MAP 0313 - 2022 2º Semestre - IME USP
Equações de Diferença - O básico

1 Noções básicas sobre Equações de diferença

Nestas notas o conjunto dos naturais representa-se $\mathbb{N}$, admite-se que $0 \in \mathbb{N}$ e usa-se a notação $\mathbb{N}^* \doteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Considera-se $\mathbb{R}^p$ munido da estrutura de espaço euclidiano induzida pelo produto interno usual, se $x = (x_1, \dots, x_p)$ e $y = (y_1, \dots, y_p)$, então $x \cdot y \doteq \sum_{j=1}^p x_j y_j$.

O conjunto das sequências de números reais (resp. complexos) será representado por $S(\mathbb{R})$ (resp. $S(\mathbb{C})$).

É imediato verificar que, com as operações usuais de adição e de multiplicação de sequências por um escalar λ , $S(\mathbb{R})$ (resp. $S(\mathbb{C})$) é um espaço vetorial real (resp. complexo).

Definição 1. *Seja $m \in \mathbb{N}^*$ e considere $A \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Uma equação de diferenças é uma equação funcional*

$$f(k, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

em que $f : \mathbb{N} \times A \rightarrow \mathbb{R}$.

Se esta equação pode ser escrita como

$$u_{k+m} = g(k, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

em que $g : \mathbb{N} \times B \rightarrow \mathbb{R}$, para um conjunto $B \subset \mathbb{R}^m$, diz-se que esta equação está na forma *normal*.

Exemplo 1 $(k+1)u_{k+1}^2 + u_{k+1}u_k - u_k + 1 = 0$ É A EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS DEFINIDA POR $f(k, x, y) \doteq (k+1)y^2 + xy - x + 1, \quad \forall (k, x, y) \in \times \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2 A FUNÇÃO $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINIDA POR $f(x, y) \doteq x + y$ DEFINE A EQUAÇÃO DE FIBONACCI $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$.

Exemplo 3 SE $p \in \mathbb{N}^*$ E $s_p(k) \doteq \sum_{t=0}^k t^p$, NOTE QUE A SEQUÊNCIA $u_k \doteq s_p(k)$ RESOLVE A EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

$$u_{k+1} = u_k + (k+1)^p.$$

Exemplo 4 CONSIDERE $N > 0$. PARA OBTER APROXIMAÇÕES DE $\sqrt{N}$ OS ANTIGOS BABILÔNICOS USAVAM O SEGUINTE ALGORITMO:

- (A) COMEÇAVAM COM A APROXIMAÇÃO INICIAL $x_0 \doteq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$;
- (B) PARA $k \in \mathbb{N}$, A PARTIR DA APROXIMAÇÃO x_k , CONSIDERAVAM UMA “NOVA APROXIMAÇÃO” x_{k+1} IGUAL À MÉDIA ARITMÉTICA ENTRE x_k E $\frac{N}{x_k}$, OU SEJA, $x_{k+1} \doteq \frac{x_k + \frac{N}{x_k}}{2}$.

ISSO CORRESPONDE A TOMAR A SEQUÊNCIA (x_k) QUE TEM $x_0 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ E RESOLVE A EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, DADA POR $\varphi(x) \doteq \frac{x^2 + N}{2x}$, $x > 0$.

Veja que as equações de diferença dos exemplos 2, 3 e 4 estão na forma normal, o exemplo 1 apresenta uma equação de diferenças que não está nessa forma.

2 Problema de Valor inicial

Uma equação de diferenças, mesmo se estiver na forma normal, não tem, em geral, solução única, por exemplo na equação $u_{k+1} = u_k + 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$, a sequência $u^a = (u_k^a)$ em que $u_k^a = k + a$ é solução.

Um modo usual de individualizar a solução de uma equação de diferenças é estabelecer a priori os termos iniciais da sequência procurada, como foi feito no exemplo (4), em que foi determinado que o primeiro elemento da sequência procurada é igual a $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

Esse tipo de problema é chamado *problema de valor inicial* que, de modo preciso, é o seguinte:

Problema de Valor inicial

O problema de, dados os números reais $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$, determinar uma sequência $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ que resolve a equação

$$f(k, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e satisfaz $u_j = \beta_j$, para todo $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, chama-se *problema de valor inicial*.

O resultado a seguir, de demonstração trivial, é fundamental e ressalta a importância das equações na forma normal.

