Física II (4302112) Turma T2 - noturno

Oscilações Forçadas

Profa. Luciana V. Rizzo

Oscilações forçadas

Ocorrem quando um corpo oscilante sofre a influência de uma força externa também oscilante

$$F_{ext} = F_0 cos\omega t$$

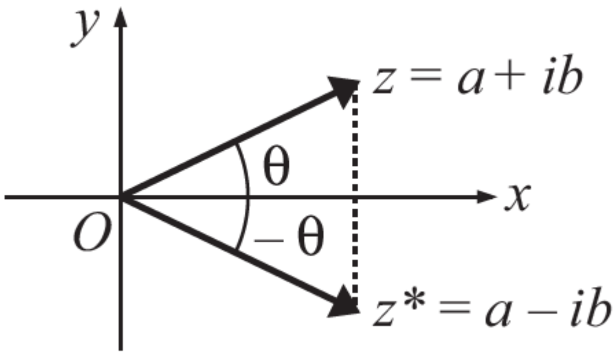
O sistema oscila com a frequência da força externa (ω), e não com a frequência natural do sistema (ω_o).

Recordando: números complexos

$$z = a + ib$$

Complexo conjugado (z*):

$$z^* = a - ib$$



Identidades que podem ser úteis:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

$$|z|^2 \equiv z^* z$$

Quociente entre z_1 e z_2: multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} . \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} =$$

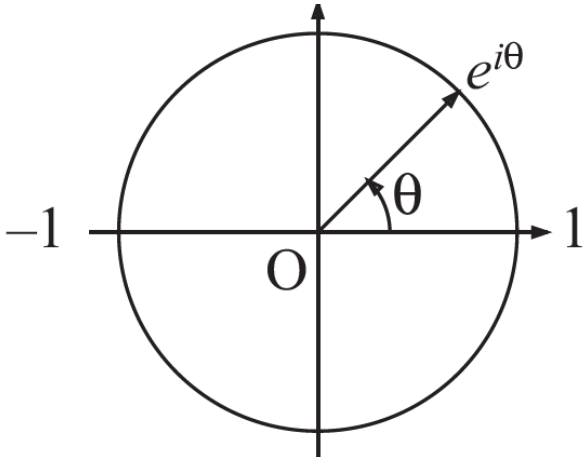
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

A fórmula de Euler

Deduzindo a fórmula de Euler utilizando expansões de MacLaurin: https://youtu.be/_0qvqlk9WvA

Fórmula de Euler: representação trigonométrica de um número complexo de módulo 1:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$



Círculo unitário

$r = 1$

$|z| = 1$

Diferentes representações para um número complexo z qualquer:

$$z = a + ib$$

$$z = |z|\cos\theta + i\,|z|\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Oscilador amortecido e forçado

Equação de movimento

Oscilador amortecido:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + Kx = 0$$

Oscilador amortecido e forçado:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + Kx = F(t)$$

Força externa, variável no tempo

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

onde $\gamma = \frac{\rho}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

EDO de 2ª ordem, linear, não homogênea, a coeficientes constantes

Seja $x_h(t)$ a solução geral da EDO homogênea, isto é: $\ddot{x_h} + \gamma\dot{x_h} + \omega_0^2 x_h = 0$.

Se $x_p(t)$ é uma solução da EDO não-homogênea, então $x_h(t) + x_p(t)$ é a solução geral da EDO não-homogênea. Isso só funciona porque a EDO é linear (a derivada da soma é a soma das derivadas).

$x_h(t)$: Solução geral da EDO homogênea, com 2 constantes arbitrárias (determinadas pelas condições iniciais). Caráter transiente.

$x_p(t)$: Solução particular da EDO não-homogênea. Não tem constantes arbitrárias. Caráter estacionário.

$x_h(t) + x_p(t)$: Solução geral da EDO não-homogênea

A solução da EDO homogênea, $x_h(t)$, nós já conhecemos! (oscilador amortecido)

- Supercrítico ($\gamma > 2\omega_0$) $$x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(ae^{\beta t} + be^{-\beta t})$$
- Crítico ($\gamma = 2\omega_0$) $$x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$
- Subcrítico ($\gamma < 2\omega_0$) $$x_h(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}cos(\omega t + \delta)$$

Obtendo a solução particular $x_p(t)$ (solução estacionária)

Vamos supor que a força externa é do tipo $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.
(isso não é uma grande limitação, pois utilizando análise de Fourier é possível escrever uma grande variedade de funções como uma soma de senos e cossenos.)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m}$$

$$+$$

$$i\ddot{y} + i\gamma \dot{y} + i\omega_0^2 y = \frac{iF_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{m}$$

A solução dessa EDO será uma exponencial com expoente complexo. Para determina-la, precisamos converter essa EDO de variável real (x) em uma EDO de variável complexa (z=x+iy).

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

Fórmula de Euler:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$$

Solução possível:

$$z = Ae^{i(\omega t + \delta)}$$

$$\dot{z} = Ai\omega e^{i(\omega t + \delta)}$$

$$\ddot{z} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \delta)}$$

Obtendo a solução particular $x_p(t)$ (solução estacionária)

Fórmula de Euler:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Substituindo $z, \dot{z}$ e $\ddot{z}$ na EDO (Eq. 1), vem:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$A\cancel{e^{i(\omega t}}^{+\delta)}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$Ae^{i\delta}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}$$

$$Ae^{i\delta} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Para determinar a solução z(t) que estamos procurando, precisamos determinar as constantes A e δ em função das características físicas do sistema (F_o, m, ω, ω_0, γ).

