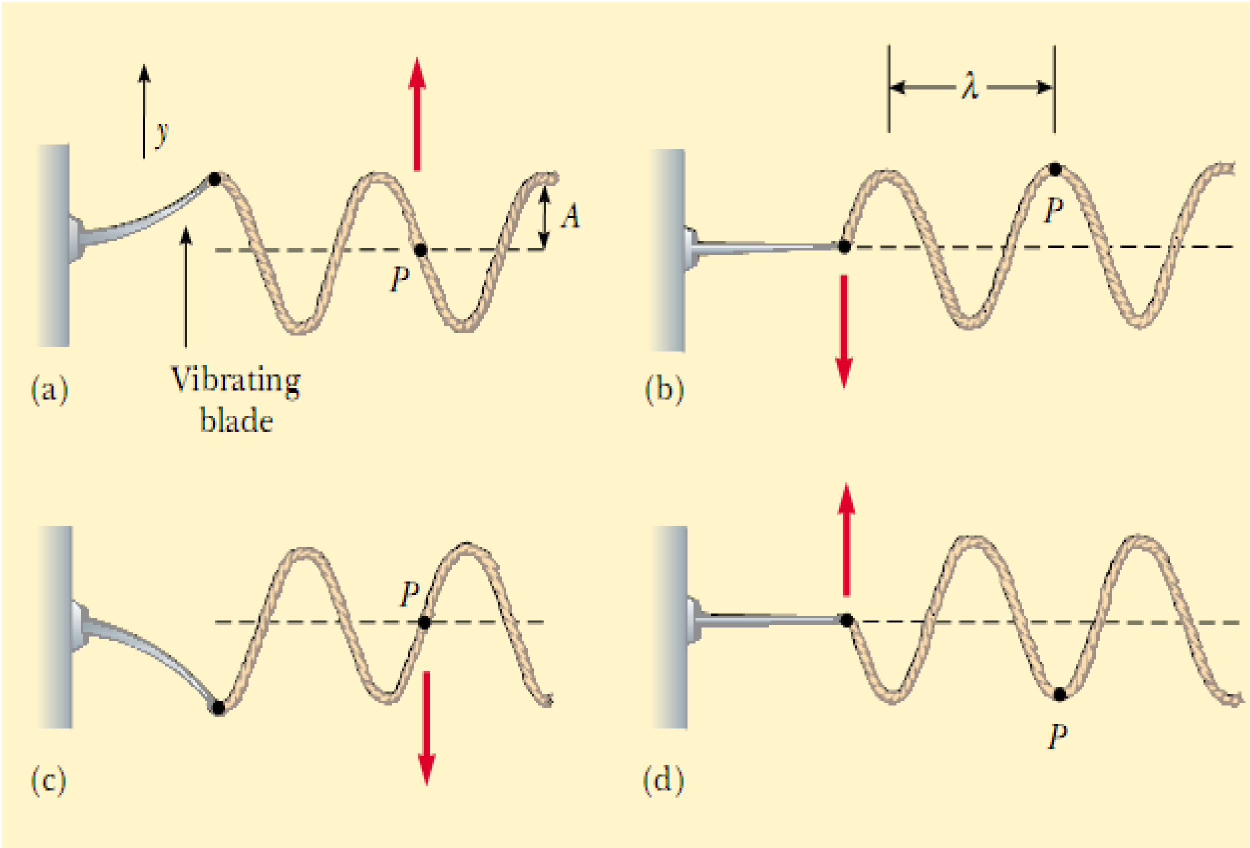
Vale para ondas harmônicas que se propagam
em qualquer meio, em uma dimensão.

Para descrever o movimento vertical de <u>todos</u> os pontos de uma corda, precisamos de uma função *y(x,t)*

y: posição vertical de cada ponto P da corda em cada instante de tempo

x: posição horizontal de cada ponto P da corda

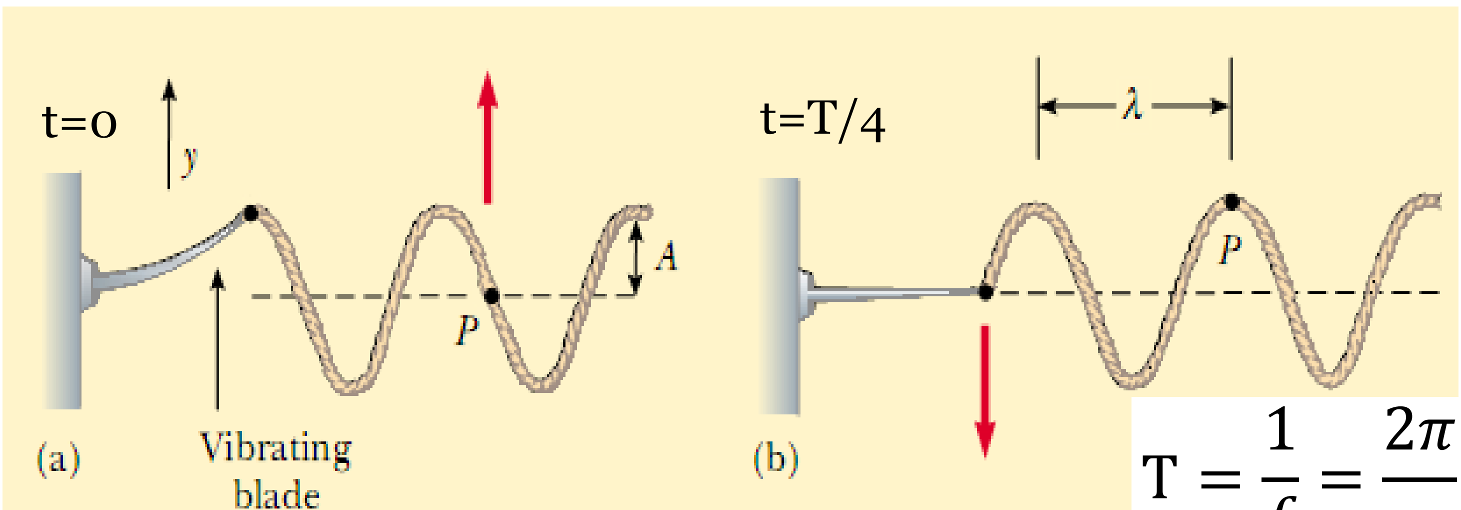
Tempo



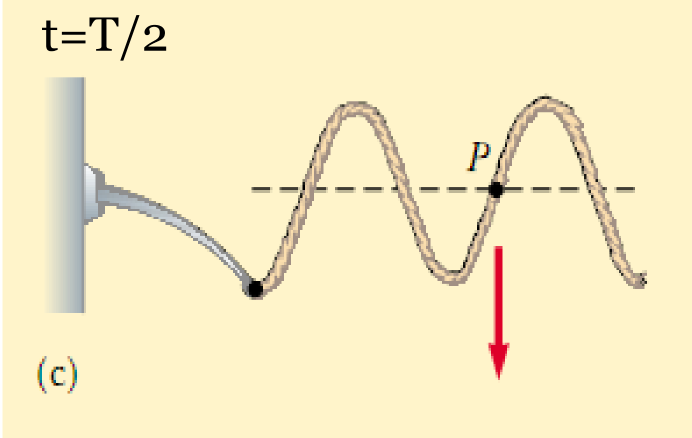
Fixando uma posição: $x=x_P$

Onda harmônica em uma corda: cada ponto P oscila como um MHS na direção y com frequência angular ω.

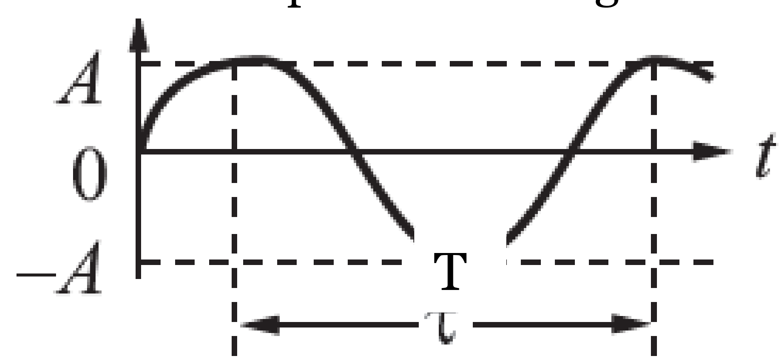
$$y(x_P,t) = \mathrm{A}\cos(kx_P - \omega t + \delta) = \mathrm{A}\cos(-\omega t + c)$$



$$\mathrm{T} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$



Movimento do ponto P ao longo do tempo:

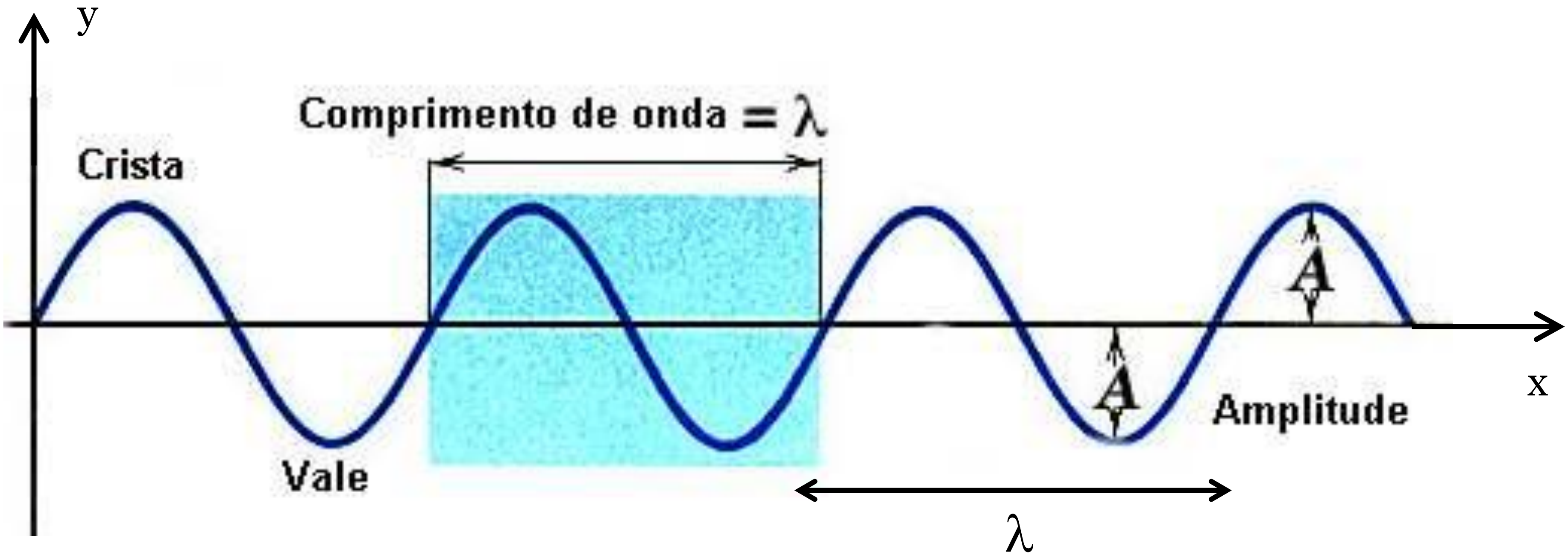


Fixando um instante: $t=t_o$

Ao tirar um instantâneo do movimento, observamos a forma da perturbação em diversos pontos do meio (corda)

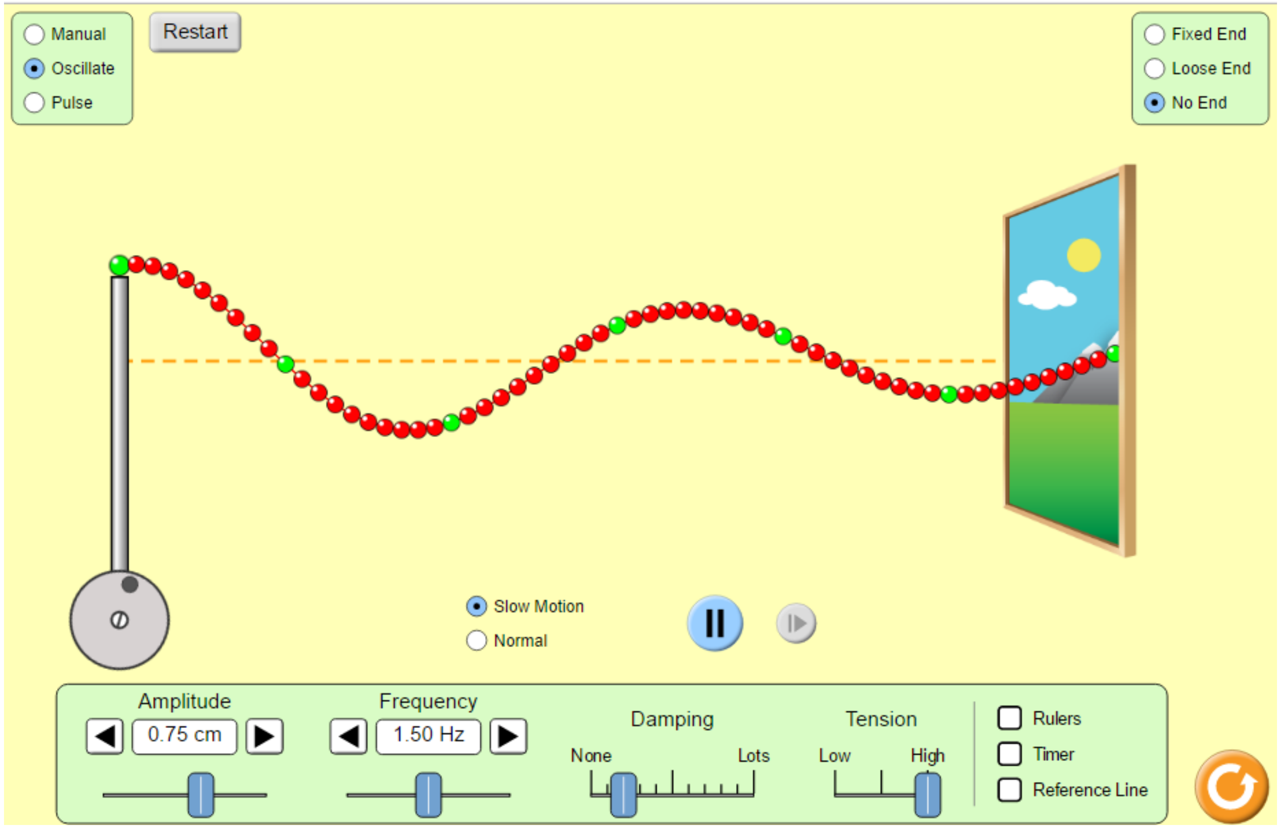
$$y(x,t_0) = A\cos(kx - \omega t_0 + \delta)$$

$$y(x,t_0) = A\cos(kx + c)$$



λ: Comprimento de onda (período espacial)

