

3ª Avaliação (100 minutos)

NOME: _____ Número USP: _____

1) Um corpo de massa **50 g** está preso a uma mola e oscila livremente com uma frequência angular de **20 rad/s**. Este oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é **$\rho = 0,25 \text{ kg/s}$** . Nestas condições, o oscilador é mantido em regime estacionário devido a uma força externa **$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$** , onde **$F_0 = 0,25 \text{ N}$** e **$\omega = 20 \text{ rad/s}$** . Para esta última condição:

a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento explicitando os valores numéricos dos coeficientes γ , ω_0 e F_0/m presentes na equação, indicando também suas respectivas dimensões (unidades), (2,0)

b) Escreva $x(t)$ que representa a posição do centro de massa do corpo para o regime estacionário. (2,0)

c) Em que instante a elongação é máxima? (2,0)

Suponha que a força externa seja subitamente desligada, em um instante em que a elongação é máxima. Recomece a contagem do tempo nesse instante ($t=0$).

d) Escreva a equação diferencial que representa o movimento nessa nova situação. (1,0)

e) A partir de considerações físicas, determine a condição inicial correspondente a essa nova situação. (1,0)

f) Escreva $x(t)$ que representa a posição do centro de massa do corpo para o novo regime amortecido (2,0).

GABARITO - E3 - Fís2 - T2

$$\left. \begin{array}{l} m = 0,05 \text{ kg} \\ \omega_0 = 20 \text{ rad/s} \end{array} \right\} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = 400 \cdot 0,05 = 20 \text{ N/m} \quad F(t) = 0,25 \cos(20t)$$

$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$

$$p = 0,25 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \Rightarrow \gamma = \frac{p}{m} = \frac{0,25}{0,05} = 5 \frac{1}{\text{s}}$$

a) $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \text{ com } \gamma = 5 \frac{1}{\text{s}}, \omega_0 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \frac{F_0}{m} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Solução estacionária: $x(t) = A(\omega) \cdot \cos[\omega t + \delta(\omega)]$

$$A^2(\omega) = \frac{F_0^2}{m^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right]} = \frac{F_0^2}{m^2 \gamma^2 \omega^2} \Rightarrow A = \frac{0,25}{0,05 \cdot 5 \cdot 20} = 0,05 \text{ m}$$

$\omega = \omega_0 = 20$

$$\delta(\omega) = -\arctg\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \delta(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Logo, $\boxed{x(t) = 0,05 \cdot \cos(20t - \pi/2)}$ ou $\boxed{x(t) = 0,05 \cdot \sin(20t)}$

c) A elongação máxima ocorre quando $x = A = 0,05 \text{ m}$:

$$0,05 = 0,05 \cdot \cos(20t - \pi/2)$$

$$\cos\left(20t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$20t - \frac{\pi}{2} = 0 + 2n\pi \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{40} + 2n\pi}, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots$$

d) $F_0 = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, com $\gamma = 5 \frac{1}{\text{s}}$ e $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$

e) O novo movimento inicia quando a elongação da mola é máxima.

Logo, $x(0) = 0,05 \text{ m}$. Este momento corresponde à inversão do sentido do movimento, de modo que a velocidade é nula,

ou seja, $\dot{x}(0) = 0$.

f) Trata-se de um amortecimento subcrítico, já que $\gamma < 2\omega_0$. Logo, $x(t)$ será da forma:

$$x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \delta_1), \text{ onde } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{20^2 - \frac{5^2}{4}} \approx 19,84 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x}(t) = -A \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A e^{-\gamma t/2} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1)$$

Vamos determinar as constantes arbitrárias A e δ_1 impondo as condições iniciais.

$$x(0) = 0$$

$$A \frac{\gamma}{2} \cos(\delta_1) + A \omega_1 \sin(\delta_1) = 0$$

$$\tan(\delta_1) = -\frac{\gamma}{2\omega_1} = -\frac{5}{2 \times 19,84} \approx -0,126$$

$$\delta_1 = \arctan(-0,126) \approx -0,125 \text{ rad} \\ (-7,18^\circ)$$

$$x(0) = 0,05$$

$$A \cos(\delta_1) = 0,05$$

$$A = \frac{0,05}{\cos(-0,125)} \approx \frac{0,05}{0,9992} \approx 0,05 \text{ m}$$

Logo,

$$x(t) = 0,05 e^{-2,5t} \cos(19,84t - 0,125)$$

Observa-se que a constante de fase é um ângulo pequeno ($\delta_1 \approx 0$), e que $A \approx x(0)$. Por isso, a resposta abaixo também será considerada como correta:

$$x(t) = 0,05 e^{-2,5t} \cos(19,84t)$$