Aqui temos a igualdade de dois números complexos. Vamos igualar suas partes reais e suas partes imaginárias.

$$|z|^2 \equiv z * z$$

Obtendo a solução particular $x_p(t)$ (solução estacionária)

Multiplicamos numerador e denominador pelo complexo conjugado

$$A\cos\delta + iA\,\mathrm{sen}\,\delta = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

$$\underbrace{A\cos\delta}_{\text{Re}} + i\underbrace{A\,\mathrm{sen}\,\delta}_{\text{Im}} = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

Aqui temos a igualdade de dois números complexos. Vamos igualar suas partes reais e suas partes imaginárias.

Igualando as partes reais:

$$A\cos\delta = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

Igualando as partes imaginárias:

$$A\,\mathrm{sen}\,\delta = \frac{-F_0\gamma\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \qquad \text{(Eq. 3)}$$

Elevar ao quadrado e somar as Eq. 2 e 3:

$$A^2 = \frac{F_0^2\cancel{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}}$$

(Eq. 4)

Obtendo a solução particular $x_p(t)$ (solução estacionária)

$$\boxed{A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}} \quad \text{(Eq. 4)}$$

Dividindo a Eq. 3 pela Eq. 2, vem:

$$\tan\delta = \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)} \quad \text{(Eq. 5)}$$

Logo, a função abaixo é solução da EDO não homogênea (Eq. 1)

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \delta)}$$

onde A e δ não são arbitrários, e sim determinados pelas características físicas do sistema (Eq. 4 e 5).

Vamos tomar a parte real de z(t) para obter a solução particular da EDO não homogênea:

$$\boxed{x_p(t) = Re[z] = A\cos(\omega t + \delta)}$$

Oscilador amortecido e forçado
Solução geral

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$ onde $\gamma = \frac{\rho}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

Solução geral da EDO não-homogênea:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

Transiente

Estacionária

Solução da EDO homogênea (oscilador amortecido):

- Supercrítico ($\gamma > 2\omega_0$): $x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(ae^{\beta t} + be^{-\beta t})$
- Crítico ($\gamma = 2\omega_0$): $x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$
- Subcrítico ($\gamma < 2\omega_0$): $x_h(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}cos(\omega_a t + \delta)$

(as constantes a, b, A, δ são determinadas pelas condições iniciais)

Solução particular da EDO não-homogênea:

$$x_p(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

$$\delta = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

(as constantes A, δ são determinadas por caraterísticas físicas do sistema)

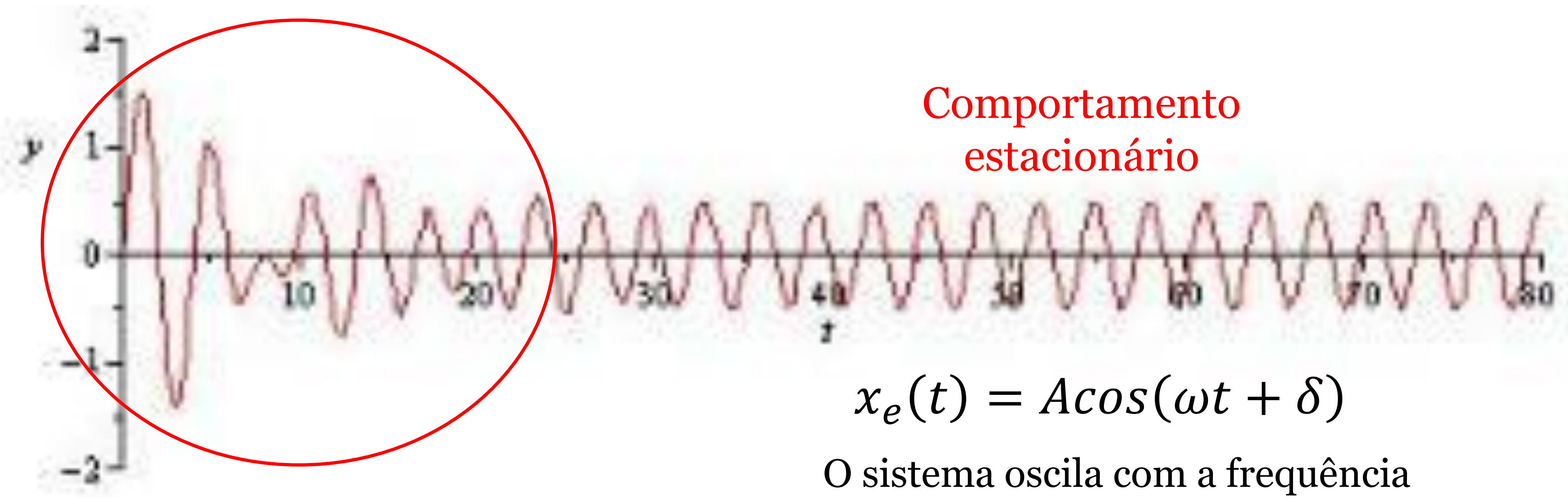
Oscilações forçadas

Solução transiente

+

Solução estacionária

Comportamento transiente
(importante somente no
início do movimento)