Simulação



https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

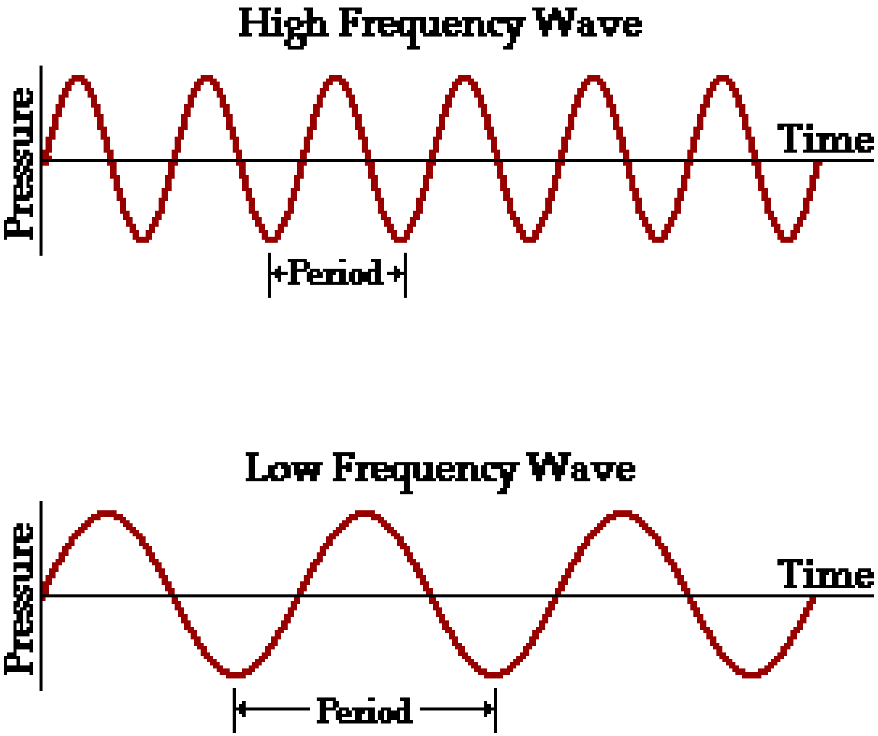
- Escolha “*no end*” no canto superior direito, “*oscillate*” no canto superior esquerdo, e “*slow motion*”.
- Acompanhe o movimento de 1 ponto verde. Ele se move na horizontal?
- Varie amplitude e frequência e observe as mudanças na onda gerada.
- Experimente também as opções “*manual*” e “*pulse*” no canto superior esquerdo.

Velocidade de propagação da onda

A onda se desloca um comprimento de onda λ em um período T . Portanto, sua velocidade é:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$



Função de onda harmônica

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

Deslocamento
(variável)

Amplitude
(deslocamento
máximo, constante)

Posição
(variável)

Tempo
(variável)

Constante de fase,
em rad no SI

Função de onda harmônica

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

Deslocamento (variável)

Amplitude (deslocamento máximo, constante)

Posição (variável)

Tempo (variável)

Constante de fase, em rad no SI

ω: frequência angular (constante), em rad/s no SI

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

k: número de onda (constante), em rad/m no SI

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Não confundir com K (maiúsculo), que é constante de mola!

Função de onda harmônica

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

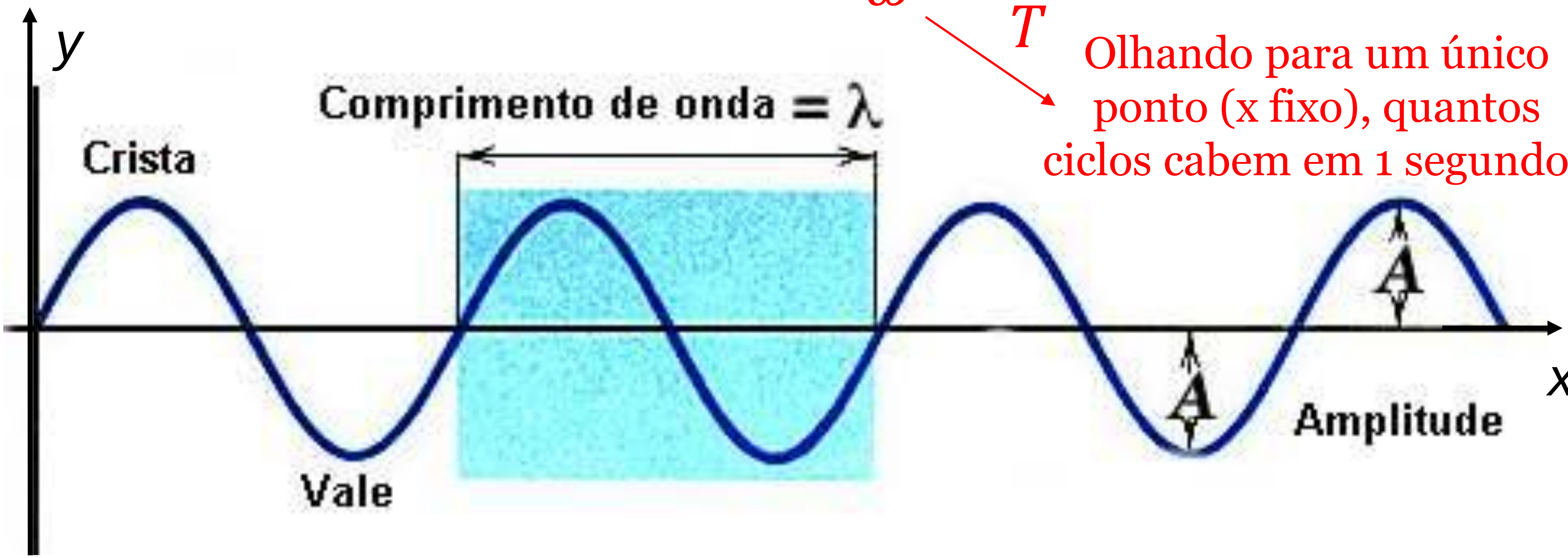
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Em um dado instante (t fixo), quantos ciclos cabem em 1 metro?

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Olhando para um único ponto (x fixo), quantos ciclos cabem em 1 segundo?

Relacionada ao deslocamento no instante t=0



Função de onda harmônica

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

As constantes k e ω são relacionadas entre si.

$$k\lambda = \omega T$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v$$

Velocidade de propagação da onda

Constantes A, δ : arbitrárias (condição inicial)

Constantes k, ω: não são arbitrárias, dependem de propriedades do meio

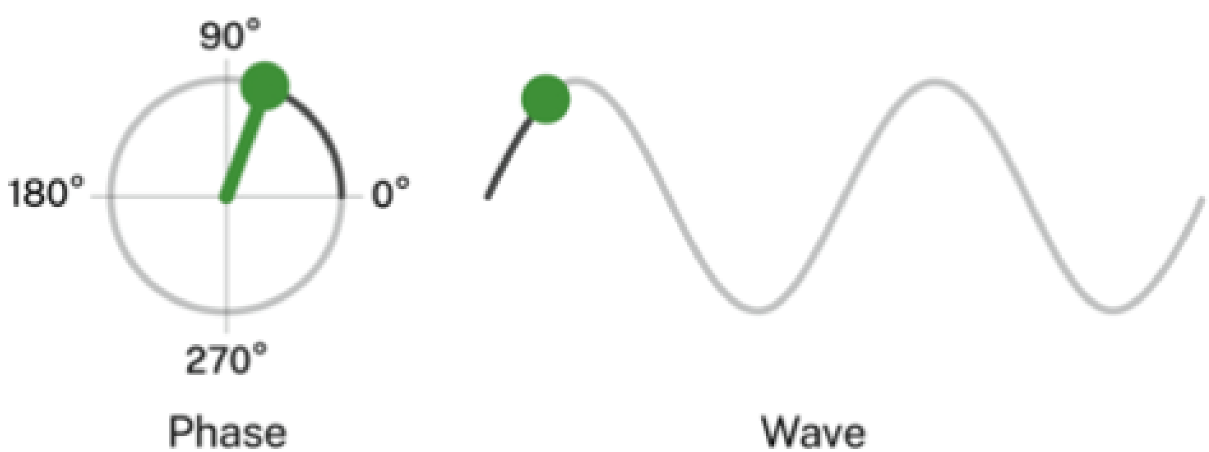
Fase de uma função periódica

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta$$

Fase: ângulo que representa a fração de ciclo cumprida por um ponto x do meio no instante t.

Constante de fase



https://www.nist.gov/image/phasegif

Velocidade transversal

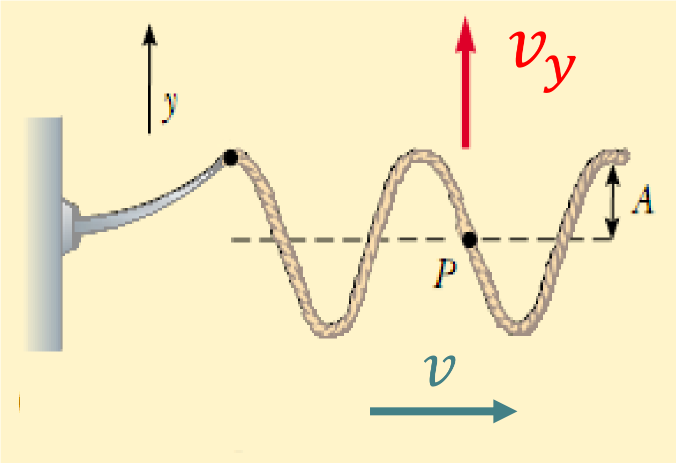
- Posição de um ponto P do meio:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

- Velocidade vertical do ponto P:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A\cos(kx - \omega t + \delta)]$$

$$\boxed{v_y = A\omega sen(kx - \omega t + \delta)}$$



Obs: não confundir com a velocidade de propagação da onda: $v = \frac{\omega}{k}$

Exercício

Mostre que a função de onda harmônica

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

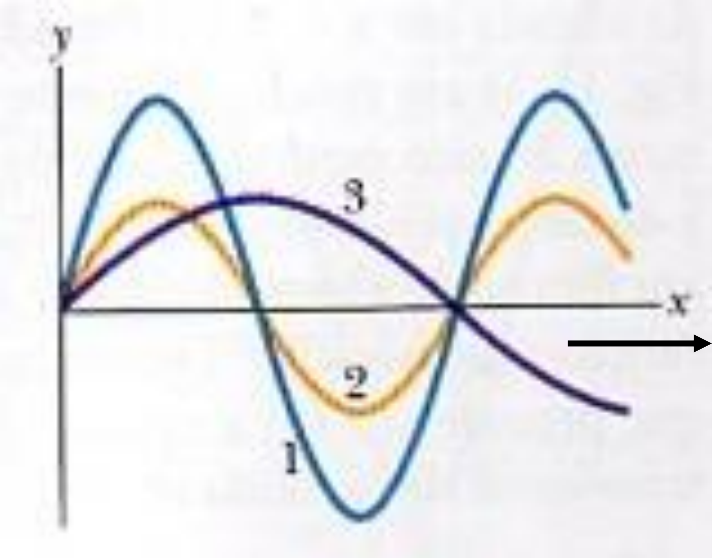
é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Exercício

A figura abaixo mostra três ondas que atuam separadamente em três cordas idênticas. As ondas se propagam na direção x indicada na figura. Ordene as ondas em ordem crescente de:

a) Amplitude (A)
b) Comprimento de onda (λ)
c) Frequência (f)
d) Constante de fase (δ)
e) Frequência angular (ω)
f) Número de onda (k)



Exercício

A figura abaixo mostra três ondas que atuam separadamente em três cordas idênticas. As ondas se propagam na direção x indicada na figura. Ordene as ondas em ordem crescente de:

a) Amplitude (A) a) 2, 3, 1

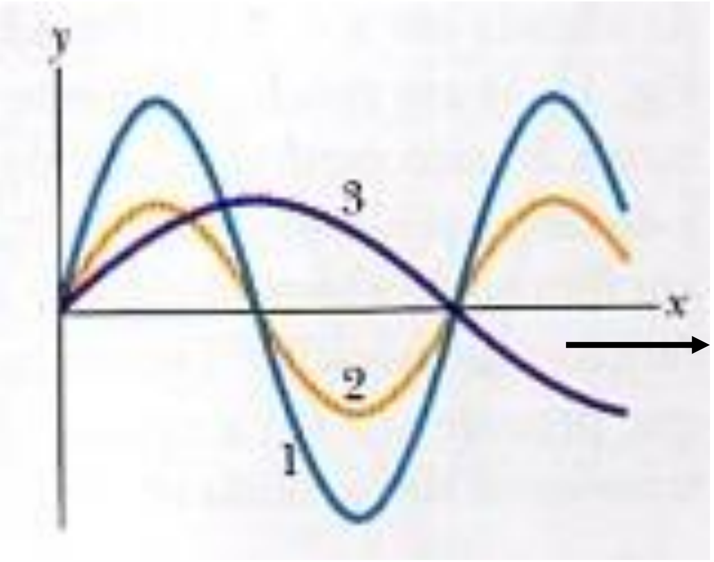
b) Comprimento de onda (λ) b) 1=2, 3

c) Frequência (f) c) 3, 1=2

d) Constante de fase (δ)

e) Frequência angular (ω)

f) Número de onda (k)



d) Todas têm a mesma constante de fase

e) Idem a c), pois $\omega = 2\pi f$

f) É o inverso de b), pois $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Exercício

Uma onda transversal se propaga em uma corda, com uma função de onda dada por:

$$y(x,t) = 2\,sen(x - 2t)$$

com x em metros, y em centímetros e t em segundos. Determine:

a) Amplitude, número de onda, frequência angular, comprimento de onda, período e constante de fase, em unidades do SI.
b) Determine a velocidade de propagação da onda, em unidades do SI.