Fato 1. Teorema de Existência e Unicidade

Sejam $m \in \mathbb{N}^*$, $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{k+m} = g(k, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ u_j = \beta_j, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}. \end{cases} \quad (3)$$

tem uma, e apenas uma solução.

Demonstração. Considere a seguinte sequência $v = (v_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, que será construída por indução matemática.

- (i) Se $0 \leq k \leq m-1$ então $v_k \doteq \beta_k$.
- (ii) Se, para algum $k \in \mathbb{N}$, conhecem-se $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m-1}$ (note que para $k=0$ isso é conhecido, por (i)) então

$$v_{k+m} \doteq g(k, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m-1}).$$

Claro que a sequência v assim definida resolve (3).

A unicidade é feita, também de modo imediato, por indução. Os detalhes dessa parte da prova são deixados a cargo do leitor. $\square$

Note que para equações de diferenças que não estejam na forma normal um resultado como este não vale.

Por exemplo, considere a equação $u_{k+1}^2 - 2u_k^2 + 1 = 0$ que não está na forma normal.

Com a condição inicial $u_0 = 0$, o problema de valor inicial resultante não tem solução em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois u_1 deveria satisfazer $u_1^2 + 1 = 0$

Já com a condição inicial $u_0 = 1$ há infinitas soluções, de fato, qualquer sequência $u = (u_k)$ tal que $u_0 = 1$ e $|u_k| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, resolve esse problema de valor inicial.

Para o problema de valor inicial apresentado no exemplo ((4)) não é possível aplicar de modo direto o Teorema de Existência e Unicidade pois a função φ que define a equação de diferenças envolvida está definida apenas para $x > 0$. O exercício a seguir cuida desse assunto.

Questão 1 Suponha que $B \subset \mathbb{R}$ e que $g : \mathbb{N} \times B \rightarrow B$. Demonstre que então, se $\beta_0 \in B$ o problema de valor inicial $u_{k+1} = g(k, u_k)$, $u_0 = \beta_0$, tem uma, e uma única, solução em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Como para a supracitada função do exemplo ((4)), $\varphi(x) > 0$, para todo $x > 0$, o resultado do exercício anterior pode ser usado nesse exemplo.

3 Equações Lineares

Se $m \in \mathbb{N}^*$ a equação

$$u_{k+m} = a_0(k)u_k + a_1(k)u_{k+1} + \cdots + a_{m-1}(k)u_{k+m-1} + b(k) \quad (4)$$

em que a_j , $0 \leq j \leq m-1$ e b são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, com $a_0(k) \neq 0$, chama-se *equação linear de ordem m* .

Se $b \equiv 0$ a equação é dita homogênea.

Dada uma equação (4) a equação

$$u_{k+m} = a_0(k)u_k + a_1(k)u_{k+1} + \cdots + a_{m-1}(k)u_{k+m-1} \quad (5)$$

chama-se equação homogênea associada a (4).

Fato 2. *Com as notações anteriores tem-se que:*

(i) *Se as sequências u e v são soluções de (5) e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $u + v$ e λv também são soluções de (5).*

(ii) *Se as sequências u e v são soluções de (4) então $u - v$ é solução de (5).*

Questão 2 Demonstre o fato 2.

Sejam $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W}_0$ os subconjuntos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ formados respectivamente pelas soluções de (4) e da equação homogênea associada a ela.

Fato 3. (i) $\mathcal{W}_0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de dimensão m .

(ii) *Se $w \in \mathcal{W}$ então $\mathcal{W} = w + \mathcal{W}_0 \doteq \{v = w + u : u \in \mathcal{W}_0\}$.*

Demonstração. (i) Que $\mathcal{W}_0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ decorre de pronto da parte (i) do fato 2.

Para ver que a dimensão de $\mathcal{W}_0$ é m note que, se $0 \leq j \leq m-1$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{k+m} = a_0(k)u_k + a_1(k)u_{k+1} + \cdots + a_{m-1}(k)u_{k+m-1}, \quad \forall k \\ u_k = \delta_{kj}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \end{cases}$$

tem, pelo Teorema de Existência e Unicidade, solução única, seja $u^j = (u_k^j)$ essa solução.

Claro que, pelo item (i) do fato 2, se $(\beta_0, \dots, \beta_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ então a sequência $u = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j u^j$ resolve o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{k+m} = a_0(k)u_k + a_1(k)u_{k+1} + \cdots + a_{m-1}(k)u_{k+m-1}, \quad \forall k \\ u_k = \beta_k, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \end{cases}$$

que tem uma única solução (cortesia, mais uma vez, do Teorema de Existência e Unicidade).