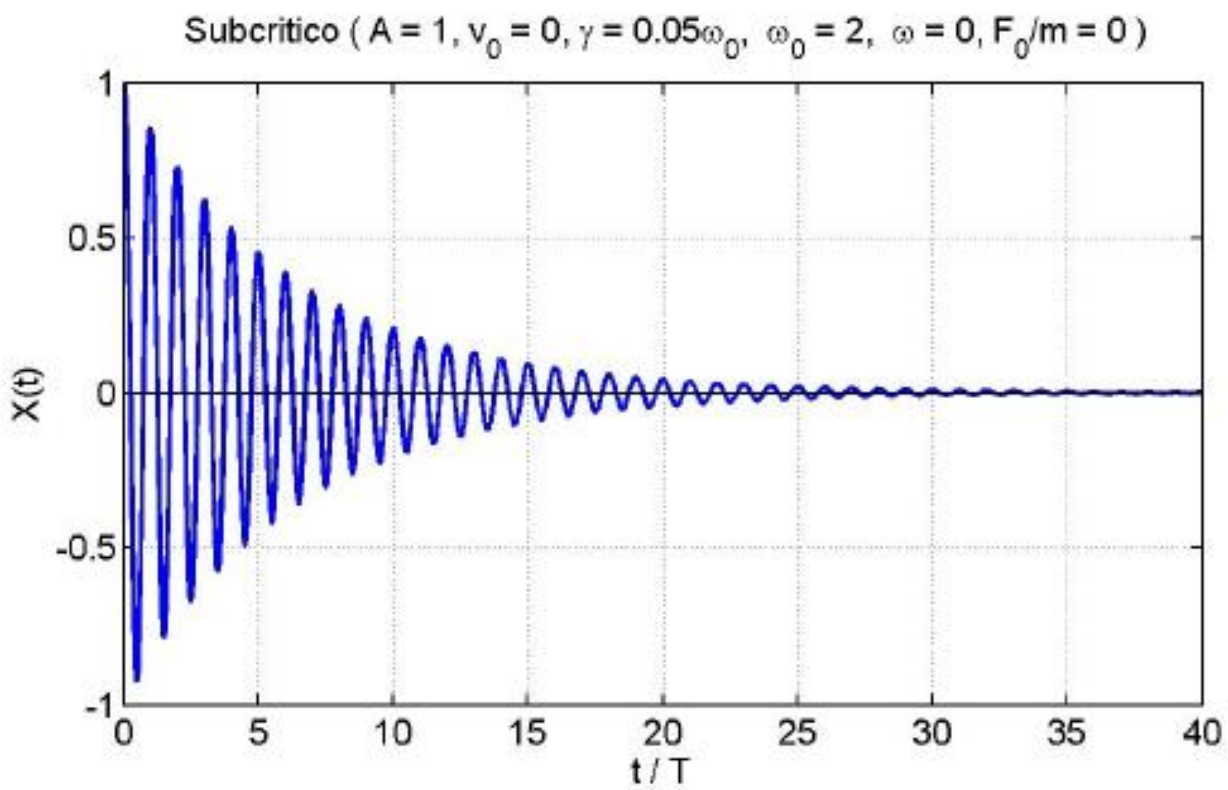


Comportamento
estacionário

$$x_e(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

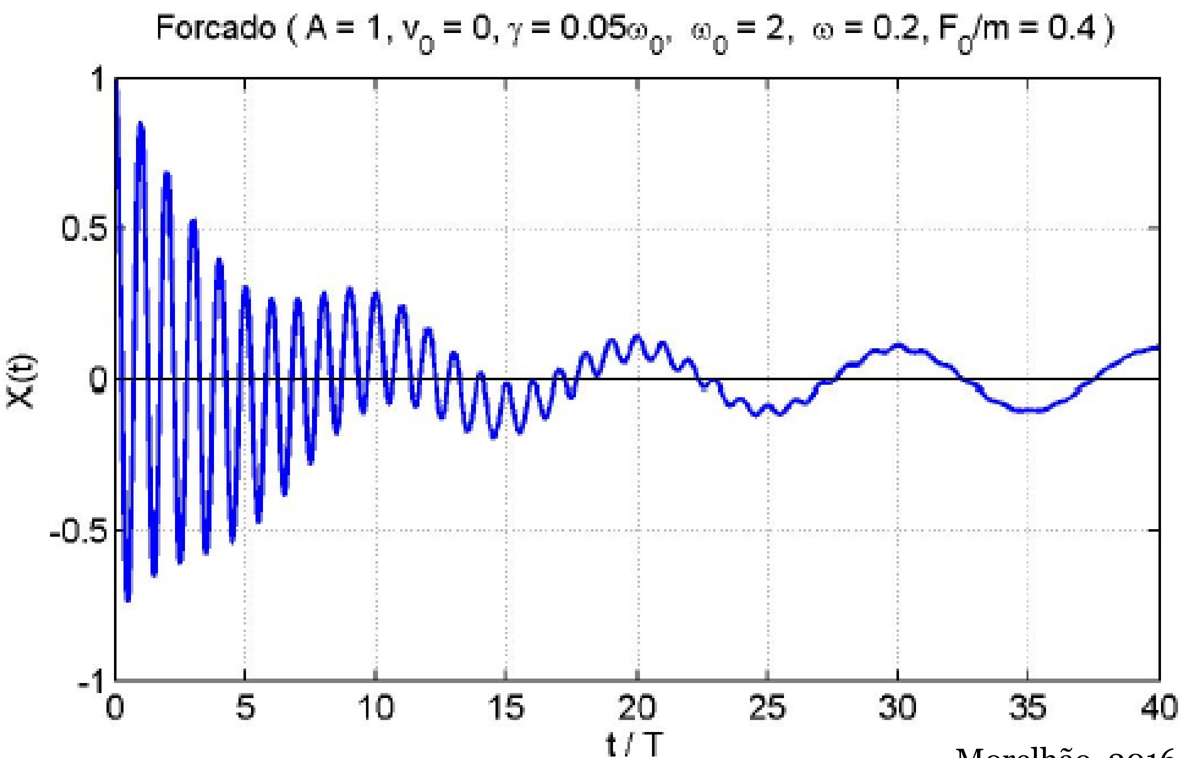
O sistema oscila com a frequência
da força externa (ω), não com a
frequência natural (ω_0).