Exercício

Uma onda transversal se propaga em uma corda, com uma função de onda dada por:

$$y(x,t) = 2\,sen(x - 2t)$$

com x em metros, y em centímetros e t em segundos. Determine:

a) Amplitude, número de onda, frequência angular, comprimento de onda, período e constante de fase, em unidades do SI.
b) Determine a velocidade de propagação da onda, em unidades do SI.

A = 0,02 m
k = 1 rad/m
ω = 2 rad/s
λ = 2π m
T = π s
δ = 0 rad
v = 2 m/s

Exercício

O perfil de uma onda transversal progressiva em uma corda muito longa é dado, em unidades do sistema internacional por:

$$y(x,t) = 2,0 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi(0,5x + 10t)\right]$$

Determine:

a) a amplitude de vibração desta corda;
b) o comprimento de onda e a frequência (em Hz);
c) o sentido e a velocidade de propagação da onda;
d) a distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é $\frac{\pi}{6}$

Exercício

O perfil de uma onda transversal progressiva em uma corda muito longa é dado, em unidades do sistema internacional por:

$$y(x,t) = 2,0 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi(0,5x + 10t)\right]$$

Determine:

a) a amplitude de vibração desta corda;

b) o comprimento de onda e a frequência (em Hz);

c) o sentido e a velocidade de propagação da onda;

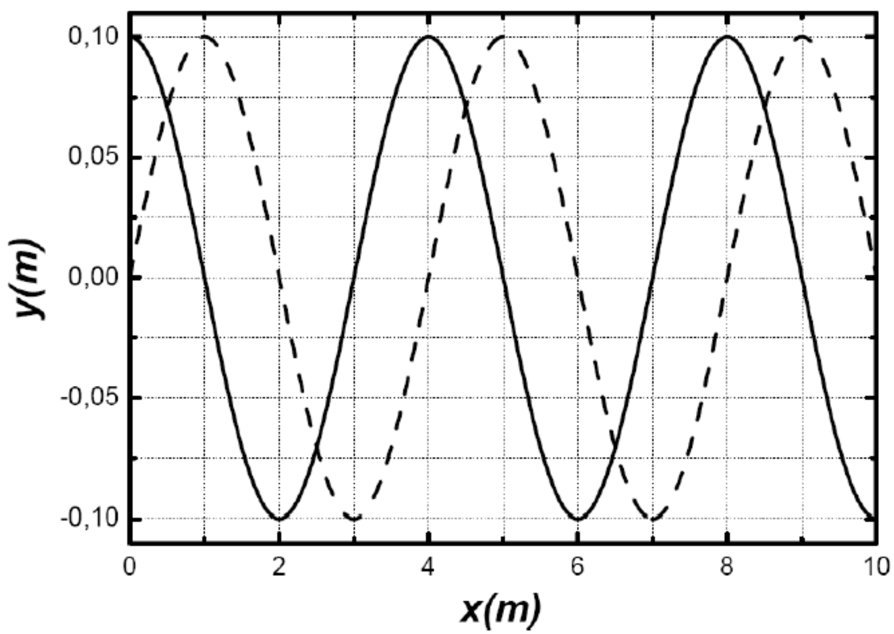
d) a distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é $\frac{\pi}{6}$

Respostas:
a) A = 0,02 m
b) f = 10 Hz
c) v = 20 m/s no sentido negativo de x
d) 1/6 m

Exercício

A figura abaixo mostra duas fotografias tiradas em instantes de tempo diferentes de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo x, uma onda harmônica transversal y(x, t). A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo t = 0 e a segunda (linha tracejada) no instante de tempo t = 0,50 s.

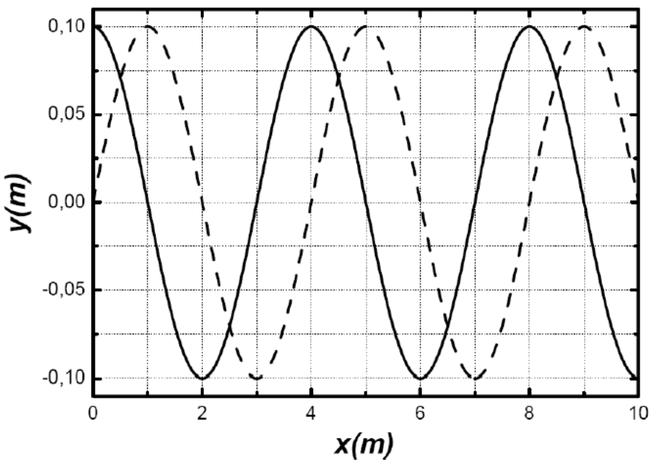
a) Determine a velocidade v de propagação da onda na corda;
b) Determine a amplitude, o numero de onda, a frequência angular a constante de
c) fase e escreva a equação do perfil de onda y(x, t);
d) Determine a velocidade transversal máxima de um ponto da corda.



Exercício

A figura abaixo mostra duas fotografias tiradas em instantes de tempo diferentes de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo x, uma onda harmônica transversal y(x, t). A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo t = 0 e a segunda (linha tracejada) no instante de tempo t = 0,50 s.

a) Determine a velocidade v de propagação da onda na corda;
b) Determine a amplitude, o numero de onda, a frequência angular a constante de
c) fase e escreva a equação do perfil de onda y(x, t);
d) Determine a velocidade transversal máxima de um ponto da corda.



Respostas:
a) v = 2 m/s
b) A = 0,10 m; k = 0,5π m^{-1}; w = π s^{-1}; δ = 0
c) $y(x,t) = 0{,}1\cos(0{,}5\pi x - \pi t)$
d) $v_y = 0{,}1\pi$ m/s

Equação das cordas vibrantes

Ondas em uma corda

Onda em uma corda tensionada

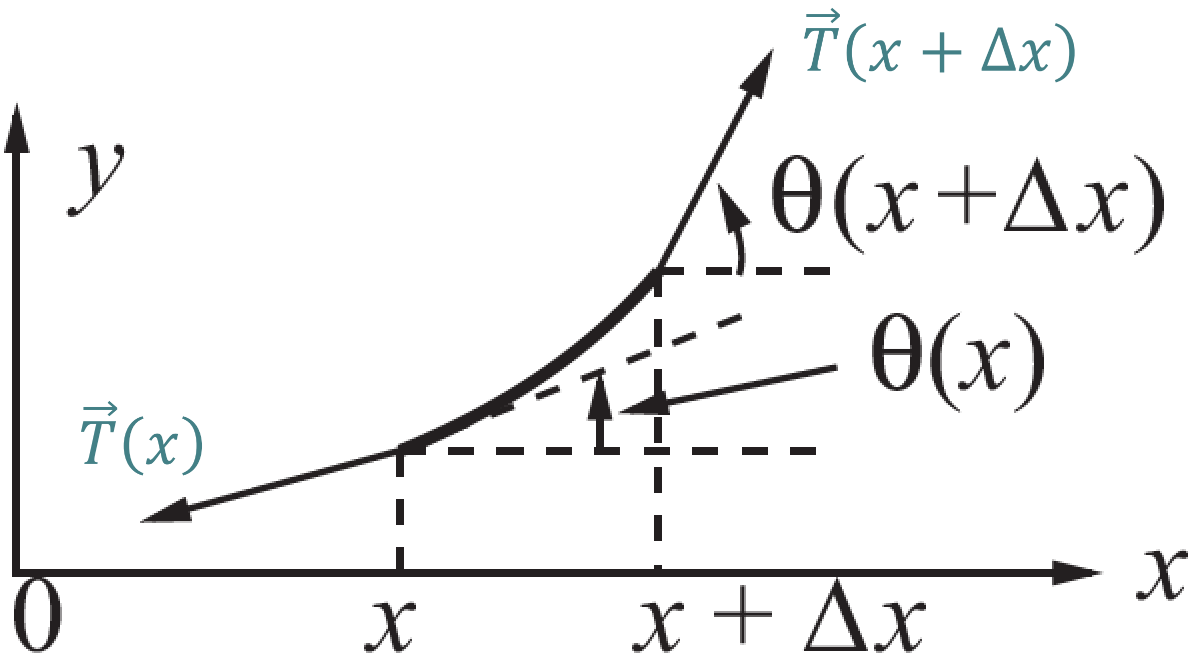
Suposições:

- Corda de comprimento infinito
- Corda ideal: homogênea (densidade constante), inextensível, massa desprezível
- A corda está submetida a um tensão homogênea
- A corda está esticada
- A perturbação (onda) causa pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio (θ pequeno)

Onda em uma corda tensionada

Zoom em um pequeno segmento de comprimento Δx, que tem massa $\Delta m = \mu . \Delta x$

(onde $\mu = \frac{\Delta \mathrm{m}}{\Delta \mathrm{x}}$ é a densidade linear da corda)



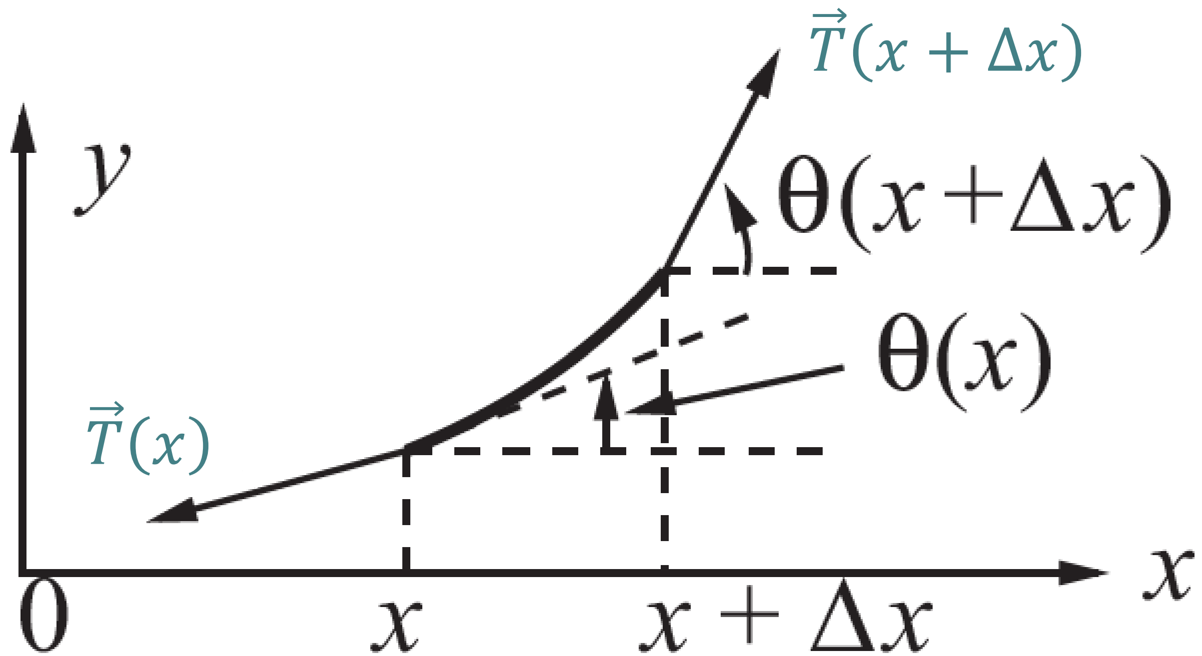
Onda em uma corda tensionada

2ª Lei de Newton:

$$\Delta m.\vec{a} = \vec{T}(x+\Delta x) + \vec{T}(x)$$

Aqui estamos desprezando a força peso em comparação à força de tração ($T \gg P$).