Portanto, $\{u^0, \dots, u^{m-1}\}$ geram o subespaço $\mathcal{W}_0$.

Para ver que $\dim \mathcal{W}_0$ basta observar que, se $t_0, t_1, \dots, t_{m-1}$ são reais tais que $w = \sum_{j=0}^{m-1} t_j u^j$ é a sequência nula, então se $0 \leq k \leq m-1$ tem-se

$0 = \sum_{j=0}^{m-1} t_j u_k^j = \sum_{j=0}^{m-1} t_j \delta_{jk} = t_k$. Isso mostra que $\{u^0, \dots, u^{m-1}\}$, além de gerar $\mathcal{W}_0$, é um subconjunto linearmente independente, portanto é uma base desse subespaço e isto encerra a prova da primeira afirmação.

(ii) Para ver que $\mathcal{W} \subset w + \mathcal{W}_0$ basta tomar $v \in \mathcal{W}$ e ver que, como $w \in \mathcal{W}$, pelo item (i) do fato 2 $u = v - w \in \mathcal{W}_0$.

Portanto $v = w + u$ e tem-se $\mathcal{W} \subset w + \mathcal{W}_0$.

A prova da inclusão $w + \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ é simples e é deixada como exercício. $\square$

Questão 3 Complete a demonstração do resultado anterior. Mostre que, se $w \in \mathcal{W}$, então $w + \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$.

3.1 Equações lineares com coeficientes constantes

Aqui vai-se considerar a equação de diferenças linear em que as funções a_j são constantes, os seja

$$u_{k+m} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \dots + a_{m-1} u_{k+m-1} + b(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

com $a_j \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ e $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Começa-se por estudar a equação homogênea associada a (6) que é

$$u_{k+m} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \dots + a_{m-1} u_{k+m-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

As soluções $u = (u_k)$ de (7) com $u_k = q^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (i.e. u é uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão q), são de grande importância pois a partir delas é possível construir uma base de $\mathcal{W}_0$.

Neste ponto, apesar de todos os a_j serem reais, é útil considerar a situação de q ser um número complexo.

Questão 4 Seja $q \in \mathbb{C}$. Prove que a progressão geométrica $u_k = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, é solução da equação (7) se, e só se, q é raiz do polinômio de coeficientes reais

$$p(\lambda) = \lambda^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j \lambda^j.$$

O polinômio que aparece nessa questão, $p(\lambda) = \lambda^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j \lambda^j$, é um polinômio mônico de grau m , e é chamado *polinômio característico* de (7).

As raízes de $p(\lambda)$ (reais ou não) são chamadas raízes características de (7). Note que $p(0) = a_0 \neq 0$.

Agora vai-se ver como usar as raízes características para determinar a solução geral de (7).

Primeiro analisa-se o caso em que todas as raízes de $p(\lambda)$ são simples, ou seja, as raízes do polinômio característico são $z_1, \dots, z_m$, com $z_j \neq z_\ell$, se $j \neq \ell$.

Fato 4. *Suponha que o polinômio característico de (7) tem m raízes distintas $z_1, \dots, z_m$.*

*Nessas condições, se $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ são números **reais** dados, então existe um, e só um, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ tal que a sequência $u = (u_k)$ dada por*

$$u_k \doteq \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \dots + \lambda_m z_m^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

resolve (7) e satisfaz as condições iniciais $u_k = \beta_k$, se $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Demonstração. Como, se $1 \leq j \leq m$, a progressão geométrica (z_j^k) , $k \in \mathbb{N}$, resolve (7), claro que u é solução de (7), para todo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$.

Portanto, devido ao Teorema de Existência e Unicidade, para provar o resultado enunciado, basta mostrar que existe um único $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ tal que $u_k = \beta_k$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Pela definição de u_k , deve-se demonstrar que o sistema linear

$$\lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \dots + \lambda_m z_m^k = \beta_k, \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

tem uma única solução.

Um cálculo imediato mostra que a matriz desse sistema é a matriz de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{m-1} & z_2^{m-1} & \dots & z_m^{m-1} \end{bmatrix},$$

cujo determinante é $D = \prod_{1 \leq k < j \leq m} (z_j - z_k)$.

Como as raízes do polinômio característico são distintas, tem-se $D \neq 0$ e o resultado fica provado. $\square$