Exemplo 1. Sistema subamortecido $\gamma = 0,05\omega_0$, sem força aplicada, $F_0 = 0$. Mola com $k = 1\,\mathrm{N/m}$, massa $m = 250\,\mathrm{g}$, implicando em $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$. Sendo o deslocamento inicial de $1\,\mathrm{m}$ e velocidade nula, as condições iniciais para a equação (5) são $A_0' = 1\,\mathrm{m}$ e $v_0' = 0$.



Morelhão, 2016

Exemplo 2. Mesmo sistema do exemplo 1, mas com força $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ onde $\Omega = \omega_0/10$ e $F_0 = 0,1\,\mathrm{N}$. Para os valores dados, $A(\Omega) = 0,101\,\mathrm{m}$ e $\Phi(\Omega) \simeq 0$, as condições iniciais são $A_0' = A_0 - A(\Omega)\cos(\Phi) \simeq 0,899\,\mathrm{m}$ e $v_0' = v_0 + \Omega A(\Omega)\sin(\Phi) \simeq 0$.



Morelhão, 2016

Oscilações amortecidas e forçadas

Interpretando a solução estacionária:

$$x_p(t) = Acos(\omega t + \delta)$$

O sistema oscila com a frequência da força externa (ω), não com a frequência natural (ω_0).

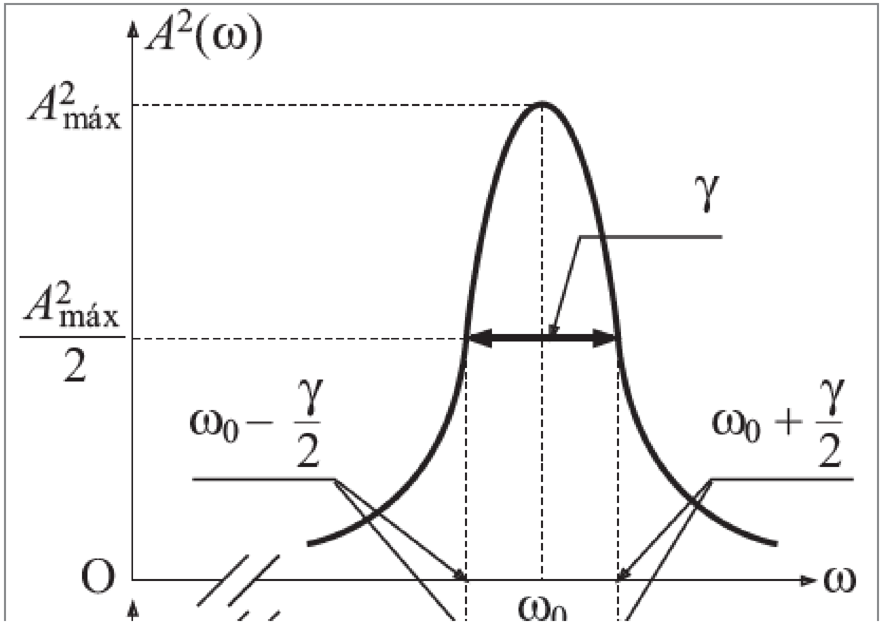
$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

A amplitude do movimento estacionário varia com a frequência da força externa (ω).

A máxima amplitude ocorre quando $\omega = \omega_0$

Se ω for muito diferente de ω_0, o denominador será grande, e a amplitude do movimento será pequena.

Se não houver amortecimento ($\gamma = 0$), a amplitude do movimento diverge quando $\omega = \omega_0$.