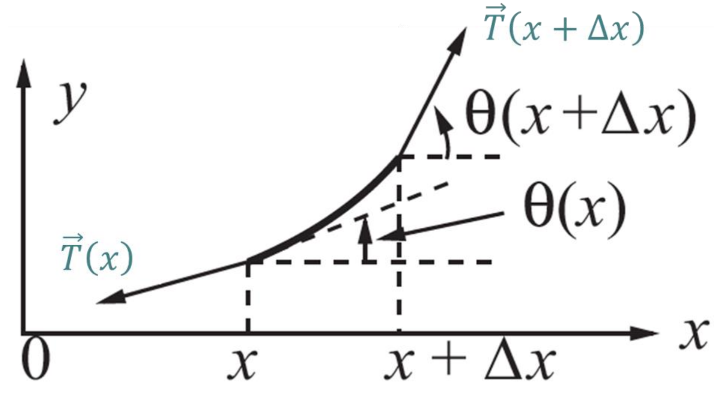
Direção x: não há movimento $\quad T_x(x+\Delta x) + T_x(x) = 0$



Onda em uma corda tensionada

2ª Lei de Newton:

$$\Delta m.\vec{a} = \vec{T}(x + \Delta x) + \vec{T}(x)$$



Direção y: $T_y(x + \Delta x) + T_y(x)$

$$|\vec{T}|\,\mathrm{sen}[\theta(x + \Delta x)] - |\vec{T}|\,\mathrm{sen}[\theta(x)]$$

$\mathrm{sen}\,\theta \approx \mathrm{tg}\,\theta$
(θ pequeno)

$$|\vec{T}|\,\mathrm{tg}[\theta(x + \Delta x)] - |\vec{T}|\,\mathrm{tg}[\theta(x)]$$

$$|\vec{T}|\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - |\vec{T}|\frac{\partial y}{\partial x}(x)$$

$\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$
(derivada = inclinação)

Onda em uma corda tensionada

2ª Lei de Newton:

$$\Delta m.\vec{a} = \vec{T}(x+\Delta x) + \vec{T}(x)$$

Direção y:

$\Delta m = \mu.\Delta x$

$$\Delta m.a_y = |\vec{T}|\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - |\vec{T}|\frac{\partial y}{\partial x}(x)$$

$$\mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)}{\Delta x}\right]$$

Definição de derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Onda em uma corda tensionada

Logo, escrevemos o termo entre colchetes como $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)}{\Delta x}\right]$$

Definição de derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

É a equação de onda que deduzimos anteriormente, com velocidade de propagação:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Solução geral:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

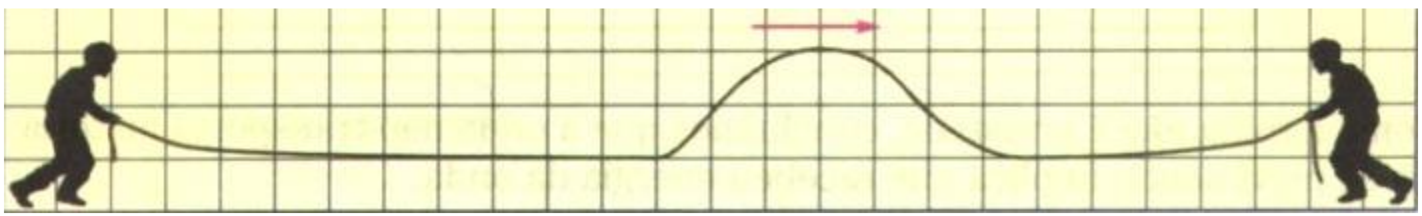
Velocidade de onda em uma corda

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Força de tração na corda

Densidade linear de massa da corda

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$



Vídeo: Onda em uma corda de violão
http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6601

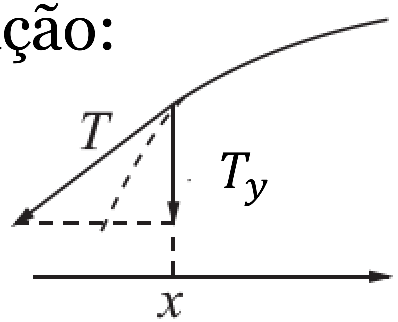
Potência e intensidade da onda em uma corda

Potência transportada por uma onda em uma corda

Potência instantânea transferida pela força de tração:

$$P = \vec{T} \cdot \overrightarrow{v_y} = T_y v_y = T_y \frac{\partial y}{\partial t}$$

Velocidade transversal



Para pequenos deslocamentos ($\theta \approx 0$), sen$\theta \approx$ tg θ, portanto:

$$T_y \approx -T \operatorname{tg}\theta = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -T \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Se a onda for harmônica: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$

Substituindo as derivadas $\frac{\partial y}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial x}$, vem:

$$P = -T[\omega A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)][-kA\cos(kx - \omega t + \delta)]$$

Potência instantânea:

Valor médio em um período = ½ (mantendo x constante)

$$P(x,t) = \omega k T A^2\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$$

Potência média ao longo de um período = <u>Intensidade da onda</u>

$$I = \bar{P} = \frac{1}{2}\omega k T A^2$$

$$kT = \mu v \omega \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \\ v = \frac{\omega}{k} \end{array} \right.$$

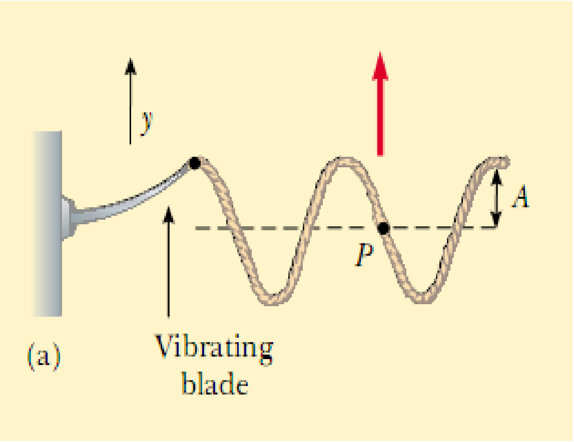
$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$

Válida para uma onda harmônica que se propaga em uma corda

Intensidade da onda harmônica em uma corda

- Potência média transferida para cada ponto oscilante da corda:

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$



- Energia média em uma secção da corda de comprimento $\Delta x = v.\Delta t$:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\mu \omega^2 A^2 \Delta x$$

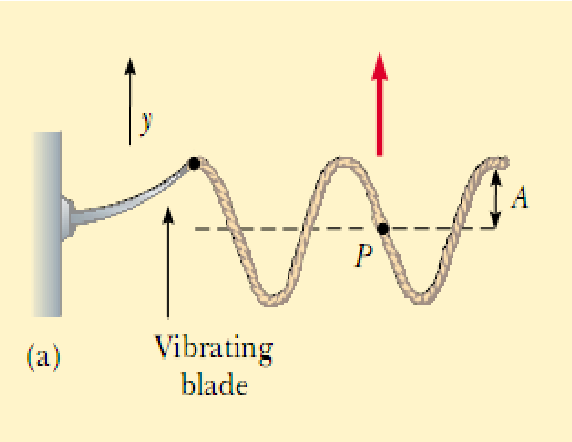
onde μ é a densidade de massa linear da corda, v é a velocidade de propagação da onda, ω é a sua frequência angular, e A é a sua amplitude.

Estas expressões só valem para uma onda harmônica que se propaga em uma corda. Outros sistemas físicos possuem outras formulações.

Intensidade da onda harmônica em uma corda

- Potência média transferida para cada ponto oscilante da corda:

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$



- Energia média em uma secção da corda de comprimento $\Delta x = v.\Delta t$:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\mu \omega^2 A^2 \Delta x$$

onde μ é a densidade de massa linear da corda, v é a velocidade de propagação da onda, ω é a sua frequência angular, e A é a sua amplitude.

Porém, existe um aspecto comum às ondas em qualquer sistema físico: **energia e potência são proporcionais ao quadrado de A e ω.**

Exercício

Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com frequência de 5 oscilações por segundo. No instante inicial, a extremidade da corda está 3 cm acima do ponto de equilíbrio.

a) Determine a velocidade de propagação v e o comprimento de onda progressiva gerada na corda.
b) Escreva o perfil da onda antes que ela chegue à outra extremidade da corda.
c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

Respostas:
a) v = 10 m/s ; λ = 2,0 m/s
b) $y(x,t) = 0{,}03\cos(\pi x - 10\pi t)$
c) I = 0,44 W

Exercício

Uma corda tem 2,60 m de comprimento e 260 g de massa. A tração da corda é 36,0 N.

a) Qual deve ser a frequência de uma onda harmônica progressiva com amplitude de 7,7 mm para que a potência média seja 85,0 W?

b) Escreva a função de onda y(x,t), considerando que no instante t=0 a extremidade da corda na qual a perturbação se inicia encontra-se na metade da altura da amplitude da onda. Despreze a reflexão da onda na outra extremidade da corda.

Respostas:

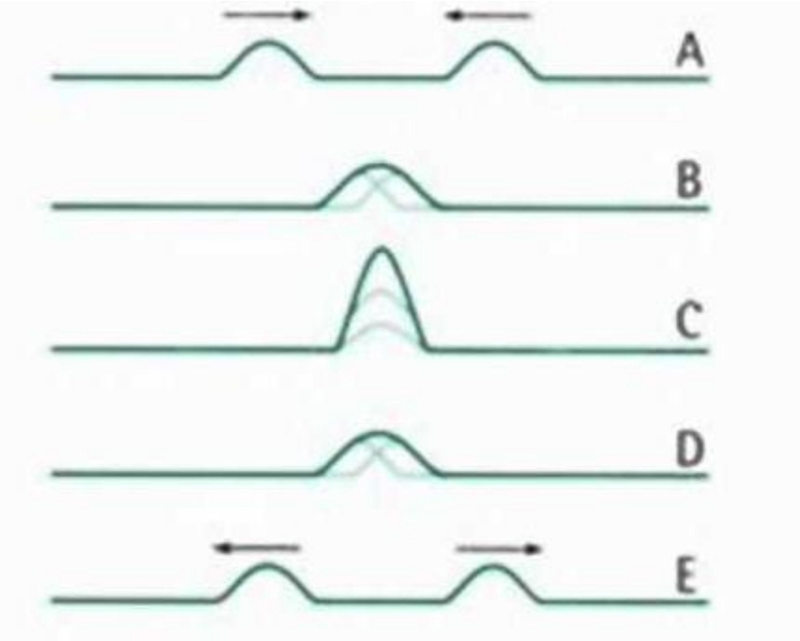
a) f = 195 Hz

b) $y(x,t) = 7{,}7.10^{-3}\cos(64{,}8x - 1229t + \frac{\pi}{3})$

Princípio da superposição

Princípio da Superposição

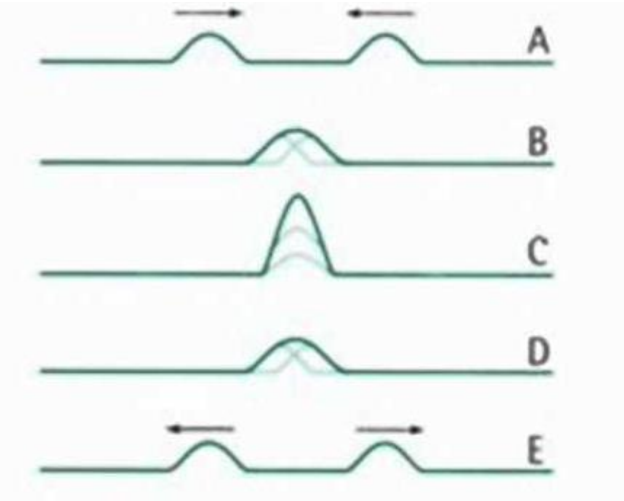
- Se duas ou mais ondas se movem em um meio, a função de onda resultante é a soma algébrica das funções onda individuais.



- Este fenômeno é chamado de **Interferência**.

Princípio da Superposição

- Matematicamente: se y_1 e y_2 são funções de onda, então a combinação linear



$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

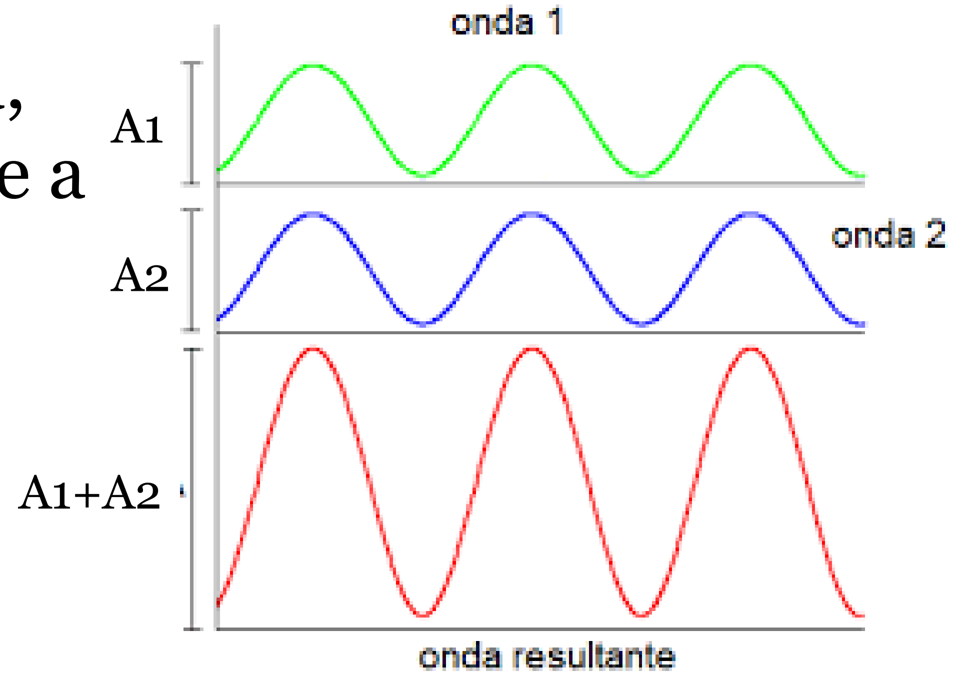
também é:

$$y_3(x,t) = C_1 A_1 \, cos(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1) + C_2 A_2 \, cos(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2)$$

Interferência de ondas harmônicas

Interferência construtiva

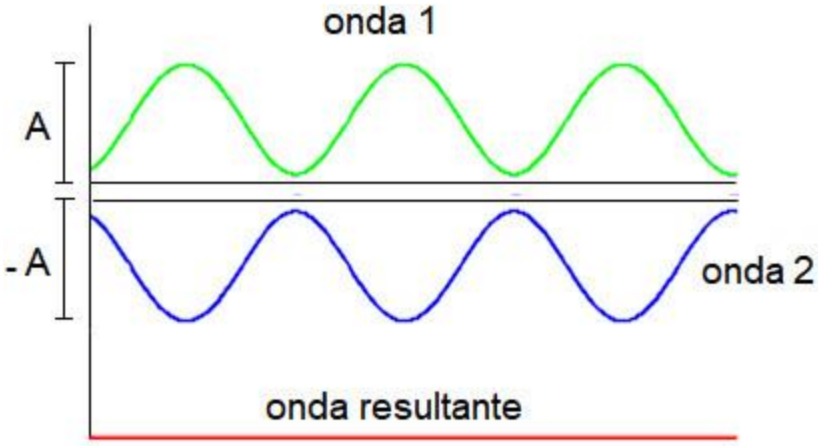
- Ocorre quando ondas de frequência e fase semelhantes se propagam no mesmo meio
- Interferência perfeitamente construtiva: sobreposição de ondas que possuem a mesma fase e frequência
- No caso de interferência perfeitamente construtiva, as amplitudes se somam, e a frequência permanece inalterada.



