Segunda Quantização

1. Considere dois bósons não interagentes, π^+ e π^-, que carregam carga elétrica $+1$ e -1 (em unidades da carga elétrica do elétron). Estes bósons existem na natureza e são chamados de pions. Os operadores de aniquilação são a_p (para π^+) e $\bar{a}_p$ (para π^-), onde p é o momento da partícula. A Hamiltoniana do sistema é

$$H = E_0 + \sum_p \left[\epsilon(p) a^\dagger a + \epsilon(p) \bar{a}^\dagger \bar{a}\right] ,$$

onde $\epsilon(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$, em unidades naturais.

   (a) O operador carga elétrica pode ser escrito como

$$Q = Q_0 + \sum_p \left[q_+(p) a^\dagger a + q_-(p) \bar{a}^\dagger \bar{a}\right] .$$

   Determine os valores de Q_0 e das funções $q_\pm(p)$ que garantem que o vácuo não tenha carga elétrica e que os estados de uma partícula $|\pi^\pm\rangle$ possuam as cargas descritas acima;

   (b) Quanto valem $[H, Q]$ e $[U(t), Q]$, com $U(t)$ o operador de evolução temporal?

   (c) Considere agora um sistema preparado no instante $t = 0$ no estado $|\chi\rangle$, que contém algumas das partículas $\pi^\pm$. Tal sistema é autoestado da carga elétrica, $Q\,|\chi\rangle = q_\chi\,|\chi\rangle$. É verdade que depois da evolução temporal, o estado $|\chi(t)\rangle = U(t)\,|\chi\rangle$ ainda é autoestado de carga?

   (d) Duas partículas π^+ e π^- podem formar um estado ligado graças às interações eletromagnéticas. Suponha que esse estado possa ser escrito como

$$|\Phi_\ell\rangle = \sum_{pk} \psi_\ell(p, k) a_p^\dagger \bar{a}_k^\dagger\,|0\rangle ,$$

   onde $\psi_\ell(p, k)$ são oportunas funções de onda de momento angular ℓ. Calcule $\langle\Phi_\ell|\,H\,|\Phi_\ell\rangle$ e $\langle\Phi_\ell|\,Q\,|\Phi_\ell\rangle$.

2. Considere um sistema formado por um bóson e um férmion, descritos pela Hamiltoniana

$$H = E_0 + \frac{1}{2}\sum_p \left[\epsilon_b(p)(a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger) + \epsilon_f(p)(b_p^\dagger b_p - b_p b_p^\dagger)\right],$$

onde o operador a_p destrui o bóson e o operador b_p destrui o férmion.

(a) Calcule a densidade de energia do vácuo, definida como $\rho_0 \equiv \langle 0| H |0\rangle / V$, em termos de uma integral sobre p (para os apropriados fatores de volume V aparecer, aplique o limite $V \to \infty$);

(b) Calcule a integral do item antecedente considerando $\epsilon_{b,f}(p) = \sqrt{p^2 + m_{b,f}^2}$. Para calcular explicitamente a integral, considere um *cutoff* Λ, i.e. integre na região $0 \leq p \leq \Lambda$. A dependência de ρ_0 em Λ é sintoma de um dos maiores mistérios da física contemporânea: a energia do vácuo é "UV sensitive", no sentido que diverge conforme $\Lambda \to \infty$, de forma que não podemos esperar nossos cálculos serem válidos para energias arbitrariamente altas. Nos experimentos do dia a dia podemos medir apenas diferenças de energia e, portanto, este problema é irrelevante. Por outro lado, qualquer tipo de energia, inclusive a do vácuo, gera um campo gravitacional que possui efeitos físicos bem definidos (por exemplo, determina a taxa de expansão do universo). Medições experimentais apontam a um diferença entre o valor de ρ_0 medido e calculado pela teoria de 120 ordens de grandeza. Ainda não é conhecida a solução deste problema;

(c) Em teorias supersimétricas, a cada bóson é associado um férmion de massa igual, $m_b = m_f$. O que acontece com a integral neste caso?

3. Considere um sistema de gás de partículas quânticas em equilíbrio termodinâmico a uma temperatura T, dado pela hamiltoniana

$$\hat{H} = \sum_{i,s} E_i \hat{a}^{\dagger}_{i,s} \hat{a}_{i,s}, \tag{1}$$

onde $\hat{a}^{\dagger}$ e $\hat{a}$ são os operadores de criação e aniquilação e E_i são as energias acessíveis desse sistema. O índice i é relacionado aos estados energéticos e s indexa todos os outros números quânticos. A função de partição do sistema no ensemble grande canônico pode ser definida como sendo

$$Z = \mathrm{Tr}\left\{\exp\Big(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\Big)\right\}, \tag{2}$$

com $\beta = 1/(k_B T)$, onde k_B é a constante de Boltzmann,

$$\hat{N} = \sum_{i,s} a^{\dagger}_{i,s} \hat{a}_{i,s} \tag{3}$$

é o operador de número de partículas e μ é o potencial químico dessas partículas.

(a) Mostre que, utilizando a base de autoestados $|N_{i,s} \otimes \cdots\rangle$ do operador de número de ocupação $\hat{N}_{i,s} = a^{\dagger}_{i,s} a_{i,s}$,

$$\mathrm{Tr}\left\{\exp\Big(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\Big)\right\} = \prod_{i,s} \sum_{N_{i,s}} \left(\exp[\beta\,(\mu - E_i)]\right)^{N_{i,s}}, \tag{4}$$

em que $\hat{N}_{i,s}\,|N_{i,s}\rangle = N_{i,s}\,|N_{i,s}\rangle$.

(b) Mostre que para um gás de bósons,

$$Z = \prod_{i,s} \left\{\frac{1}{1 - \exp[\beta\,(\mu - E_i)]}\right\}, \tag{5}$$

e para um gás de férmions

$$Z = \prod_{i,s} \left\{1 + \exp[\beta(\mu - E_j)]\right\}. \tag{6}$$

O grande potencial Ω é definido como

$$\Omega = -PV, \tag{7}$$

em que P é a pressão do sistema e V o volume. A diferencial $\mathrm{d}\Omega$ é dada por

$$\mathrm{d}\Omega = -P\mathrm{d}V + S\mathrm{d}T - N\mathrm{d}\mu, \tag{8}$$

em que S é entropia, T é temperatura e N é o número médio de partículas. Isso implica que

$$P = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} = -\frac{\Omega}{V}, \qquad S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu}, \qquad N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V}. \tag{9}$$

No limite termodinâmico do ensemble grande canônico,

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\ln Z. \tag{10}$$

(c) Mostre que é possível escrever

$$\Omega = \frac{\theta g}{\beta}\sum_i \ln\left(1 + \theta\exp[\beta\left(\mu - E_i\right)]\right), \tag{11}$$

onde $\theta = 1$ resulta na expressão para férmions e $\theta = -1$ resulta na expressão para bósons e g é a degenerescência dos estados.

(d) Definindo

$$h_{\theta,i} = \frac{1}{\exp[\beta(E_i - \mu)] + \theta}, \tag{12}$$

mostre que é possível escrever

$$N = \sum_i g h_{\theta,i}, \tag{13}$$

e a energia interna do sistema $U = -PV + TS + \mu N$ como

$$U = \sum_i g E_i h_{\theta,i}, \tag{14}$$

onde $\theta = 1$ resulta na expressão para férmions e $\theta = -1$ resulta na expressão para bósons, g é a degenerescência dos estados.