Oscilações amortecidas e forçadas

Interpretando a solução estacionária:

$$x_p(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

O sistema oscila com a frequência da força externa (ω), não com a frequência natural (ω_0).

$$\delta = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

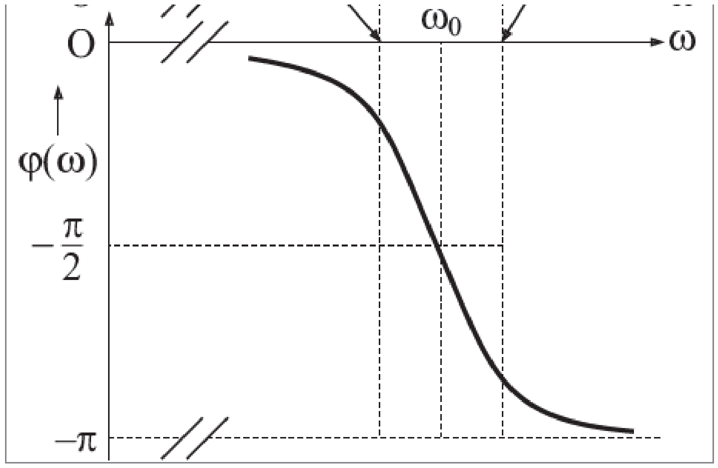
Há uma diferença de fase entre o movimento de oscilação e a perturbação da força externa.

A fase de uma oscilação forçada está sempre atrasada em relação à fase da força externa. (por isso o sinal negativo)

Quando $\omega \to \omega_0, \quad \delta \to -\frac{\pi}{2}$

Se $\omega >> \omega_0$, o denominador será grande e negativo, de modo que $\delta \to -\pi$.

Se $\omega << \omega_0$, o denominador será grande e positivo, de modo que $\delta \to 0$.



Ressonância

Ressonância

Acontece quando a frequência da força externa (ω) se aproxima da frequência natural do sistema (ω_o).

- Frequência de ressonância: valor característico de ω (frequência da força externa) para o qual a amplitude da oscilação forçada é máxima.

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

Frequência de ressonância:

$\omega \approx \omega_o$.

Se $\omega \rightarrow \omega_o$, o denominador de A vai a zero se não houver amortecimento, de modo que $A \rightarrow \infty$. Porém, na prática sempre existe algum amortecimento, de modo que a amplitude será grande mas finita.

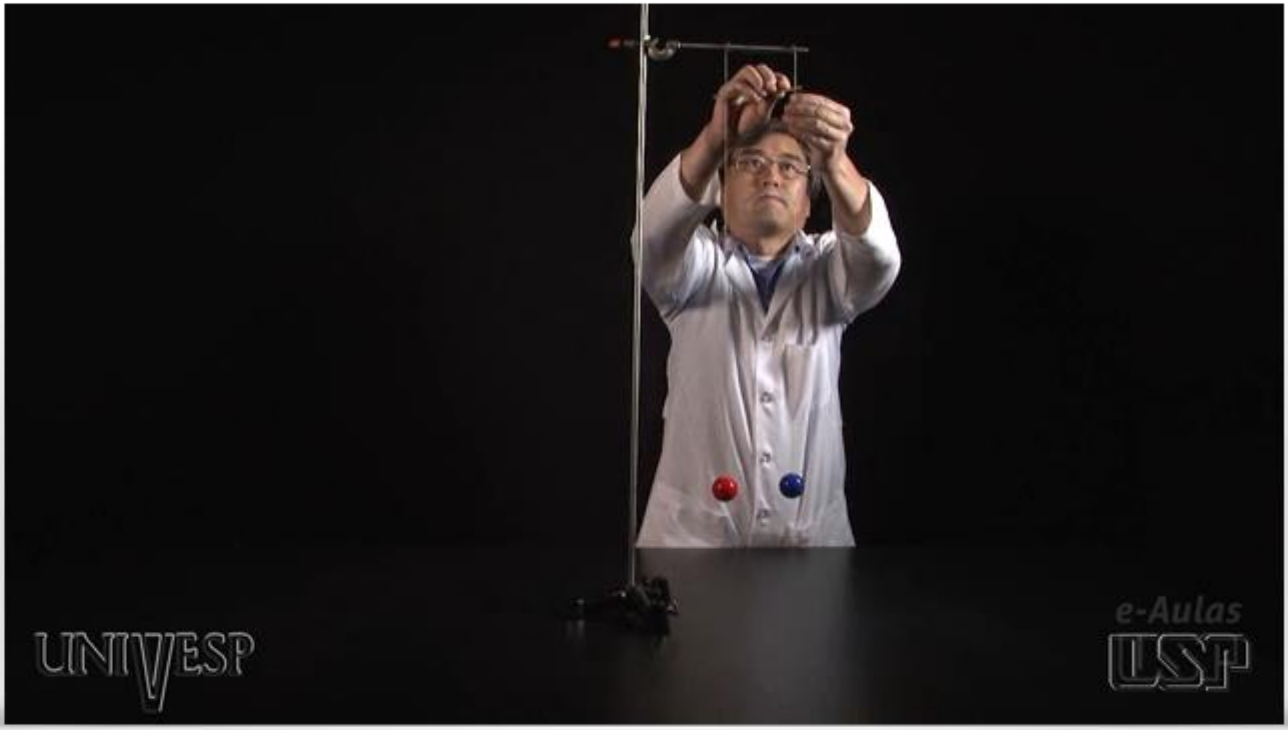
Ressonância

Exemplo: Ponte Tacoma (Washington, 1940)