Interferência destrutiva

- Ocorre quando ondas de frequência semelhante e fases diferentes se propagam no mesmo meio
- Interferência perfeitamente destrutiva: sobreposição de ondas de mesma frequência, mesma amplitude e defasadas de 180º ($\delta_1 - \delta_2 = \pi$)
- No caso de interferência perfeitamente destrutiva, as amplitudes se anulam.

Exemplo: fone com cancelamento de ruído



https://tecnoblog.net/265488/como-funciona-um-fone-com-cancelamento-de-ruido/

Exemplo I: ondas harmônicas de mesma frequência e amplitude que se propagam no mesmo sentido

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$
$$k_1 = k_2 = k$$
$$A_1 = A_2 = A$$
$$\delta_1 - \delta_2 = \delta$$

Princípio da superposição: $y(x,t) = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)}$$

A amplitude da onda resultante depende da diferença de fase entre as ondas originais

A onda resultante tem a mesma frequência das ondas originais

Se $\delta = 0$ $\rightarrow$ Amplitude = 2A (interferência construtiva)

Se $\delta = \pi$ $\rightarrow$ Amplitude = 0 (interferência destrutiva)

Se $\delta = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ Amplitude = $A\sqrt{2}$ (caso intermediário)

Exemplo II: ondas harmônicas de mesma frequência, no mesmo sentido, mas com amplitudes diferentes

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$

$$y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$
$$k_1 = k_2 = k$$
$$A_1 \neq A_2$$
$$\delta_1 - \delta_2 = \delta$$

Princípio da superposição: $y(x,t) = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)$$

Nesse caso não dá pra usar a identidade da soma dos cossenos.

Notação complexa:

$$y(x,t) = Re\{A_1 e^{i(kx-\omega t)} + A_2 e^{i(kx-\omega t+\delta)}\}$$

Vamos usar notação complexa para obter uma expressão para a onda resultante.

$$y(x,t) = Re\{e^{i(kx-\omega t)}[A_1 + A_2 e^{i\delta}]\}$$

Este é um número complexo que pode ser escrito na forma $Ae^{i\beta}$, onde A equivale ao módulo e β equivale à fase do número complexo.

Exemplo II: ondas harmônicas de mesma frequência, no mesmo sentido, mas com amplitudes diferentes

$$y(x,t) = Re\{e^{i(kx-\omega t)}[A_1 + A_2 e^{i\delta}]\}$$

Este é um número complexo que pode ser escrito na forma $Ae^{i\beta}$, onde A equivale ao módulo e β equivale à fase do número complexo.

$$A_1 + A_2 e^{i\delta} = Ae^{i\beta}$$

$$A_1 + A_2\cos\delta + iA_2 \operatorname{sen}\delta = A\cos\beta + iA\operatorname{sen}\beta$$

Módulo de um número complexo $z = a + ib$:
$|z|^2 = a^2 + b^2$

$$A^2 = (A_1 + A_2\cos\delta)^2 + (A_2\operatorname{sen}\delta)^2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$$

Igualando as partes imaginárias:

$$A_2\operatorname{sen}\delta = A\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{A}{A_2}\operatorname{sen}\delta$$

Assim, o termo $[A_1 + A_2 e^{i\delta}]$ pode ser escrito como $Ae^{i\beta}$, onde A e β são determinados por:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{A}{A_2}\operatorname{sen}\delta$$

Exemplo II: ondas harmônicas de mesma frequência, no mesmo sentido, mas com amplitudes diferentes

$$y(x,t) = Re\{e^{i(kx-\omega t)}[A_1 + A_2 e^{i\delta}]\}$$

$$y(x,t) = Re\{e^{i(kx-\omega t)} A e^{i\delta\beta}\}$$

$$y(x,t) = Re\{A e^{i(kx-\omega t+\beta)}\}$$

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \beta)}$$

onde A e β são definidos por:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{A}{A_2}\operatorname{sen}\delta$$

A onda resultante tem a mesma frequência das ondas originais

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$$

A amplitude da onda resultante é a soma quadrática das amplitudes originais ($A_1^2 + A_2^2$), somada a um termo de interferência que depende da diferença de fase ($2A_1A_2\cos\delta$)

Exemplo III: ondas harmônicas de mesma frequência, fase e amplitude que se propagam em sentidos opostos

$$y_1(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$
$$k_1 = k_2 = k$$
$$A_1 = A_2 = A$$
$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

Princípio da superposição: $y(x,t) = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = A\cos(kx + \omega t) + A\cos(kx - \omega t)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)}$$

Onda estacionária

A onda resultante não é progressiva.

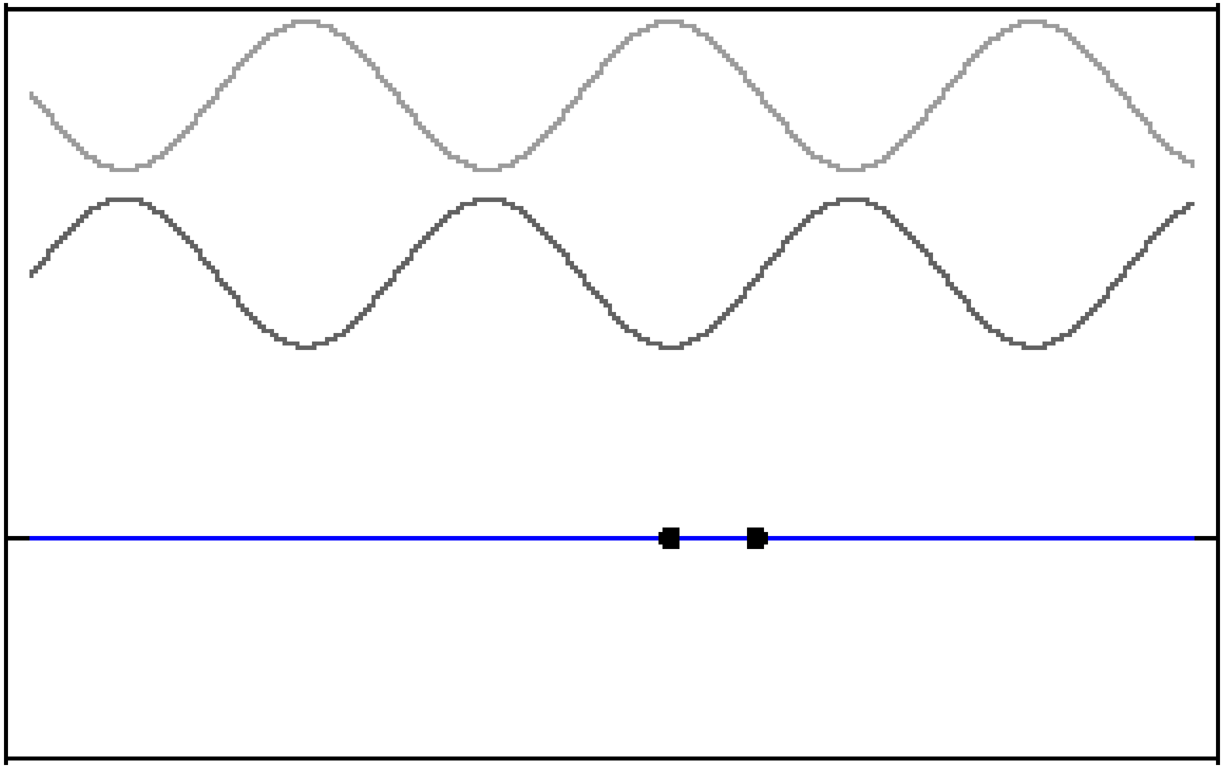
Podemos pensar na onda estacionária como um MHS (termo $\cos(\omega t)$) que tem uma amplitude que varia de acordo com a posição x do meio (termo $2A\cos(kx)$).

Exemplo III: ondas harmônicas de mesma frequência, fase e amplitude que se propagam em sentidos opostos

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)}$$

Onda estacionária

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$
$$k_1 = k_2 = k$$
$$A_1 = A_2 = A$$
$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$



Onda progressiva

$$y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

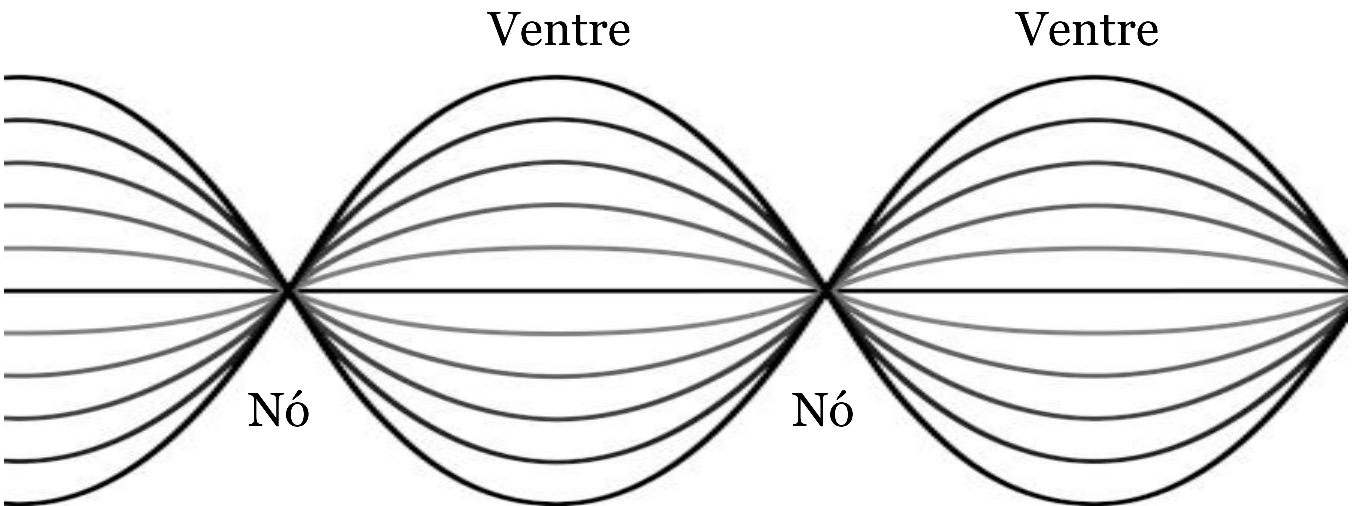
Onda progressiva

$$y_1(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

Onda estacionária

$$y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Onda estacionária



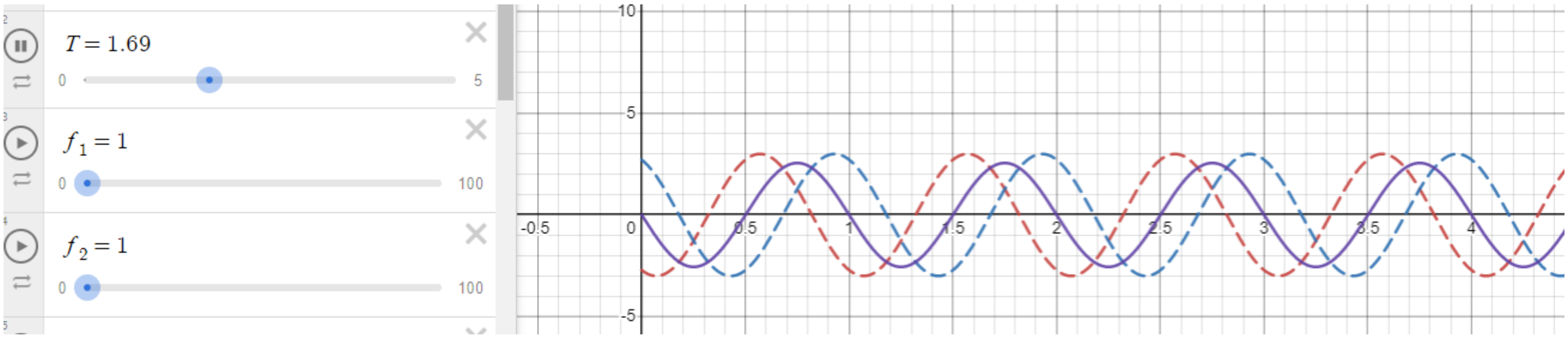
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Considerando $y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$:

Posição dos nós: $\cos(kx) = 0 \quad \rightarrow \quad kx = \frac{\pi}{2} . \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \quad \rightarrow \quad x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots$

Posição dos ventres: $\cos(kx) = \pm 1 \ \rightarrow \ kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \ \rightarrow \ x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots$

Simulação – onda estacionária



https://www.desmos.com/calculator/b7kxqry7xe

Nesta simulação é possível variar a frequência, a amplitude e a constante de fase de duas ondas harmônicas que se propagam em sentidos opostos. Observe que a onda estacionária se forma apenas se as ondas originais estiverem em fase com a mesma frequência e amplitude.

Exemplo IV: ondas harmônicas de mesma amplitude e fase, que se propagam no mesmo sentido com frequências ligeiramente diferentes (Batimento)

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\omega_1 \neq \omega_2$$
$$k_1 \neq k_2$$
$$A_1 = A_2 = A$$
$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

Vamos supor frequências próximas, sendo $\omega_1 > \omega_2$ e $k_1 > k_2$

Média: $\bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ $\qquad \bar{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$

Diferença: $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ $\qquad \Delta k = k_1 - k_2$

Se as frequências são próximas, temos que: $\bar{\omega} \gg \Delta\omega$ e $\bar{k} \gg \Delta k$

Somando e subtraindo essas expressões, obtemos:

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \qquad k_1 = \bar{k} + \frac{1}{2}\Delta k$$

$$\omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega \qquad k_2 = \bar{k} - \frac{1}{2}\Delta k$$

Exemplo IV: ondas harmônicas de mesma amplitude e fase, que se propagam no mesmo sentido com frequências ligeiramente diferentes (Batimento)

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Princípio da superposição: $y(x,t) = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$\omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$k_1 = \bar{k} + \frac{1}{2}\Delta k$$

$$k_2 = \bar{k} - \frac{1}{2}\Delta k$$

...

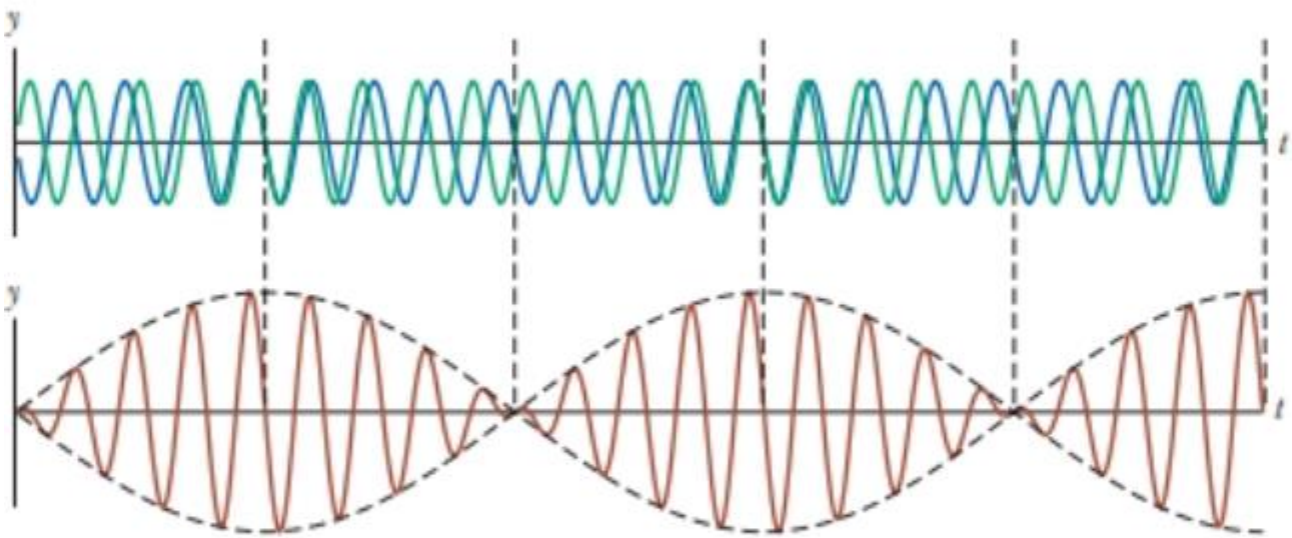
$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}$$

Batimento: onda de frequência mais alta ($\bar{\omega}$) cuja amplitude é modulada por outra onda de frequência mais baixa ($\Delta\omega$).

Batimento

Envoltória

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$



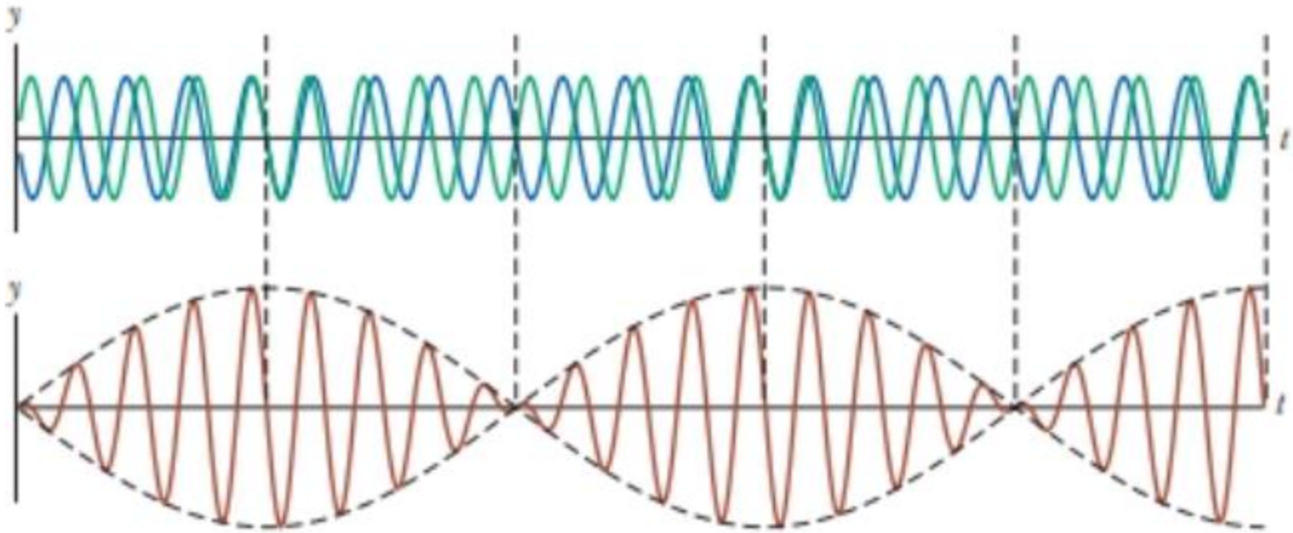
Velocidade de grupo: $\quad v_{grupo} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$

Velocidade de fase: $\quad v_{fase} = \dfrac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$

Nas condições deste exemplo ($\Delta k \rightarrow dk$), a velocidades de grupo e de fase são iguais.

Batimento

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

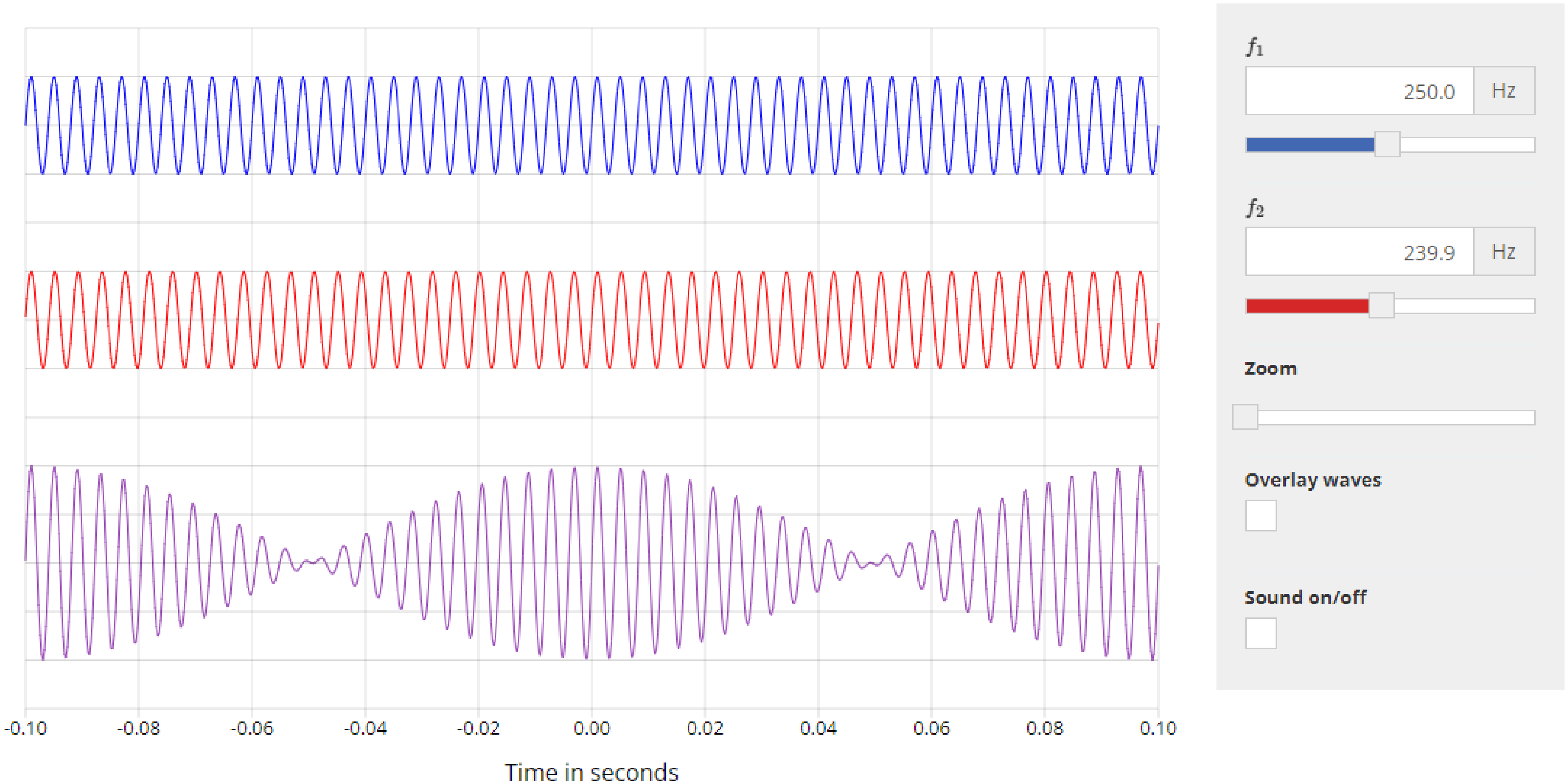


Frequência de batimento: $\frac{\Delta\omega}{2} \rightarrow \quad f_{bat} = |f_1 - f_2|$

O máximo na amplitude da onda resultante ocorre frequência f_{bat}.

Frequência da onda resultante: $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$

Simulação - batimento



https://academo.org/demos/wave-interference-beat-frequency/

Exercício

Sejam duas ondas que se propagam na mesma corda:

$y_1(x,t) = 3sen(x - 2t)$ $\quad$ $y_2(x,t) = 3sen(x - 2t + \delta)$

As ondas têm uma diferença de fase δ. Quando as duas ondas atuam sobre um ponto x da corda, as perturbações se somam de acordo com o princípio da superposição.

a) Determine a equação da onda resultante na corda. Utilize a relação $sena + senb = 2cos\left(\frac{|a-b|}{2}\right) sen\left(\frac{a+b}{2}\right)$
b) Determine a amplitude da onda resultante no caso em que $\delta = 0$. Que tipo de interferência é esta?
c) Determine a amplitude da onda resultante no caso em que $\delta = \pi$. Que tipo de interferência é esta?

Exercício

Sejam duas ondas que se propagam na mesma corda:

$$y_1(x,t) = 3sen(x - 2t) \qquad y_2(x,t) = 3sen(x - 2t + \delta)$$

As ondas têm uma diferença de fase δ. Quando as duas ondas atuam sobre um ponto x da corda, as perturbações se somam de acordo com o princípio da superposição.

a) ...ante na corda.

Resposta: $y(x,t) = 6cos\left(\frac{\delta}{2}\right) sen\left(x - 2t + \frac{\delta}{2}\right)$

...$\frac{\cdot b}{2}\Big)\, sen\left(\frac{a+b}{2}\right)$

b) Determine a amplitude da onda resultante no caso em

Resposta: A = 6, interferência construtiva ia é esta?

c) Determine a amplitude da onda resultante no caso em

Resposta: A = 0, interferência destrutiva ia é esta?

Exercício

Determine a função de onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência (w), têm amplitudes de 3,0 cm e 4,0 cm, e a onda de maior amplitude está com a fase adiantada de $\frac{\pi}{2}$ rad. Escreva a resposta em termos de w e k.

Resposta:

$$y(x,t) = 5\cos(kx - \omega t + 0{,}93) \qquad (cm)$$

Exercício

Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por:

$$y_1 = 0,05\cos(\pi x - 4\pi t),$$

$$y_2 = 0,05\cos(\pi x + 4\pi t),$$

em unidades do SI.

a) Determine a função de onda resultante
b) Qual é o menor valor positivo de x que corresponde a um nó?
c) Em quais instantes no intervalo $0 \leq t \leq 0,5$ o ponto do meio em x=0 terá velocidade zero?

Resposta:

a) $y(x,t) = 0,1\cos(\pi x)\ \cos(4\pi t)$
b) $x = 0,5\ m$
c) $t = 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\ s$

Exercício

Duas ondas transversais progressivas de mesma frequência f = 100 s^{-1} são produzidas em um fio de aço de 1 mm de diâmetro e densidade de 8 g/cm^3, submetido a uma tensão T=500 N. As ondas são dadas por:

$$y_1(x, t) = A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_2(x, t) = 2A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

onde A = 2 mm.

a) Determine a função de onda resultante
b) Determine a intensidade da onda resultante.
c) Se variarmos a diferença de fase entre as ondas, qual será a razão entre os valores máximo e mínimo possíveis da intensidade da onda resultante?

Resposta:

a) $y(x,t) = 3{,}46.10^{-3}\cos\left(2{,}23x - 628t - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $4{,}18\,W/m^2$ c) $\frac{I_{max}}{I_{min}} = 9$

Reflexão de ondas em uma corda

Reflexão em uma corda com extremidade fixa

Onda se propagando para a esquerda:

$$g(x + vt)$$

Função de onda antes de atingir a extremidade fixa em x=0:

$$y(x,t) = g(x + vt)$$

Condição de contorno: $y(0,t) = 0$ (a altura do ponto x=0 é sempre zero)

Qual será a função de onda após a reflexão na extremidade fixa?
Solução geral da equação de onda:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

g(x+vt) é conhecida (onda incidente).
Falta determinar f(x-vt) (onda refletida).