https://www.youtube.com/watch?v=mfQk6ac4res

Ressonância: pêndulos acoplados

- Pêndulos idênticos acoplados: transferência de energia por meio de oscilações (ressonância)



http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6524

Ressonância

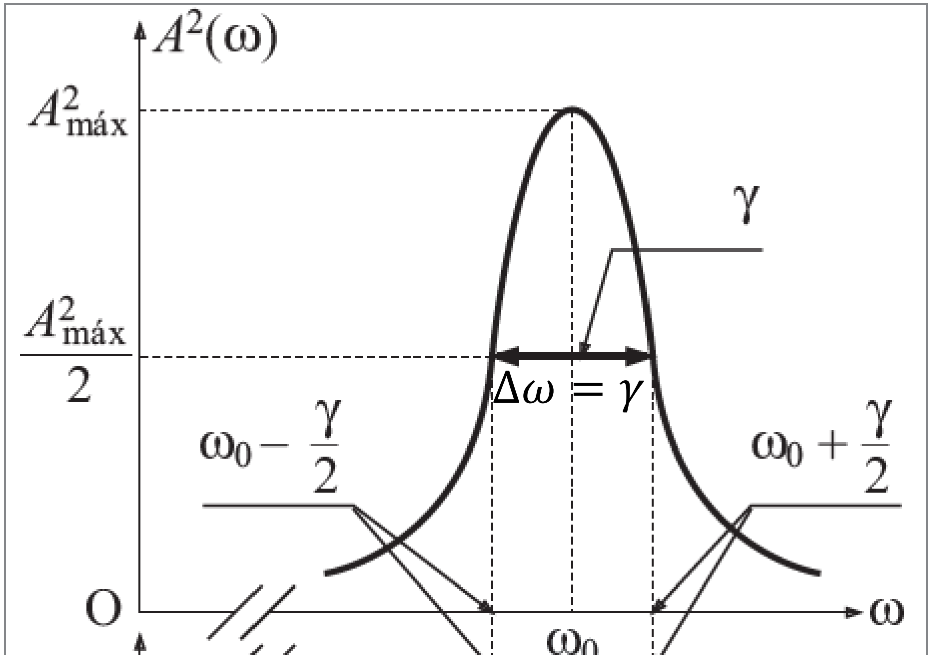
Quando $\omega = \omega_0$: $$A^2_{max} = \left(\frac{F_0}{m\gamma\omega}\right)^2$$

A meia altura da curva de ressonância, $A^2(\omega) = \frac{1}{2}A^2_{max}$ ocorre quando $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$.

Largura a meia altura:

$$\Delta\omega = \gamma$$

Curva de ressonância

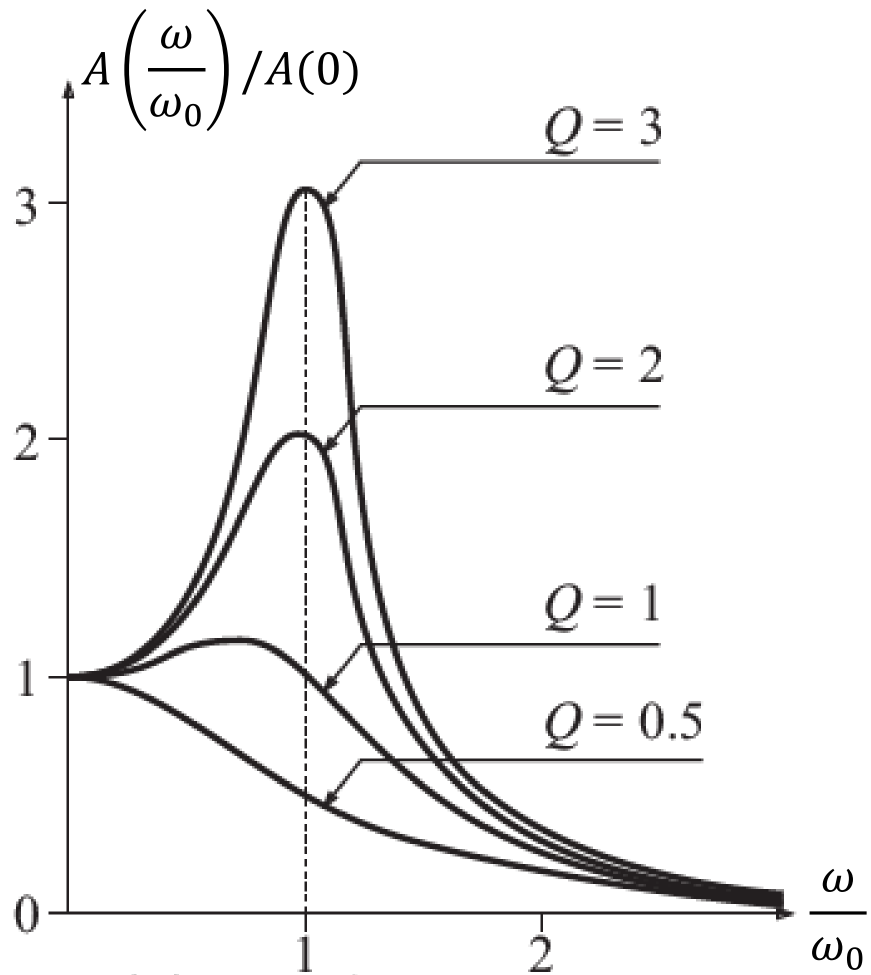


É possível escrever $\Delta\omega$ em função de parâmetros do movimento amortecido subcrítico:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau_d}$$ τ_d : tempo de decaimento

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$ Q : fator de mérito

Ressonância



Q: fator de mérito

Q>>1: amortecimento subcrítico fraco ($\gamma \ll \omega_0$)

Quando Q diminui, a ressonância se torna cada vez menos acentuada, até desaparecer completamente.