Reflexão em uma corda com extremidade fixa

Impondo a condição de contorno na solução geral: $y(0,t) = 0$

O objetivo aqui é determinar f(x-vt) (onda refletida).

$$y(0,t) = f(0 - vt) + g(0 + vt) = 0$$

$$f(-vt) = -g(vt)$$

$$f(x') = -g(-x')$$

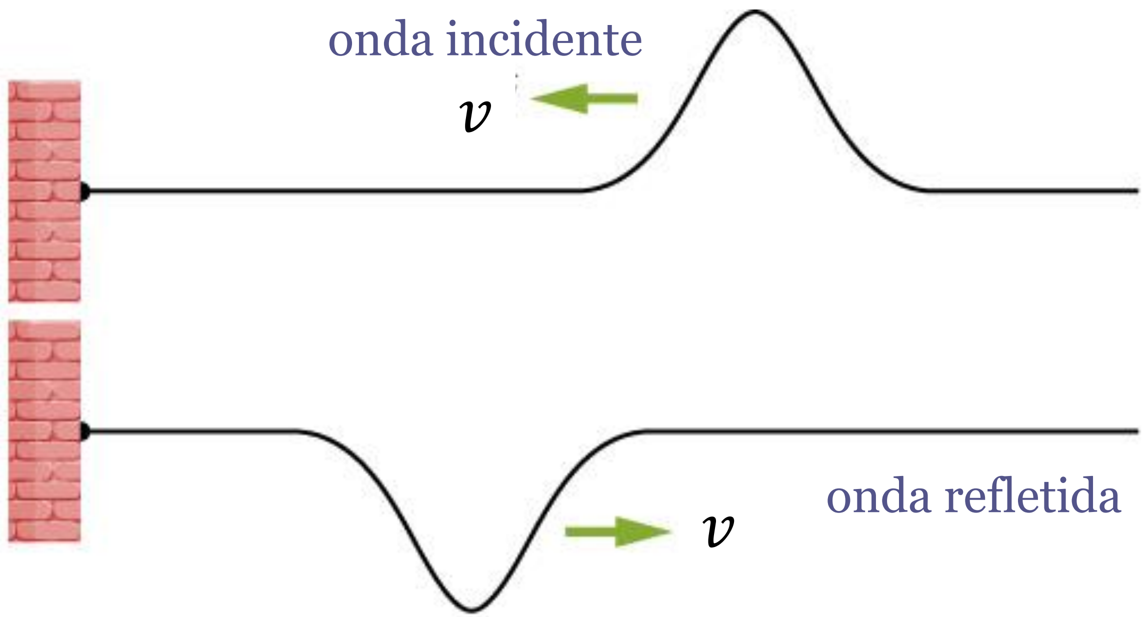
$$f(x - vt) = -g\big(-(x - vt)\big) \rightarrow \quad f(x - vt) = -g(vt - x)$$

Substituindo na solução geral:

$$\boxed{y(x,t) = \underbrace{-g(vt - x)}_{\text{onda refletida}} + \underbrace{g(x + vt)}_{\text{onda incidente}}}$$

A onda refletida tem a mesma forma da onda incidente (g), mas o pulso é invertido (diferença de fase π)

Reflexão em uma corda com extremidade fixa

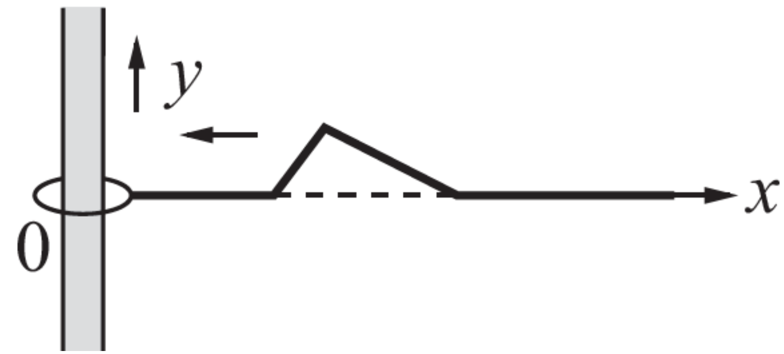


$$\boxed{y(x,t) = \underbrace{-g(vt - x)}_{\text{onda refletida}} + \underbrace{g(x + vt)}_{\text{onda incidente}}}$$

Reflexão em uma corda com extremidade livre

Onda se propagando para a esquerda:

$$g(x+vt)$$



Função de onda antes de atingir a extremidade livre em x=0:

$$y(x,t) = g(x+vt)$$

Condição de contorno: $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$ (a extremidade da corda deve ter inclinação zero, ou seja, máximo ou mínimo local ou estabilidade)

Qual será a função de onda após a reflexão na extremidade fixa?

Solução geral da equação de onda:

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

g(x+vt) é conhecida (onda incidente).
Falta determinar f(x-vt) (onda refletida).

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df(x-vt)}{d(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial x} + \frac{dg(x+vt)}{d(x+vt)}\frac{\partial(x+vt)}{\partial x} = f'(x-vt) + g'(x+vt)$$

Reflexão em uma corda com extremidade livre

Impondo a condição de contorno na solução geral: $\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = f'(0 - vt) + g'(0 + vt) = 0$$

$$f'(-vt) = -g'(vt)$$

$$f'(x') = -g'(-x')$$

O objetivo aqui é determinar f(x-vt) (onda refletida).

Integrando os dois lados em x, precisaremos fazer uma substituição do tipo: $u = -x' \quad \rightarrow \quad du = -dx$. Assim:

$$f(x') = -\int -g'(u)du = g(-x')$$

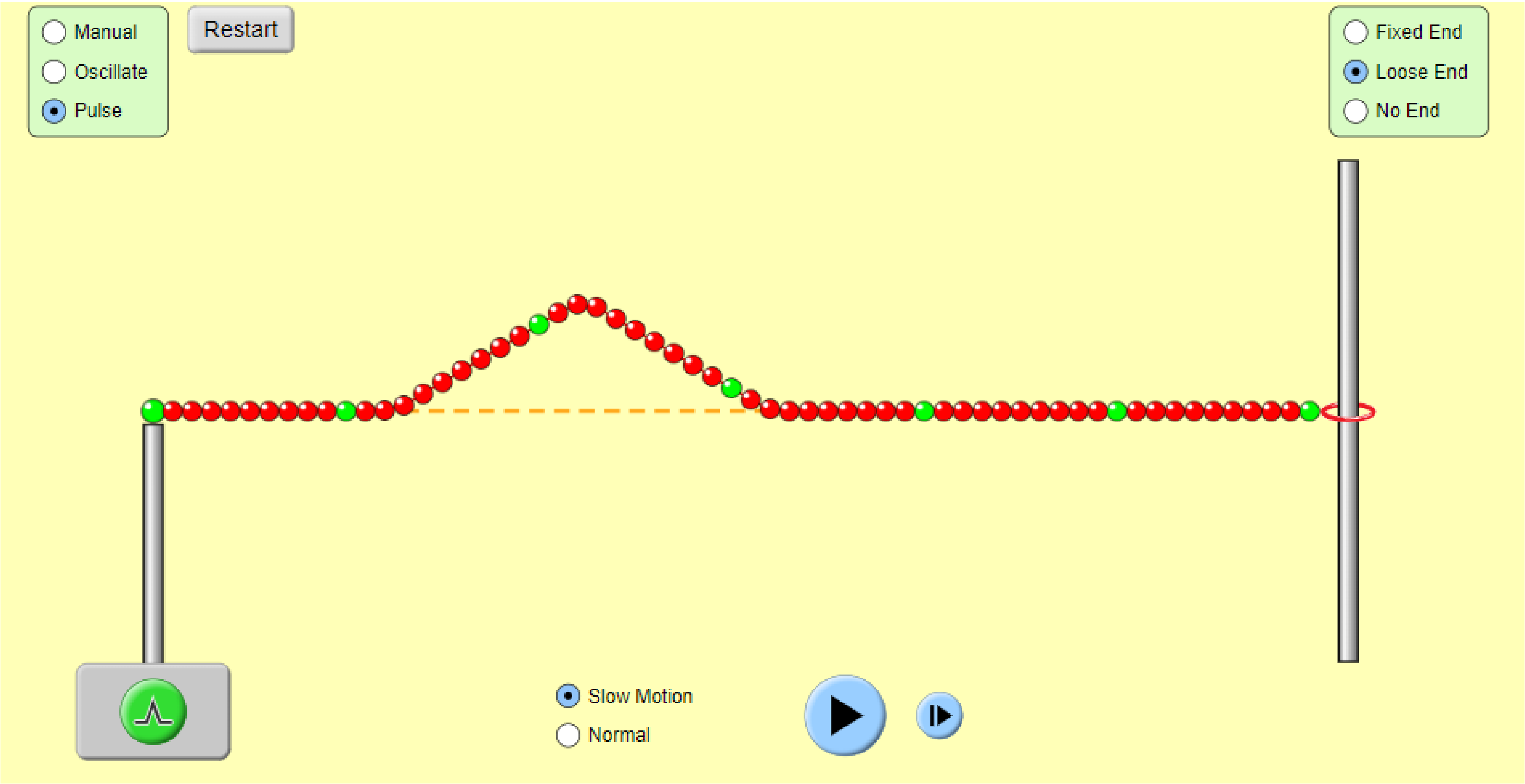
$$f(x - vt) = g(vt - x)$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x,t) = \underbrace{g(vt - x)}_{\text{onda refletida}} + \underbrace{g(x + vt)}_{\text{onda incidente}}}$$

A onda refletida tem a mesma forma da onda incidente (g), sem inversão.

Simulação - reflexão



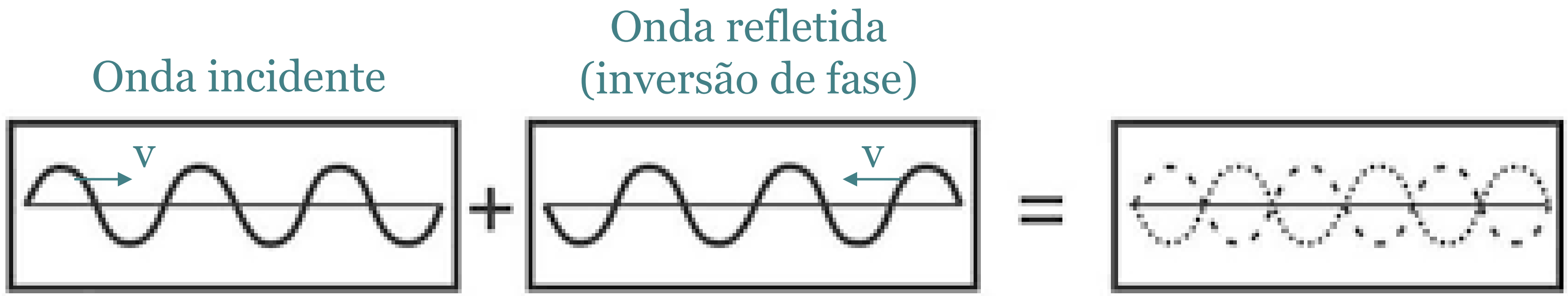
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

Modos normais de vibração

Corda com duas extremidades fixas

Modos normais de vibração

Considere uma onda harmônica que se propaga em uma corda de comprimento L presa em ambas as extremidades.



Onda estacionária: superposição de ondas de mesma amplitude e frequência que se propagam em sentidos opostos

Qual é a condição para que se forme uma onda estacionária em uma corda com extremidades fixas? Para que ocorra a reflexão em oposição de fase com a onda incidente, é preciso que a corda de comprimento L comporte múltiplos inteiros de $\lambda/2$.

Modos normais de vibração

Função de onda estacionária (ver aulas anteriores):

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta)$$

Condição de contorno (duas extremidades fixas):

$$y(0,t) = 0 \qquad e \qquad y(L,t) = 0$$

Vamos determinar A(x) substituindo a função de onda estacionária na equação de onda:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

$$-\boxed{\frac{\omega^2}{v^2}} A(x)\cancel{\cos(\omega t + \delta)} = \frac{d^2 A}{dx^2}\cancel{\cos(\omega t + \delta)}$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - k^2 A(x) = 0$$

EDO semelhante à do MHS

Solução geral:

$$A(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$$

Modos normais de vibração

Logo, $$y(x,t) = [a\cos(kx) + b\,\text{sen}(kx)]\cos(\omega t + \delta)$$

Vamos impor as condições de contorno:

$$y(0,t) = [a\,\cancelto{1}{\cos(k0)} + b\,\cancelto{0}{\text{sen}(k0)}]\cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$a = 0$$

$$y(L,t) = [b\,\text{sen}(kL)]\cos(\omega t + \delta) = 0$$

Condição para que se forme uma onda estacionária confinada em uma corda de extremidades fixas

$$\text{sen}(kL) = 0 \quad \rightarrow \quad kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \quad \rightarrow \quad \boxed{k_n = n\frac{\pi}{L}}$$

Utilizando as relações $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $v = \frac{\omega}{k}$ e $\omega = 2\pi\text{f}$, vem:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \qquad \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{L}v} \qquad \boxed{f_n = \frac{n}{2L}v}$$

Modos normais de vibração

Logo, há infinitas ondas estacionárias que podem se formar em uma corda com extremidades fixas. A função de onda que descreve todas essas possibilidades é:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

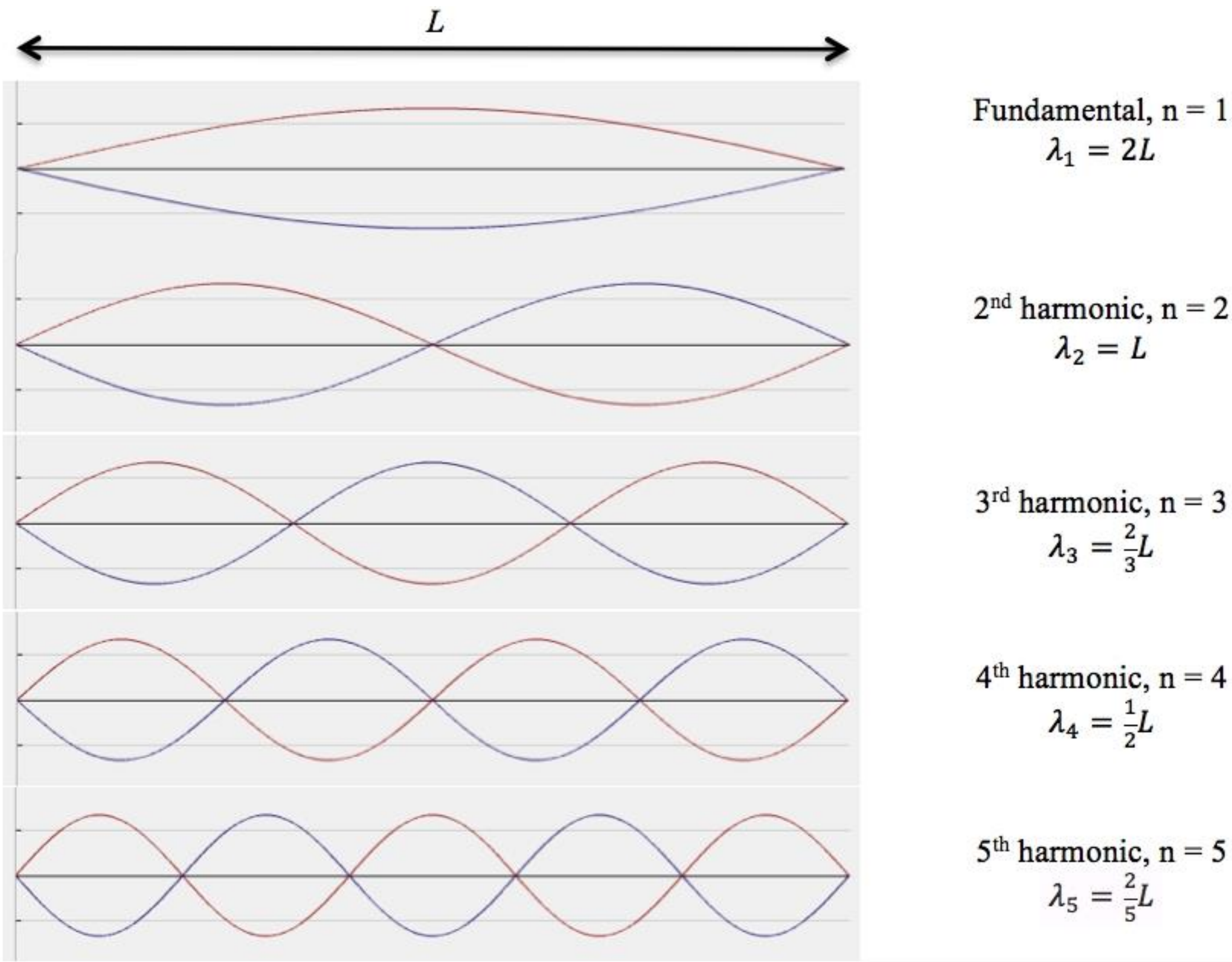
$$\boxed{y_n(x,t) = b_n \operatorname{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)}$$

Modos normais de vibração

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} v$$

Cada modo normal de vibração (n) é chamado de **harmônico**.

Modos normais de vibração em uma corda com extremidades fixas



Modos normais de vibração em uma corda com extremidades fixas

$$\boxed{f_n = n\frac{v}{2L}}$$

As frequências dos modos normais de vibração são chamadas de **frequências de ressonância** da corda.

$$f_1 = \frac{n}{2L} \rightarrow f_n = n.f_1$$

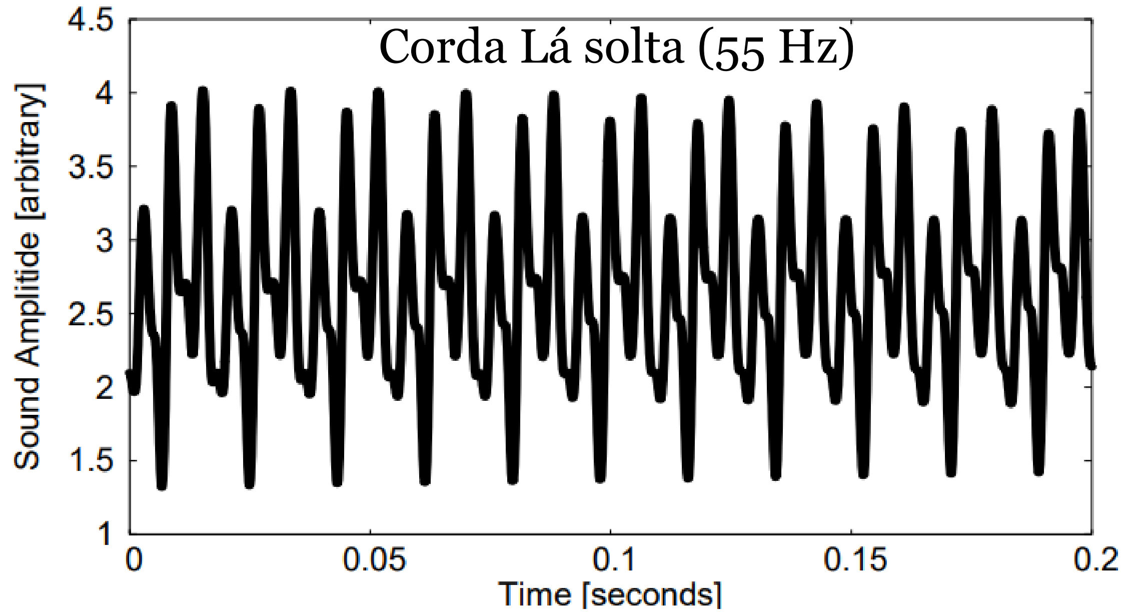
A frequência de cada modo ou harmônico n é um múltiplo inteiro da frequência do modo fundamental f_1.

Exemplo: alguns termos da série harmônica partindo de f_1 = 55 Hz (nota Lá):

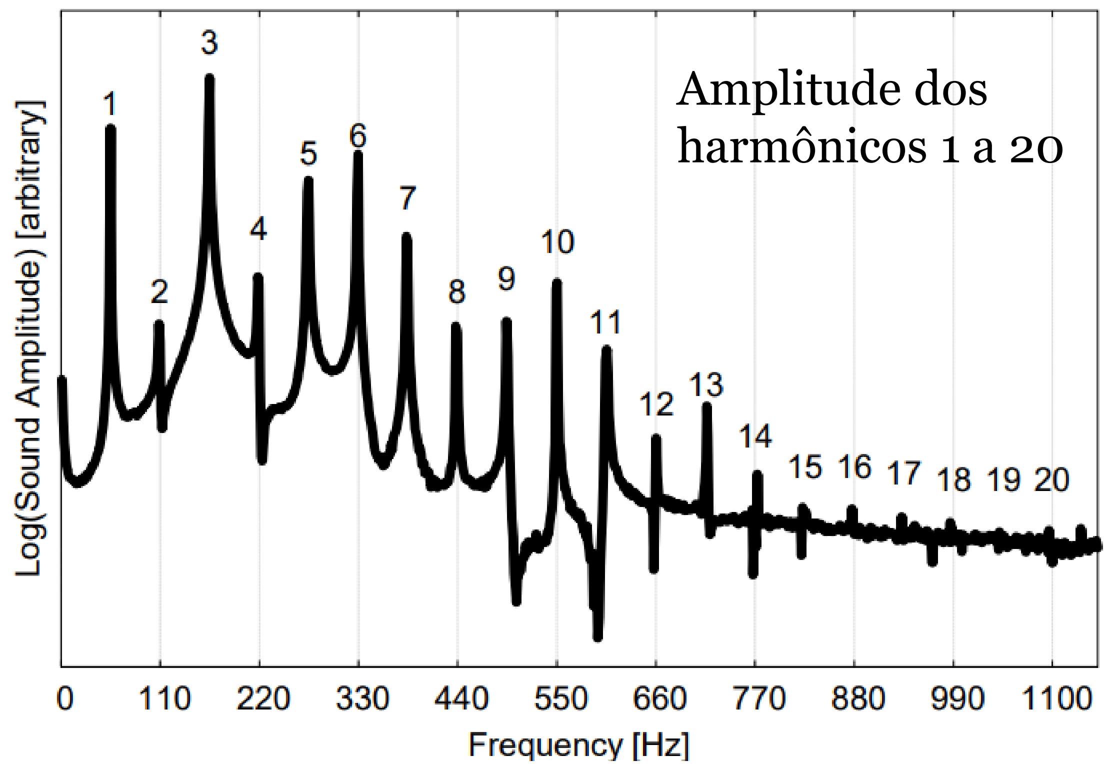
$f_1 = 55\ Hz$ (Lá0 - fundamental)
$f_2 = 110\ Hz$ (Lá1 – 8ª)
$f_3 = 165\ Hz$ (Mi2 – 5ª justa)
$f_4 = 220\ Hz$ (Lá2 – 8ª)
$f_5 = 275\ Hz$ (Dó#3 – 3ª maior)
...

Ondas confinadas oscilam em um conjunto discreto de frequências bem definidas

Em geral, vários modos de oscilação estão presentes simultaneamente em uma corda vibrante. Cada modo pode ter uma amplitude diferente, a depender do material da corda e da maneira como as vibrações foram produzidas.



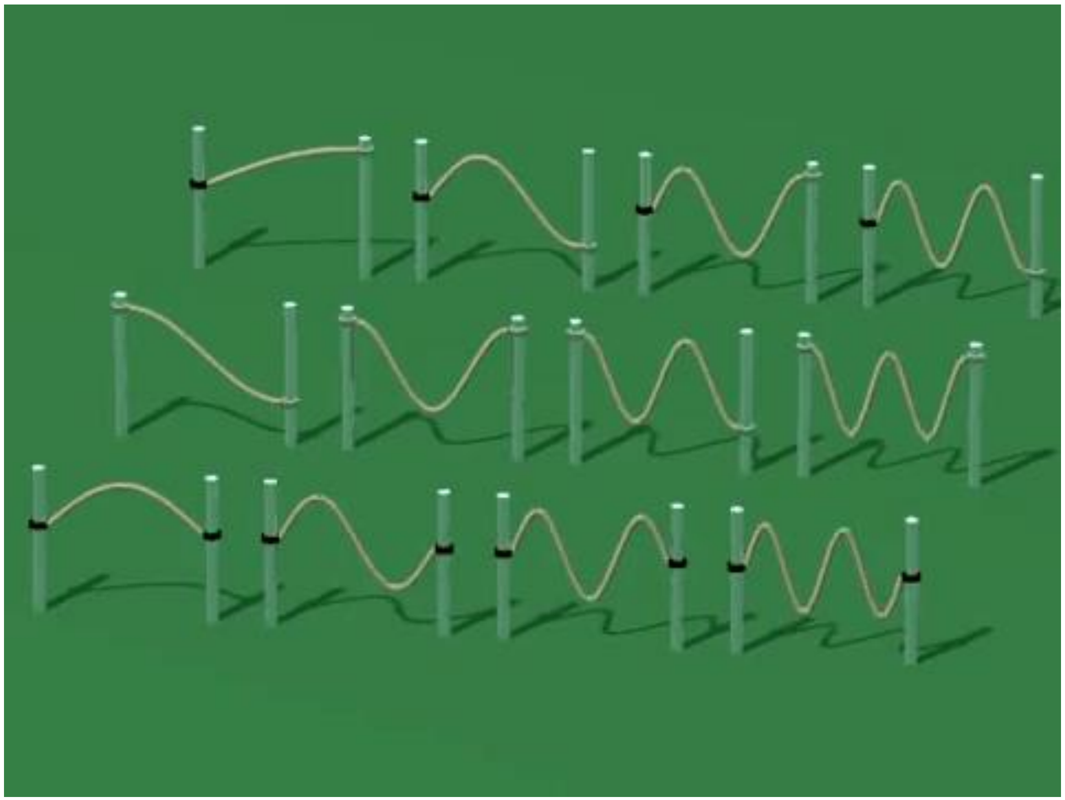
Análise harmônica (ou análise de Fourier): permite determinar as intensidades relativas dos harmônicos



Obs: é possível excitar uma onda de frequência diferente de $f_n = n\frac{v}{2L}$ em um corda com extremidades fixas. Porém, a onda resultante não será estacionária, e terá uma baixa amplitude. Ou seja, se $f \neq f_n$, não ocorre ressonância.

https://youtu.be/dx2wqHjYnzc

Obs: se a condição de contorno for diferente, outros modos normais de vibração podem surgir em uma corda.



Uma extremidade fixa, outra livre

Duas extremidades livres

Duas extremidades fixas

https://gifsdefisica.com/2018/11/20/ondas-estacionarias-cordas/

Exercício

Uma corda de piano de 50 cm de comprimento e 5 g de massa é esticada com uma tensão de 400 N.

a) Qual é a frequência do modo fundamental de vibração?
b) Quanto harmônicos até 10 kHz a corda pode fazer soar?

Resposta:
a) $f_1 = 200 \text{ Hz}$
b) 51 harmônicos

Exercício

Uma corda de aço tem frequência fundamental de 200 Hz. Quando entrelaçada com um fio de cobre, sua massa específica linear é dobrada. Determine a nova frequência fundamental da corda, supondo a mesma tração.

Resposta:

141 Hz

Exercício

Um fio esticado de 60 cm de comprimento vibra com uma frequência de 30 Hz em seu modo fundamental. O fio tem massa de 30 g.

a) Qual é a velocidade de propagação da onda transversal no fio?
b) Determine a tração no fio.
c) Escreva a função de onda do 3º harmônico, supondo que a amplitude de seu antinodo seja de 3 cm e que $\delta_3 = 0$.

Resposta:
a) $36\ m/s$
b) 64,8 N
c) $y(x,t) = 3{,}0.10^{-2}\ \mathrm{sen}(5\pi x)\ \cos(180\pi t)$

Exercício

Uma corda de comprimento L presa nas extremidades x=0 e x=L oscila no 3º harmônico de uma onda estacionária. A corda está submetida a uma tensão de 96 N. O deslocamento transversal da corda é dado por:

$$y(x,t) = 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{sen}(6\pi t)\text{, em unidades do SI.}$$

a) Determine o comprimento L da corda
b) Determine a massa da corda
c) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre da onda estacionária
d) Se a corda oscilar no 5º harmônico, qual será o período de oscilação?

Resposta:
a) $6{,}0\ m$
b) 4,0 kg
c) $30\pi\ m/s$
d) 0,2 s