Exercício 1

Um corpo de 2,0 kg oscila preso a uma mola que uma constante de força de 400 N/m. A constante de amortecimento linear é b=2,0 kg/s. O sistema é excitado por uma força senoidal de valor máximo igual a 10,0 N e frequência angular $\omega_e = 10\,rad/s$.

a) Determine a amplitude das oscilações, considerando que o sistema está operando em regime estacionário
b) Se a frequência de excitação varia, em que frequência ocorrerá ressonância?
c) Qual é a amplitude de oscilação na ressonância?
d) Qual é a largura da curva de ressonância $\Delta\omega$?

Exercício 1

Um corpo de 2,0 kg oscila preso a uma mola que uma constante de força de 400 N/m. A constante de amortecimento linear é b=2,0 kg/s. O sistema é excitado por uma força senoidal de valor máximo igual a 10,0 N e frequência angular $\omega_e = 10\,rad/s$.

a) Determine a amplitude das oscilações, considerando que o sistema está operando em regime estacionário 4,98 cm

b) Se a frequência de excitação varia, em que frequência ocorrerá ressonância? 14,1 rad/s

c) Qual é a amplitude de oscilação na ressonância? 35,4 cm

d) Qual é a largura da curva de ressonância $\Delta\omega$?

1,0 rad/s

Exercício 2

Um bloco de 2,0 kg é preso a uma das extremidades de uma mola com constante elástica de 350 N/m e forçado a oscilar por uma força $F = 15\cos(\omega_e t)$, dada em N, com $\omega_e = 20\, rad/s$. A constante de amortecimento é b = 10 kg/s. Em t=0 o bloco está em repouso com a mola relaxada.

a) Determine o tipo de amortecimento a que o oscilador está submetido.
b) Determine o tempo de decaimento (τ_d) do oscilador amortecido
c) Determine a amplitude e a fase do movimento para $t > 10\tau_d$
d) Escreva a função horária x(t), incluindo as componentes transiente e estacionária
e) Repita o cálculo do item c) para $\omega_e = 13{,}2\, rad/s$

Exercício 2

Um bloco de 2,0 kg é preso a uma das extremidades de uma mola com constante elástica de 350 N/m e forçado a oscilar por uma força $F = 15\cos(\omega_e t)$, dada em N, com $\omega_e = 20\, rad/s$. A constante de amortecimento é b = 10 kg/s. Em t=0 o bloco está em repouso com a mola relaxada.

a) Determine o tipo de amortecimento a que o oscilador está submetido. subcrítico

b) Determine o tempo de decaimento (τ_d) do oscilador amortecido 0,2 s

c) Determine a amplitude e a fase do movimento para $t > 10\tau_d$ A=2,02 cm ; δ = -2,7 rad

d) Escreva a função horária x(t), incluindo as componentes transiente e estacionária

e) Repita o cálculo do item c) para $\omega_e = 13{,}2\, rad/s$

A=7,68 cm ; δ = -π /2 rad

Balanço de energia

Balanço de energia

Como varia a energia mecânica em um oscilador amortecido e forçado em regime estacionário?

Equação de movimento:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + Kx = F(t) \longrightarrow m\ddot{x} + Kx = -\rho\dot{x} + F(t)$$

Energia mecânica:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{K}{2}x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{x}\ddot{x} + \frac{K}{\cancel{2}}\cancel{2}x\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + \mathrm{K}x) \rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = \dot{x}\mathrm{F(t)} - \rho\dot{x}^2}$$

Potência fornecida pela força externa $P(t) = \dot{x}F(t)$

Potência dissipada pela força de atrito

A taxa de variação da energia mecânica é resultado do balanço entre a potência da força externa e a potência dissipada pelo atrito.

Balanço de energia

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + \mathrm{K}x)$$

Vamos substituir a solução estacionária na equação acima:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega x$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = m\omega_0^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}[m(-\omega^2 x) + m\omega_0^2 x] = m(\omega_0^2 - \omega^2)\dot{x}x$$

$$\frac{dE}{dt} = m(\omega^2 - \omega_0^2)\omega A^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) \,.\, \cos(\omega t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sen}[2(\omega t + \delta]$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}mA^2\omega(\omega^2 - \omega_0^2)\,\mathrm{sen}[2(\omega t + \delta)]$$

Balanço de energia

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} mA^2\omega(\omega^2 - \omega_0^2)\,\mathrm{sen}[2(\omega t + \delta)]$$

A taxa de variação da energia mecânica varia senoidalmente ao longo de cada ciclo.

Vamos tomar o valor médio de dE/dt ao longo de um ciclo (de t=0 a t=T):

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{\frac{1}{2} mA^2\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}{T} \int_0^T \mathrm{sen}[2(\omega t + \delta)]\, dt$$

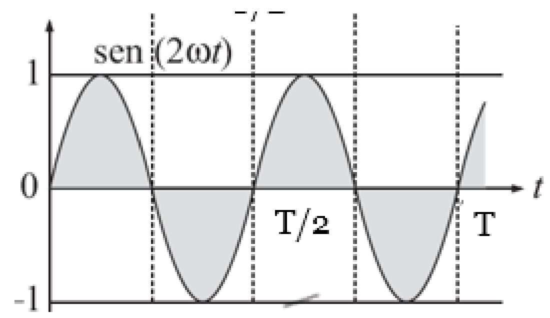
Valor médio de uma função:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

O valor médio da função sen(2θ) em um período é zero.

Logo:

$$\boxed{\frac{d\bar{E}}{dt} = 0}$$



Balanço de energia

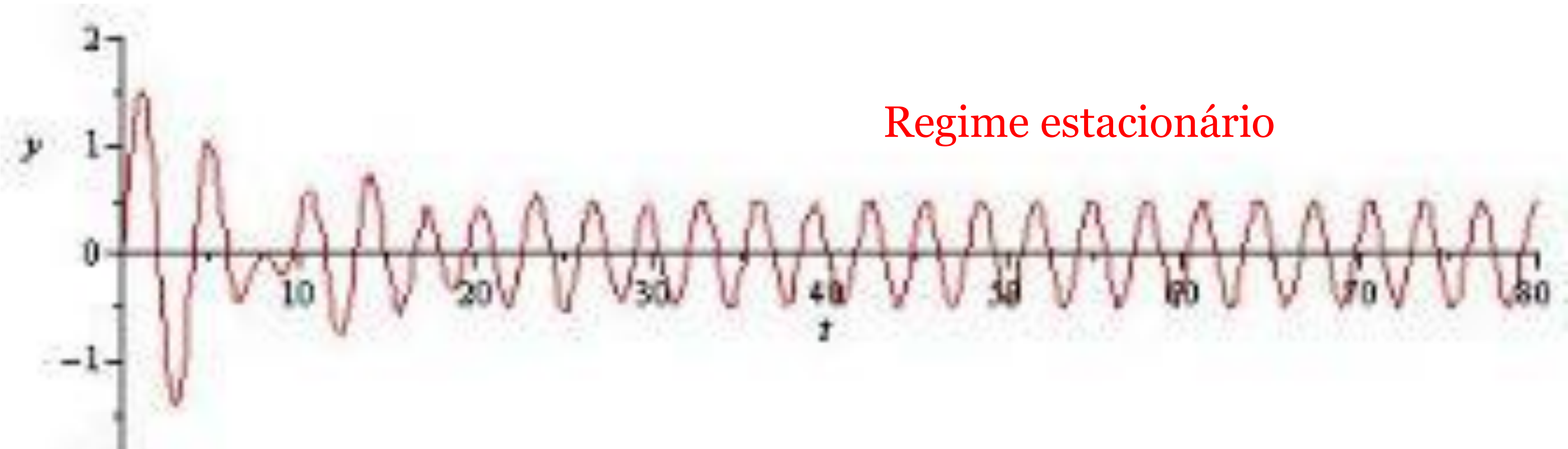
$$\boxed{\frac{d\bar{E}}{dt} = 0}$$

Potência média fornecida pela força externa

Potência média dissipada pela força de atrito

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{dt}} = \overline{P(\mathrm{t})} - \rho\overline{\dot{x}^2} \longrightarrow \boxed{\overline{P(\mathrm{t})} = \rho\overline{\dot{x}^2}}$$

No regime estacionário, a força externa transfere energia à mesma taxa em que ela é dissipada pela força de atrito, em média.



Regime estacionário

Potência média transferida pela força externa

$$\overline{P(\mathrm{t})} = \rho\overline{\dot{x}^2}$$

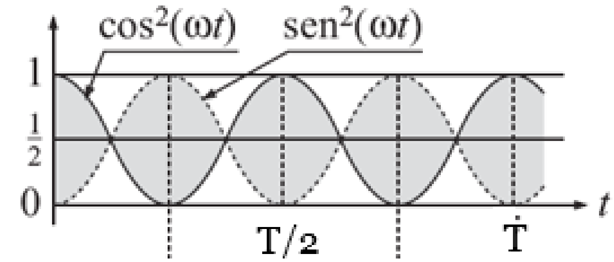
$$\dot{x} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

$$\dot{x}^2 = A^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \delta)$$

$$\overline{P(\mathrm{t})} = m\gamma\overline{\dot{x}^2}$$

$$\overline{\dot{x}^2} = A^2\omega^2\,\overline{\mathrm{sen}^2(\omega t + \delta)}$$

$$= \frac{1}{2}$$



$$\overline{P(\mathrm{t})} = \frac{1}{2}m\gamma A^2\omega^2$$

No regime estacionário:

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

$$\boxed{\overline{P(\mathrm{t})} = \frac{F_0^2\gamma\omega^2}{2m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}}$$

A potência média da força externa é maior quando $\omega=\omega_0$ (ressonância). Ou seja, a energia proporcionada pela força externa é transferida mais rapidamente na ressonância.